KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Zelfstudiepakket Wiskunde (Bio-ingenieurs)

(Versie 2026/11/23H.2)

Inhoudsopgave

1 Inleiding 1.1

1.1 Voorwoord . . . 1.2

2 Verzamelingen en Logica 2.1

2.1 Verzamelingen . . . 2.2

2.2 Bewerkingen met verzamelingen . . . 2.6

2.3 Propositielogica . . . 2.8

2.4 Kwantoren . . . 2.15

2.5 Bewijstechnieken . . . 2.20

3 Elementair Rekenen 3.1

3.1 Begintest Elementair rekenen . . . 3.2

3.2 Haakjes en ontbinden in factoren . . . 3.3

3.3 Breuken . . . 3.7

3.4 Machten . . . 3.14

3.5 Absolute waarde . . . 3.21

3.6 Rekenen met percentages . . . 3.23

4 Rekenen met logaritmen 4.1

4.1 Begintest Logaritme . . . 4.2

4.2 De logaritme . . . 4.3

4.3 Rekenregels voor logaritmen . . . 4.7

5 Sommatieteken en faculteit 5.1

5.1 Begintest Sommatieteken, faculteit en binomiaalgetallen . . . 5.2

5.2 Het sommatieteken $\sum$ . . . 5.3

5.3 Rekenregels voor de sommatie $\sum$ . . . 5.9

5.4 De faculteit $n!$ . . . 5.17

5.5 Binomiaalgetallen . . . 5.20

6 Veeltermen 6.1

6.1 Begintest Veeltermen . . . 6.2

6.2 Eerstegraadsveeltermen . . . 6.3

6.3 Tweedegraadsveeltermen . . . 6.5

6.4 Veeltermen . . . 6.12
6.5 Euclidisch deling van veeltermen . . . 6.15
6.6 Ontbinden in factoren . . . 6.20
6.7 Het schema van Horner . . . 6.24
6.8 Veeltermbreuken . . . 6.28

7 Vergelijkingen 7.1
7.1 Begintest Vergelijkingen . . . 7.2
7.2 Vergelijkingen in 1 onbekende . . . 7.3
7.3 Veeltermvergelijkingen . . . 7.6
7.4 Rationale vergelijkingen . . . 7.11
7.5 Irrationale vergelijkingen . . . 7.16
7.6 Absolute waarde en vergelijkingen . . . 7.20
7.7 Vergelijkingen in 2 onbekenden . . . 7.21

8 Functies deel 1 8.1
8.1 Intuïtieve definitie van het begrip functie . . . 8.2
8.2 Domein en codomein van een functie . . . 8.5
8.3 Grafieken van reële functies . . . 8.8
8.4 Soorten functies . . . 8.13
8.5 Functies in fysica en chemie . . . 8.27
8.6 Som en verschil van functies . . . 8.29
8.7 Product en quotiënt van functies . . . 8.33
8.8 Samenstellen van functies . . . 8.35
8.9 Even en oneven functies . . . 8.42

9 Ongelijkheden 9.1
9.1 Ongelijkheden in 1 onbekende . . . 9.2
9.2 Tekenverloop . . . 9.4
9.3 Ongelijkheden met veeltermen . . . 9.8
9.4 Ongelijkheden met veeltermbreuken . . . 9.11
9.5 Functies toepassen op ongelijkheden . . . 9.13
9.6 Absolute waarde en ongelijkheden . . . 9.16

10 Exponentiele en logaritmische functies 10.1
10.1 Groeimodellen . . . 10.2
10.2 Exponentiële functies . . . 10.7

INHOUDSOPGAVE

10.3 Logaritmische functies . . . 10.14
10.4 Exponentiële vergelijkingen . . . 10.19
10.5 Logaritmische vergelijkingen . . . 10.21

11 Goniometrie 11.1
11.1 Definitie van een hoek . . . 11.2
11.2 Goniometrische cirkel . . . 11.4
11.3 Goniometrische getallen . . . 11.6
11.4 Verwante hoeken . . . 11.11
11.5 Goniometrische formules . . . 11.13
11.6 Driehoeken oplossen . . . 11.19

12 Goniometrische functies 12.1
12.1 Goniometrische functies . . . 12.2
12.2 Goniometrische vergelijkingen . . . 12.6

13 Functies deel 2 13.1
13.1 Transformaties van functies . . . 13.2
13.2 Periodieke functies . . . 13.12
13.3 Inverse functies . . . 13.17

14 Cyclometrische functies 14.1
14.1 Cyclometrische functies . . . 14.2

15 Poolcoordinaten 15.1
15.1 Poolcoördinaten . . . 15.2
15.2 Poolvergelijkingen . . . 15.8

16 Vectoren in de fysica 16.1
16.1 Vectoren in de fysica . . . 16.2
16.2 Assenstelsels en coördinaten . . . 16.4
16.3 Vectoren in poolcoördinaten . . . 16.8

17 Complexe getallen 17.1
17.1 Complexe getallen . . . 17.2
17.2 De goniometrische schrijfwijze van complexe getallen . . . 17.11

CC BY-NC-SA 4.0

INHOUDSOPGAVE

17.3 Machten van complexe getallen: formule van De Moivre . . . 17.15
17.4 De exponentiële schrijfwijze van complexe getallen . . . 17.17

18 Limieten 18.1
18.1 Limieten grafisch . . . 18.2
18.2 Rekenregels limieten . . . 18.10
18.3 Limieten in $\pm\infty$ . . . 18.14
18.4 Limieten in nulpunten van de noemer . . . 18.18

19 Afgeleiden 19.1
19.1 Definitie van afgeleide . . . 19.2
19.2 Definitie differentiaal . . . 19.9
19.3 Begintest berekening afgeleiden . . . 19.10
19.4 Basisregels . . . 19.12
19.5 Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies . . . 19.16
19.6 Afgeleiden van goniometrische en cyclometrische functies . . . 19.17
19.7 Product- en quotiëntregel . . . 19.18
19.8 Kettingregel . . . 19.21
19.9 Hogere orde afgeleiden . . . 19.29
19.10 Afgeleide van de inverse functie . . . 19.31
19.11 Regel van de l'Hôpital . . . 19.35
19.12 Minimum-Maximumproblemen . . . 19.39

20 Integralen 20.1
20.1 Definitie onbepaalde integraal . . . 20.2
20.2 Basisintegralen . . . 20.6
20.3 Integratie door substitutie . . . 20.11
20.4 Partiële integratie . . . 20.22
20.5 Andere integratietechnieken . . . 20.31
20.6 Bepaalde integralen . . . 20.34
20.7 Bepaalde integralen van even en oneven functies . . . 20.46

21 Vectoren en matrices 21.1
21.1 Vectoren . . . 21.2
21.2 Matrices . . . 21.5

CC BY-NC-SA 4.0

22 Stelsels 22.1
22.1 Inleidende voorbeelden 2×2 stelsels . . . 22.2
22.2 Lineaire stelsels: definitie . . . 22.5
22.3 Lineaire stelsels: oplossingen . . . 22.10
22.4 Lineaire stelsels: oplossen via echelonvorm . . . 22.15
22.5 Niet-lineaire stelsels . . . 22.26

23 Vlakke meetkunde 23.1
23.1 Cartesiaans assenstelsel en coördinaten . . . 23.2
23.2 Basiseigenschappen van driehoeken . . . 23.3
23.3 Basiseigenschappen van de cirkel . . . 23.5
23.4 Basiseigenschappen van hoeken en rechten . . . 23.7
23.5 De vergelijking van een rechte . . . 23.8
23.6 Afstand tussen twee punten . . . 23.11
23.7 De vergelijking van een cirkel . . . 23.12

24 Appendix 24.1
24.1 Het Griekse alfabet . . . 24.2

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 1
Inleiding

(Versie 2026/11/23H.2)

1.1 Voorwoord

Deze cursus behandelt een deel van de leerstof wiskunde waarmee je best vertrouwd bent bij het begin van je studies bio-ingenieurswetenschappen.

Voor de meeste studenten is dit een opfrissing van leerstof die ze al hebben gezien in het secundair onderwijs. Toch is geprobeerd om bij de invoering van begrippen en technieken ook voldoende rekening te houden met studenten voor wie bepaalde onderwerpen door omstandigheden nog nieuw zijn. Dat wil zeggen dat je vlot over de leerstof kan gaan waarmee je voldoende vertrouwd bent en langer moet stilstaan bij de leerstof die nieuw is of een opfrissing nodig heeft. Die keuze moet je zelf maken!

Hoe gebruik je deze cursus? De bedoeling is dat je de cursus hoofdstuk per hoofdstuk doorneemt. Bij een aantal hoofdstukken is er echter eerst een begintest voorzien, als je die goed maakt hoef je niet het hele hoofdstuk door te nemen. Hoeveel tijd je nodig hebt per hoofdstuk hangt sterk af van je voorkennis. *Uitweidingen* in de cursus mag je steeds overslaan. Leg bij het studeren van deze cursus de nadruk op het zelf maken van de oefeningen, enkel het kennen van de theorie of het begrijpen van de uitwerkingen van de oefeningen is niet voldoende. De oefeningen zijn opgedeeld in 3 niveaus: Niveau 1 is elementair en kan je overslaan als je al vertrouwd bent met de betreffende leerstof, niveau 2 zou je vlot moeten kunnen, niveau 3 is eerder een uitdaging. Niet van elk onderwerp zijn er 3 niveaus voorzien.

Deze cursus is niet in de eerste plaats geschreven als voorbereiding op de ijkingstoets. Inzichtsvragen komen niet veel aan bod in deze online cursus, de focus ligt op rekenvaardigheid. Deze cursus bevat de onderwerpen en vaardigheden die je best al beheerst voor je start aan het academiejaar en is een nuttige voorbereiding en aanvulling op de zomercursus wiskunde bedoeld voor deze studierichting.

Deze cursusnota's zijn beschikbaar in meerdere vormen:

(a) als PDF, die je ofwel op je computer kan lezen, ofwel kan printen.

Als je de PDF op de computer leest, werken allerlei interne links naar oefeningen, definities en eigenschappen. In een geprinte versie verdwijnt een deel van die functionaliteit.

Via de KU Leuven website https://wet.kuleuven.be/schoolverlater/basiswiskunde vind je een online versie die extra functionaliteiten biedt.

(b) als online applicatie, met volgende extra functionaliteiten:

- interactieve antwoordmogelijkheden, met feedback en/of hints
- directe links naar extra oefeningen in Usolv-it
- een aantal filmpjes

Je kan zowel elk afzonderlijk onderdeel als de volledige cursus als PDF bestand downloaden.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 2
Verzamelingen en Logica

(Versie 2026/11/23H.2)

2.1 Verzamelingen

Een belangrijk aspect van de wiskunde is het *ontdekken* of *introduceren* van *structuur* in allerlei dingen. Dat werkt zo voor hoeveelheden, groottes, vormen, configuraties, uitspraken enzovoort. De eenvoudigste vorm van structureren is gewoon dingen samennemen, dat heet 'verzamelen'.

Definitie 2.1.1.

- Een **verzameling** is een grondbegrip in de wiskunde. Een verzameling wordt *enkel* en *volledig* bepaald door de objecten die ertoe behoren. We geven hier geen exacte definities of axioma's.

  Meestal noteren we een verzameling met een hoofdletter zoals A, B of X. Soms krijgen verzamelingen standaard notaties, zoals de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ of de reële getallen $\mathbb{R}$.

- De **elementen** van een verzameling zijn de objecten waaruit die verzameling bestaat. Elementen worden meestal aangeduid met kleine letters $a, b, x, y \ldots$.
  Notatie: $a \in A$ betekent "a behoort tot A" of "a is een element van A".
  Notatie: $a \notin A$ betekent "a behoort *niet* tot A" of "a is *geen* element van A".
  Notatie: $A = \{a, b, c\}$ betekent "verzameling A bestaat uit de elementen a, b en c".

- Twee verzamelingen A en B zijn **gelijk**, genoteerd $A = B$, als A en B dezelfde elementen bevatten. Hieruit volgt bijvoorbeeld dat de elementen van een verzameling geen 'volgorde' hebben en dat er ook geen 'dubbels' in een verzameling kunnen zitten. De verzamelingen $\{a, b\}$ en $\{b, a\}$ zijn dus aan elkaar gelijk want ze bestaan beide uit de elementen a en b. Ook de verzamelingen $\{a, b\}$ en $\{a, a, b\}$ zijn aan elkaar gelijk.

- Een **lege verzameling** is een verzameling *zonder elementen*. We noteren ze als $\emptyset \overset{\text{def}}{=} \{\}$.

- Een verzameling A is een **deelverzameling** van een verzameling B als en slechts als elk element van A ook tot B behoort. Zo zijn $\{a\}$ en $\{a, b\}$ deelverzamelingen van $\{a, b, c\}$, maar a en $\{a, d\}$ niet.
  Notatie: $A \subseteq B$, of ook $A \subset B$, betekent "A is een deelverzameling van B".

  Merk op dat $A \subseteq B$ benadrukt dat de verzamelingen ook gelijk mogen zijn. In deze cursus heeft het symbool $\subset$ precies dezelfde betekenis als $\subseteq$. Voor elke verzameling A geldt dus dat $A \subseteq A$, maar *ook* $A \subset A$.
  Om historische redenen verschilt deze afspraak bij de verwante symbolen $<$ en $\leqslant$. Het symbool $<$ betekent *strikt kleiner dan*, terwijl $\leqslant$ *kleiner dan of gelijk aan* betekent.

- Een **eindige verzameling** is een verzameling die slechts een eindig aantal elementen bevat.
  Notatie: $\#A$ betekent "het aantal elementen van A".
  Dus als $A = \{1, 2\}$ dan is $\#A = \#\{1, 2\} = 2$.
  Een **singleton** is een verzameling met *één* element en een **paar** is een verzameling met *twee* elementen.

Voorbeeld 2.1.1.

Alle natuurlijke getallen vormen een verzameling. De getallen 42 en 1302 zijn elementen van die verzameling. De even getallen, de priemgetallen en de delers van 24 vormen telkens een deelverzameling.

Opmerking 2.1.1. Het is belangrijk om goed onderscheid te maken tussen de symbolen $\in$ en $\subseteq$. Ze hebben een verschillende betekenis, maar zijn wel nauw verwant want

$$x \in A \;\Leftrightarrow\; \{x\} \subseteq A.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Verzamelingen

Definitie 2.1.2 (Notatie en definitie voor concrete verzamelingen)**.**

Een verzameling wordt in de praktijk gegeven door één van volgende mogelijkheden:

(a) een **opsomming**, waarbij de elementen worden *opgesomd* tussen accolades:

- $A = \{1, 2, 3\}$, de verzameling met de getallen $1, 2$ en 3.
- $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, de verzameling van de cijfers 0 t.e.m 9.
- $C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$, de (oneindige) verzameling van de even natuurlijke getallen.

Er geldt dat $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$.

(b) een **omschrijving**, waarbij de elementen aan een *voorwaarde* moeten voldoen:

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is deelbaar door } 2\}$ is dezelfde verzameling C van de even natuurlijke getallen als hierboven. Je leest dit als: 'C is de verzameling natuurlijke getallen x *waarvoor geldt dat* x deelbaar is door 2'.

Een rechte streep | tussen accolades lees je als 'waarvoor geldt dat'.

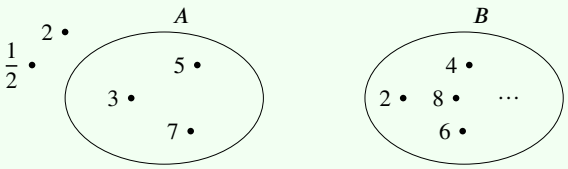
(c) een **constructieve definitie**, waarbij elementen worden gegeven door een *formule*:

$D = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, de verzameling van alle kwadraten van natuurlijke getallen.

(d) een **Venndiagram**:

Een *Venndiagram* is een gesloten kromme (de 'verzameling') waarbinnen de elementen van A door stippen worden voorgesteld. Dingen die geen elementen van A zijn krijgen een stip *buiten* de kromme. We tekenen geen stippen *op* de kromme. Niet alle elementen van A moeten worden weergegeven door een stip, maar in dat geval zetten we drie puntjes in de verzameling. De naam van de verzameling wordt meestal buiten de kromme geplaatst.

Voorbeelden: $A = \{3, 5, 7\}$ en $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$



Sommige veel voorkomende verzamelingen krijgen een speciale notatie:

Definitie 2.1.3.

(a) Volgende getallenverzamelingen hebben een standaardnotatie:

- $\mathbb{N}$ is de verzameling van natuurlijke getallen $0, 1, 2, 3, \ldots$.
- $\mathbb{Z}$ is de verzameling van gehele getallen $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$.
- $\mathbb{Q}$ is de verzameling van rationale getallen (breuken).
- $\mathbb{R}$ is de verzameling van reële getallen (kommagetallen).
- $\mathbb{C}$ is de verzameling van complexe getallen.

Er geldt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

(b) De verzameling van de natuurlijke getallen zonder 0 wordt genoteerd als:

$$\mathbb{N}_0 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Verzamelingen

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}_0, \mathbb{Q}_0$ en $\mathbb{R}_0$ gedefinieerd.

(c) De verzameling van de (strikt) positieve reële getallen wordt genoteerd als:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} |\ x \geqslant 0\} \quad \text{en} \quad \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} |\ x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^+ |\ x \neq 0\}.$$

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$ gedefinieerd.

Pas op: Engelstalige handboeken en websites hebben dikwijls een *omgekeerde afspraak*: $\mathbb{N}$ zijn dan de natuurlijke getallen *zonder nul*, en $\mathbb{N}_0$ zijn de natuurlijke getallen *inclusief nul*.
Sommige handboeken gebruiken notaties als $\mathbb{N}_{>0}, \mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}$, met de voor zich sprekende betekenis.

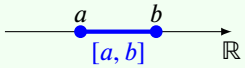
Andere belangrijke voorbeelden van verzamelingen zijn de intervallen:

Definitie 2.1.4 (Intervallen)**.** Voor reële getallen a en b, met $a < b$, definiëren we

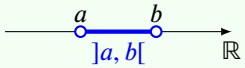
het **gesloten interval** $[a, b]$: de getallen tussen a en b met a en b inbegrepen.
het **open interval** $]a, b[$: de getallen tussen a en b, met a en b *niet* inbegrepen.
het **half-open interval** $[a, b[$: de getallen tussen a en b, met a inbegrepen en b *niet*.
het **half-open interval** $]a, b]$: de getallen tussen a en b, met a *niet* inbegrepen en b wel.

In formules wordt dat:

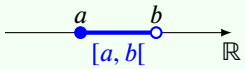
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ het gesloten interval $[a, b]$



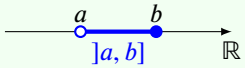
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ het open interval $]a, b[$



$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ het half-open interval $[a, b[$

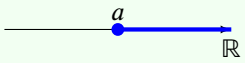


$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ het half-open interval $]a, b]$

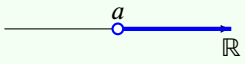


We breiden de notatie ook uit voor halfrechten of 'oneindige intervallen':

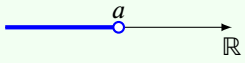
$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$



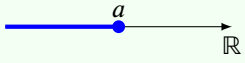
$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$



$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



$]-\infty, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$



Merk op dat $+\infty$ en $-\infty$ zelf nooit tot het interval behoren, want $+\infty$ en $-\infty$ zijn geen reële getallen.

In Engelstalige handboeken wordt voor het 'open teken' soms een rond haakje gebruikt. De notatie (a, b) komt dan overeen met $]a, b[$.

Opmerking 2.1.2. Let op het verschil in notatie:

- De verzameling $\{2, 3\}$ bevat enkel de twee getallen 2 en 3.

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Verzamelingen

- De verzameling $[2, 3]$ is een gesloten interval en bevat oneindig veel getallen, namelijk alle reële getallen tussen 2 en 3, 2 en 3 inbegrepen.

CC BY-NC-SA 4.0

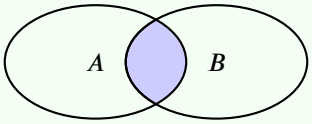
2.2 Bewerkingen met verzamelingen

Je kan in zekere zin 'rekenen' met verzamelingen, namelijk bewerkingen uitvoeren met verzamelingen.

Met twee verzamelingen A en B bouw je op volgende manieren nieuwe verzamelingen:

Definitie 2.2.1.

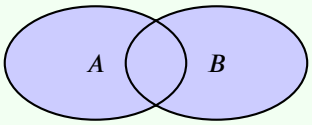
- $A \cap B$ = de **doorsnede** van A en B.
  $A \cap B$ is de verzameling van alle elementen die behoren tot A **en** tot B.



$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$

We noemen twee verzamelingen A en B **disjunct** als $A \cap B = \emptyset$.

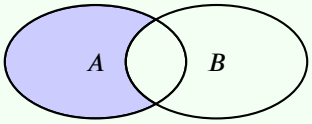
- $A \cup B$ = de **unie** of **vereniging** van A en B.
  $A \cup B$ is de verzameling van alle elementen die behoren tot A **of** tot B.



$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$

Als $C = A \cup B$ waarbij $A \cap B = \emptyset$, dan noemt men C de **disjuncte unie** van A en B.

- $A \setminus B$ = het **verschil** van A en B.
  $A \setminus B$ is de verzameling van alle elementen die behoren tot A maar niet tot B.



$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\} = \{x \in A \mid x \notin B\}$

Opmerking 2.2.1.

Merk op dat voor twee verzamelingen A en B geldt dat $A \cap B = B \cap A$ en $A \cup B = B \cup A$, maar in het algemeen is $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Oefening 2.2.1. Bepaal volgende verzamelingen.

(a) $\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3\}$

(b) $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

(c) $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$

(d) $\{2,3,4\} \setminus \{1,2,3\} = \{4\}$

(e) $\{1,2,3,4\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3,4\}$

(f) $\{1,2,3,4\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

(g) $\{1,2,3,4\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$

(h) $\{2,3,4\} \setminus \{1,2,3,4\} = \emptyset$

Met $\cap$ en $\cup$ kunnen we ook de unie en doorsnede van intervallen aanduiden:

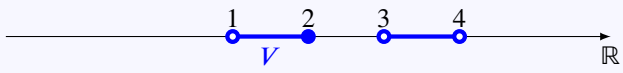
$$\begin{aligned} [a,b] \cup [c,d] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b] \text{ of } x \in [c,d]\}, \\ [a,b] \cap [c,d] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b] \text{ en } x \in [c,d]\}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 2.2.1 (basisvoorbeelden intervallen)**.**

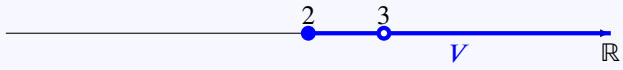
Schrijf volgende verzamelingen telkens als een unie van intervallen:

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Bewerkingen met verzamelingen

1. 

$V =]1,2] \cup]3,4[$

2. 

$V = [2,3[\cup]3,+\infty[$

Voorbeeld 2.2.2 (Unie en doorsnede van intervallen)**.**

(a) $[2,4[\cap]3,5[=]3,4[$

(b) $[2,4[\cup]3,5[= [2,5[$

(c) $[2,4[\setminus]3,5[= [2,3]$

(d) $]3,5[\setminus [2,4[= [4,5[$

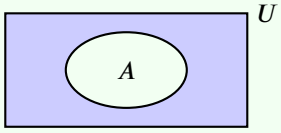
(e) $[2,4[\cap [5,6] = \emptyset$

(f) $[2,4[\cup [5,6]$ is geen interval. Zo zit bijvoorbeeld 4.5 niet in deze verzameling.

Dikwijls zijn alle relevante verzamelingen in een bepaalde context *deelverzamelingen van een vaste verzameling*, bijvoorbeeld de reële getallen in de context van het bestuderen van reële functies. We noemen die vaste verzameling dan een **universele verzameling** (of **universum**) U en tekenen haar Venndiagram met een rechthoek in plaats van een ovaal. Als er een universum is, dan bestaat er niets 'buiten' dat universum. We kunnen dan het *complement* van een verzameling A definiëren als alles wat *niet* in A zit:

Definitie 2.2.2.

Het **complement** A^c van een deelverzameling A in een universum U is de verzameling van de elementen van U die *niet* tot A behoren. A^c is dus gelijk aan het verschil van U en A:



$$A^c = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Propositielogica

Mensen denken en communiceren in een taal, bijvoorbeeld in het Nederlands. Soms is het niet eenvoudig om precieze bewoordingen te vinden om een gedachte of redenering exact weer te geven. Bovendien heeft iedereen een eigen taalgevoel, wat tot gevolg kan hebben dat degene die een zin *uitzendt* hem anders interpreteert dan degene die de zin *ontvangt*.

Stel, je belooft aan een kleuter het volgende:

Als je braaf bent, dan krijg je een zuurtje of een reep chocolade.

Wat mag die kleuter dan precies verwachten?

- Kan hij als hij braaf is ook een zuurtje *en* een reep chocolade krijgen?
- Als hij braaf is, mag hij dan *zelf* kiezen tussen een zuurtje of een reep chocolade?
- Kan hij ook iets krijgen als hij *niet* braaf is, of is dat uitgesloten?
- Hoe braaf moet hij eigenlijk zijn om iets te krijgen? Wat als hij *een heel klein beetje* niet braaf is?

Om dergelijke onduidelijkheden en verwarring te vermijden kan men sommige zinnen en sommige redeneervormen proberen onttrekken aan de gewone taal. Men kan ze **formaliseren** in de *symbolische* of *formele logica*. We beperken ons hier tot een kleine selectie van notaties uit de logica die worden gebruikt voor het formuleren van wiskundige definities, eigenschappen en redeneringen.

2.3.1 Proposities en predicaten

Definitie 2.3.1.

Een **propositie** is een zinvolle mededelende volzin, die al dan niet *waar* kan zijn.

De precieze voorwaarden voor *zinvolheid* en *waarheid* zullen van de context afhangen. We zullen daar hier niet verder op ingaan. We spreken af om *uitspraak* als synoniem te gebruiken voor *propositie* in deze cursus.

Voorbeeld 2.3.1 (proposities)**.**

'De aarde is een planeet'	is	een ware propositie
'De aarde is plat'	is	een onware propositie
'De een planeet aarde is'	is	geen propositie (want niet 'zinvol' of 'betekenisvol')
'1+1=2'	is	een ware proposite
'1+1=3'	is	een onware propositie
'1+=!,-5'	is	geen propositie (want niet 'zinvol' of 'betekenisvol')
'De vakantie is voorbij'	is	een propositie (waarvan de waarheid afhangt van de context)
'Is er leven op Pluto?'	is	geen propositie (want een vraag)
'Begreep ik wiskunde maar'	is	geen propositie (want een wens of verzuchting)
'Die is gek'	is	geen propositie (tenzij uit de context blijkt over wie het gaat)
'5 is een priemgetal'	is	een ware propositie
'n is een priemgetal'	is	geen propositie (tenzij uit de context blijkt over welke n het gaat)

Definitie 2.3.2.

Een **predicaat** is een zinvolle mededelende volzin met (één of meerdere) **vrije variabelen** in.

Een vrije variabele is een uitdrukking waarvoor concrete dingen moeten worden ingevuld voordat het predicaat al dan niet waar kan worden. Een predicaat heeft dus een *context* nodig waarin de betekenis van de vrije variabele wordt vastgelegd.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Propositielogica

Voorbeeld 2.3.2 (predicaten).

'n is een priemgetal' is een predicaat met vrije variabele n:

Als
- $n = 5$ dan wordt dit de *ware* propositie '5 is een priemgetal'
- $n = 10$ dan wordt dit de *onware* propositie '10 is een priemgetal'
- $n = 1/2$ dan krijgen we geen betekenisvolle propositie

'Er bestaan natuurlijke getallen n zodat n een priemgetal is.'	is een ware propositie
'Voor alle natuurlijke getallen n is n een priemgetal.'	is een onware propositie
'Voor alle reële getallen n geldt dat n een priemgetal is.'	is geen betekenisvolle propositie
'Voor alle letters n geldt dat n een priemgetal is.'	is geen betekenisvolle propositie

2.3.2 Logische connectieven: '... of...', '... en...', 'niet...'

De propositielogica probeert de betekenis en waarheidswaarde van samengestelde proposities te bepalen op basis van de samenstellende, eenvoudigere proposities. De betekenis van samengestelde proposities kan vastgelegd of verduidelijkt worden door een **waarheidstabel**. Alle basisproposities p, q, enz. kunnen ofwel waar zijn ofwel niet waar (we zeggen ook 'onwaar' of 'vals'). Er is geen andere optie voor de waarheidswaarde van een propositie dan waar of niet waar, er is geen grijze zone. De waarheid van een samenstelling hangt dan af van de waarheidswaarden van p, q enz., zoals aangegeven in de waarheidstabel. We gebruiken hier de afspraak dat 'w' aanduidt dat de propositie waar is en 'o' dat de propositie onwaar is. Soms wordt ook de afspraak gemaakt dat het getal 1 aanduidt dat de propositie waar is en het getal 0 dat de propositie onwaar is.

Proposities kunnen worden samengesteld via conjunctie ('en'), disjunctie ('of') en negatie ('niet'):

Definitie 2.3.3 (Conjunctie, disjunctie en negatie).

Als p en q proposities zijn, dan noteren we de propositie 'p of q' met $p \vee q$ en 'p en q' met $p \wedge q$. De uitspraak dat p niet waar is, dus 'niet p' of 'p is onwaar', wordt genoteerd met $\neg p$.

De waarheidstabellen zijn als volgt:

p	q	$p \vee q$ p of q	$p \wedge q$ p en q
w	w	w	w
w	o	w	o
o	w	w	o
o	o	o	o

p	$\neg p$ niet p
w	o
o	w

Merk dus op dat in de wiskunde (en in alle wetenschappen) het gebruik van 'of' *niet exclusief* is: 'p of q' betekent per definitie dat *minstens één van de twee* waar is, maar mogelijk ook beide.

Wie wat Latijn kent, kan het symbool $\vee$ onthouden via het latijnse woordje 'vel' voor 'of'. Anderen merken op dat $\vee$ lijkt op $\cup$, en de unie $A \cup B$ bestaat uit de elementen die in A **of** B zitten, terwijl $\wedge$ lijkt op $\cap$, en $A \cap B$ zijn de elementen die in A **en** B zitten. De negatie $\neg$ komt overigens op dezelfde manier enigszins overeen met het complement.

Oefening 2.3.1. Vul volgende waarheidstabel aan:

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Propositielogica

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$p \wedge \neg p$	$p \vee \neg p$
w	w	.....	.....	.....	.....	.....
w	o	.....	.....	.....	.....	.....
o	w	.....	.....	.....	.....	.....
o	o	.....	.....	.....	.....	.....

2.3.3 Implicatie: 'als . . . , dan . . . '

Hier is de kloof tussen de betekenis in de omgangstaal en die in de wiskunde soms erg groot. We bestuderen uitspraken van het type 'als . . . , dan . . . ' dan ook wat uitgebreider.

Voorbeeld 2.3.3. Welke van volgende proposities zijn waar?

(1) 'Als het vandaag zaterdag is, dan is het morgen zondag.' Juist ✓

(2) 'Als 9 een drievoud is, dan is 9 even.' Fout ✓

(3) 'Als een mus een reptiel is, dan is $1 + 1 = 3$.' Juist ✓

(4) 'Als een mus een reptiel is, dan is $1 + 1 = 2$.' Juist ✓

Beschrijf wat een vader waarschijnlijk bedoelt als hij tegen zijn zoon zegt:

(1) 'Als jij kan slagen zonder te studeren, dan ben ik Napoleon.'
(2) 'Als je er door bent in juni, dan mag je naar Pukkelpop.'

Alle proposities in vorig voorbeeld hebben de vorm

als p, dan q,

met p en q proposities.

Formeel noteren we dit als

$$p \Rightarrow q$$

en lezen 'p impliceert q', 'als p, dan q of soms ook 'q volgt uit p'.

In het dagelijks leven suggereert 'p impliceert q' een *causaal* verband tussen p en q: meestal bedoelen we inderdaad dat q waar is *omdat* ook p waar is, of dus dat de waarheid van q *veroorzaakt* wordt door de waarheid van p. In de strikte logische zin wordt er echter *geen causaal verband* verondersteld. De logica volgt een erg strikte, eenduidige en letterlijke interpretatie: $p \Rightarrow q$ betekent 'ALS het het geval is dat p waar is, DAN moet zeker ook q waar zijn'. In het geval dat p *niet* waar is, is $p \Rightarrow q$ steeds waar, zowel in het geval dat q waar is als in het geval dat q niet waar is.

Definitie 2.3.4 (De implicatie "⇒")**.**

De **implicatie** $p \Rightarrow q$ tussen twee proposities p en q betekent dat zodra een bepaalde propositie p waar is, ook de propositie q waar is.

We lezen $p \Rightarrow q$ als 'p impliceert q', of 'als p, dan q' of ook 'q volgt uit p'.

We noemen p het **antecedens** of de **hypothese** en q het **consequens** of de **conclusie**.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Propositielogica

De waarheidstabel voor $p \Rightarrow q$ is:

p	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
w	o	o
o	w	w
o	o	w

Dus de enige manier waarop $p \Rightarrow q$ *onwaar* kan zijn, is als p waar is en q onwaar.
Als p *niet waar* is, dan is de implicatie $p \Rightarrow q$ *waar*, *ongeacht* of q al dan niet waar is.

Onthoud: "Als een mus een reptiel is, dan is 1+1=3" is een *ware* uitspraak. Dit is een implicatie van de vorm $p \Rightarrow q$. Een mus is geen reptiel (p is niet waar) en bijgevolg is de implicatie *waar*.

Ook de Romeinen en de middeleeuwse logici interpreteerden de implicatie op deze manier, en gebruikten de term "Ex falso [sequitur] quod libet": uit een onware uitspraak volgt al wat je maar wil.

Voorbeeld 2.3.4 (Pukkelpop)**.** Wanneer is volgende uitspraak (of belofte) van je vader al dan niet waar:

Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop.

Er zijn drie proposities p, q en $(p \Rightarrow q)$:

p : je slaagt in juni
q : je mag naar Pukkelpop
$p \Rightarrow q$: Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop.

We krijgen de volgende waarheidstabel.

(Als)	p	(dan)	q	als p dan q $(p \Rightarrow q)$
p is waar:	je slaagt in juni	q is waar:	je mag naar Pukkelpop	waar
p is waar:	je slaagt in juni	q is onwaar:	je mag niet naar Pukkelpop	onwaar
p is **onwaar**:	je slaagt niet in juni	q is **waar**:	je mag naar Pukkelpop	**waar**
p is **onwaar**:	je slaagt niet in juni	q is **onwaar**:	je mag niet naar Pukkelpop	**waar**

Dus, enkel in het geval dat je slaagt, maar toch niet naar Pukkelpop mag, breekt je vader zijn belofte (en wordt zijn uitspraak dus onwaar). Als je niet slaagt, en je mag toch naar Pukkelpop, is er geen enkel logisch probleem. De uitspraak 'Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop.' is in dit geval waar (derde lijn in de waarheidstabel).

Merk wel op dat je vader allicht volgende uitspraak *bedoelde*:

Alleen als je slaagt in juni, mag je naar Pukkelpop.

en dus, als je *niet* slaagt, dan mag je ook *niet* naar Pukkelpop. In dat geval is de situatie als volgt

(*Alleen als*)	p	(dan)	q	**alleen als** p dan q
p is waar:	je slaagt in juni	q is waar:	je mag naar Pukkelpop	waar
p is waar:	je slaagt in juni	q is onwaar:	je mag niet naar Pukkelpop	onwaar
p is onwaar:	je slaagt niet in juni	q is waar:	je mag naar Pukkelpop	onwaar
p is onwaar:	je slaagt niet in juni	q is onwaar:	je mag niet naar Pukkelpop	waar

In dit geval mag je *alleen als* je geslaagd bent naar Pukkelpop. Dus, p en q moeten nu ofwel beide waar zijn, ofwel beide niet waar. Dus p is waar *als en slechts als* q waar is, en we noemen p en q *equivalent*.

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Propositielogica

Oefening 2.3.2. Vul volgende waarheidstabel aan

p	q	$p \Rightarrow q$	$(\neg p) \vee q$	$(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$
w	w	.....	.....	.....
w	o	.....	.....	.....
o	w	.....	.....	.....
o	o	.....	.....	.....

2.3.4 Equivalentie: '... als en slechts als ...'

Definitie 2.3.5 (Equivalentie "$\Leftrightarrow$").

Twee proposities zijn **equivalent** als ze elkaar impliceren, of ook als ze ofwel beide waar zijn, ofwel beide onwaar. We noteren dit met $p \Leftrightarrow q$ en we zeggen dat p en q **equivalent** zijn:

$$p \Leftrightarrow q \quad \text{betekent} \quad (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

De waarheidstabel voor $p \Leftrightarrow q$ is:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w
w	o	o
o	w	o
o	o	w

In de wiskunde wordt $p \Leftrightarrow q$ vaak gelezen als 'p **als en slechts als** q', en men schrijft soms ook 'p **asa** q'. In het Engels schrijft men dan 'iff' voor 'if and only if', en in het Frans 'ssi' voor 'si et seulement si'.

Als $p \Leftrightarrow q$ dan noemen we p ook wel **een nodige en voldoende voorwaarde** voor q, en dan is automatisch ook q een nodige en voldoende voorwaarde voor p.

Uit de waarheidstabel blijkt dus duidelijk dat $p \Leftrightarrow q$ waar is als p en q allebei waar zijn of allebei niet waar zijn. Als een van de twee waar is en de andere niet dan is $p \Leftrightarrow q$ *niet* waar.

Voorbeeld 2.3.5 (Pukkelpop bis).

De vader uit Voorbeeld 2.3.4 *bedoelde* allicht: je mag naar Pukkelpop als *en slechts als* je slaagt in juni.

Oefening 2.3.3. Met welke uitspraken is $\neg(p \Rightarrow q)$ equivalent? Probeer het antwoord eerst te vinden door te redeneren. Controleer je antwoord met een waarheidstabel.

1. $p \wedge \neg q$ ..... **4.** $\neg p \vee \neg q$ .....

2. $p \vee \neg q$ ..... **5.** $q \Rightarrow \neg p$ .....

3. $\neg p \wedge q$ ..... **6.** $\neg(\neg p \vee q)$ .....

2.3.5 Implicatie, equivalentie, nodige en voldoende voorwaarden

In verband met de implicatie gebruikt men ook de uitdrukkingen 'nodige voorwaarde' en 'voldoende voorwaarde'.

Definitie 2.3.6. Volgende uitspraken zijn allemaal equivalente formuleringen van hetzelfde:

$$p \Rightarrow q$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Propositielogica

$\neg p \vee q$

als p, dan q

p impliceert q

q is waar, of p is onwaar

p is een **voldoende voorwaarde** voor q

$\neg q \Rightarrow \neg p$

als q niet waar is , dan is ook p niet waar

q kan enkel onwaar zijn als p ook onwaar is

q is een **nodige voorwaarde** voor p

opdat p zou gelden, is het **nodig** dat q geldt

opdat q zou gelden, is het **voldoende** dat p geldt

Opmerking 2.3.1 (Te veel gemaakte redeneerfout)**.**

We benadrukken nogmaals de betekenis van $p \Rightarrow q$. Het komt immers al te vaak voor dat studenten bij $p \Rightarrow q$ *verkeerdelijk* denken dat als p niet waar is, dan ook q niet waar zal zijn.

Als je weet dat $p \Rightarrow q$ geldt, en je weet dat p *niet* geldt, dan kan je *niets* besluiten over de geldigheid van q. Dit is eigenlijk een evidentie. Toch leert de ervaring dat daar in de praktijk al te vaak tegen gezondigd wordt.

In het dagelijks taalgebruik betekent "als . . . , dan . . ." soms meer dan wat men strikt genomen zegt. Als je vader zegt 'Als je slaagt in juni, dan mag je naar Pukkelpop', dan *bedoelt* hij wellicht dat je *enkel* naar Pukkelpop mag als je slaagt. Hij bedoelt dus behalve wat hij expliciet zegt, impliciet ook: als je *niet* slaagt, dan mag je *niet* naar Pukkelpop. Als we met p de propositie "je slaagt in juni" aanduiden en met q de propositie "je mag naar Pukkelpop", dan zegt je vader "$p \Rightarrow q$" maar daar bovenop bedoelt hij stilzwijgend eigenlijk ook "$q \Rightarrow p$". Eigenlijk wil hij dus zeggen "$p \Leftrightarrow q$".

In de wetenschap en in de wiskunde in het bijzonder veroorloven we ons dergelijk slordig en dubbelzinnig taalgebruik niet, en "als ... dan .." betekent ook steeds gewoon "als ... dan ...".

2.3.6 Voorrangsregels

Definitie 2.3.7.

Bij de combinatie van connectieven gelden volgende voorrangsregels (van links naar rechts):

$$(\,) \qquad \neg \qquad \wedge \qquad \vee \qquad \Rightarrow \,/\, \Leftarrow \,/\, \Leftrightarrow$$

waarbij de haakjes ( ) dus de hoogste voorrang hebben en de pijlen $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ en $\Leftrightarrow$ de laagste.

Voorbeeld 2.3.6.

$\neg p \vee q$	betekent	$(\neg p) \vee q$
$p \vee q \Rightarrow r$	betekent	$(p \vee q) \Rightarrow r$
$p \wedge q \Leftrightarrow r$	betekent	$(p \wedge q) \Leftrightarrow r$
$\neg p \Rightarrow q \vee r$	betekent	$(\neg p) \Rightarrow (q \vee r)$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Propositielogica

2.3.7 Tautologieën en contradicties

Definitie 2.3.8.

Een **tautologie** of **logische stelling** is een (samengestelde) propositie die *altijd waar* is, onafhankelijk van de waarheidswaarden van de verschillende proposities waaruit ze bestaat.

Een **contradictie** of **tegenspraak** is een (samengestelde) propositie die *altijd onwaar* is, voor alle mogelijke waarheidswaarden van de verschillende proposities waaruit ze bestaat.

De logica telt vele tautologieën. Vooral equivalenties zijn handig omdat ze soms toelaten proposities te vervangen door equivalente maar duidelijkere proposities.
Volgende tautologieën kan je allemaal als oefening bewijzen met een waarheidstabel:

Eigenschap 2.3.1 (Tautologieën of logische stellingen)**.**

$\neg(\neg p)$	$\Leftrightarrow$	p	*dubbele negatie*
$\neg(p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	*negatiewet van De Morgan voor* $\wedge$
$\neg(p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	*negatiewet van De Morgan voor* $\vee$
$(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg p) \vee q)$	*definitie van* $\Rightarrow$
$\neg(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge \neg q)$	*negatie van* $\Rightarrow$
$(p \Rightarrow q)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg q \Rightarrow \neg p)$	*contrapositie*
$p \wedge (q \vee r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	*distributiviteit van* $\wedge$ *t.o.v.* $\vee$
$p \vee (q \wedge r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	*distributiviteit van* $\vee$ *t.o.v.* $\wedge$
q	$\Leftrightarrow$	$(\neg q \Rightarrow (p \wedge \neg p))$	*redenering uit het ongerijmde*
$(p \vee q) \Rightarrow r$	$\Leftrightarrow$	$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$	*gevalsonderscheid*
$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$\Rightarrow$	$(p \Rightarrow r)$	*transitiviteit van* $\Rightarrow$
p	$\vee$	$\neg p$	*de wet van de uitgesloten derde*

Verder zijn $\wedge$, $\vee$ en $\Leftrightarrow$ associatief en commutatief.

Oefening 2.3.4.

Toon aan met behulp van een waarheidstabel dat

$$p \wedge \neg p$$

een **contradictie** is.

Eigenschap 2.3.2 (Samenvatting en overzicht van connectieven met waarheidstabellen)**.**

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	o	o	w	w	w	w	w
w	o	o	w	o	w	o	w	o
o	w	w	o	o	w	w	o	o
o	o	w	w	o	o	w	w	w

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Kwantoren

De betekenis van sommige beweringen hangt af van de context: de betekenis van de zin "hij is president van Amerika"wordt bepaald door welke 'hij' precies wordt bedoeld. In de wiskunde hangt de waarheidswaarde van een bewering als 'n is even' af van welke n precies wordt bedoeld.

Een **predicaat** is een zinvolle mededelende zin met **vrije variabelen**. Deze vrije variabelen worden voorgesteld met letters (n, x, ...). Kwantoren gaan de vrije variabelen binden, de vrije variabelen worden zo **gebonden variabelen**.

Voor de predicaten

(a) $n^2 = 4$ (b) $n^2 = -4$ (c) $n^2 \geq 0$

is (a) $n^2 = 4$ enkel waar als $n = 2$ of $n = -2$, terwijl (b) $n^2 = -4$ voor geen enkel natuurlijk getal n waar is (maar wel voor de complexe getallen $\pm 2i$), en (c) $n^2 \geq 0$ is waar voor alle natuurlijke getallen n (maar niet voor bijvoorbeeld het complexe getal i, want $i^2 = -1 < 0$).

Er zijn essentieel drie verschillende manieren om een dergelijke 'vrije variabele n' te 'binden', dus vast te leggen. We kunnen bedoelen dat een predicaat al dan niet moet gelden voor

- één *concrete* waarde: $n = 2$, of $n = 6$
- *alle* mogelijke waarden van n (eventueel enkel van een bepaald type)
- *minstens één* waarde van n (eventueel van een bepaald type)

De predicaten worden pas waar of onwaar van zodra de vrije variabele niet meer vrij zijn, maar gebonden worden door kwantoren. De twee laatste gevallen kunnen we uitdrukken met "voor alle" en "er bestaat". Dit geeft aan *voor hoeveel* waarden (dus voor welke *kwantiteit* van waarden) het predicaat zou moeten gelden: voor allemaal of voor minstens één. Men noemt ze in de logica daarom **kwantoren** en men voert volgende notaties in:

Definitie 2.4.1.

Als $p(a)$ een predicaat is dat afhangt van een variabele a, en A een verzameling, dan betekent

$\forall a \in A : p(a)$ *voor elk* element a van A geldt $p(a)$

$\exists a \in A : p(a)$ *er bestaat (minstens) een* element a van A waarvoor $p(a)$ geldt

Hierbij noemen we

$\forall$ de **universele kwantor** of **alkwantor**
$\exists$ de **existentiële kwantor** of **bestaanskwantor**

Opmerking 2.4.1.

- We schrijven de kwantor in echte formules altijd vóór het predicaat, en dus niet ~~$p(a), \forall a \in A$~~. Maar, in een meer informele context schrijven we soms toch uitdrukkingen als

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

- In sommige handboeken schrijft men *altijd* haakjes rond een kwantor $(\forall x) : p(x)$, en dan laat men de dubbele punt soms weg $(\forall x)p(x)$. Sommigen gebruiken een komma: $\forall x, p(x)$
- De uitspraken $\forall a \in A : p(a)$ en $\forall x \in A : p(x)$ betekenen precies hetzelfde, dus de *naam* (letterkeuze) van de variabele heeft geen belang.

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Kwantoren

Met deze notaties kunnen we nu compact schrijven

- $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 4$ voor 'er bestaat een natuurlijk getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 4'. (waar)
- $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 = 4$ voor 'alle natuurlijke getallen hebben als kwadraat 4'. (niet waar)
- $\forall n \in \mathbb{Z} : n^2 \geq 0$ voor 'alle gehele getallen hebben een positief kwadraat'. (waar)

Het is belangrijk dat je deze uitdrukkingen met kwantoren spontaan leert lezen als volwaardige zinnen.

2.4.1 Negatie van kwantoren

Er is een interessante wisselwerking tussen kwantoren en ontkenningen: beweren dat *niet iedereen* geslaagd is, betekent dat er *iemand is* die niet geslaagd is. En beweren dat *iedereen* iets *niet* heeft komt op hetzelfde neer als beweren dat *niemand* dat iets *wel* heeft.

Voorbeeld 2.4.1.

Als X de verzameling is van alle studenten die in deze cursus hebben gelezen en $p(x)$ is het predicaat "student x heeft blond haar", dan lezen we de uitspraak

$$\forall x \in X : p(x)$$

als "alle studenten die in deze cursus hebben gelezen zijn blond".

Deze uitspraak kan in de praktijk zowel waar als niet waar zijn, maar ze is uiteraard *niet waar* van zodra er minstens één student is die niet blond is. In symbolen uitgedrukt betekent dit

$$\neg(\forall x \in X : p(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in X : \neg p(x).$$

Op gelijkaardige manier betekent 'niemand is geslaagd' hetzelfde als 'iedereen is gebuisd'. In formules, met $q(x)$ het predicaat "x is geslaagd", wordt dit:

$$\neg(\exists x \in X : q(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X : \neg q(x).$$

en 'niemand is gebuisd' betekent hetzelfde als 'iedereen is geslaagd':

$$\neg(\exists x \in X : \neg q(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X : q(x).$$

Samengevat:

Eigenschap 2.4.1 (Negatie van kwantoren)**.** Voor elk predicaat $p(x)$ geldt:

(1)	$\neg(\forall x \in X : p(x))$	$\Leftrightarrow$	$\exists x \in X : \neg p(x)$	of	$\neg(\forall x)p(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x))$
(2)	$\neg(\exists x \in X : p(x))$	$\Leftrightarrow$	$\forall x \in X : \neg p(x)$	of	$\neg(\exists x)p(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg p(x))$

In woorden: 'niet voor alle' is hetzelfde als 'er bestaat waarvoor niet',

en ook: 'niet er bestaat' is hetzelfde als 'voor alle geldt niet'.

2.4.2 Volgorde van kwantoren

Als in een wiskundige formule meerdere kwantoren voorkomen, dan is de *volgorde* soms erg belangrijk.

Oefening 2.4.1. Zij P een verzameling potjes van allemaal onderling *verschillende* formaten en D de verzameling van de bijhorende deksels. Zij $p(x, y)$ met $x \in D$ en $y \in P$ het predicaat 'x past op y'.

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Kwantoren

Kies voor elk van volgende formules de overeenkomstige Nederlandse zin, en zeg of de uitspraak waar of onwaar is.

A Op elk potje past een dekseltje
B Er is een potje waar elk dekseltje op past
C Er is een potje waarop geen dekseltje past
D Er is een dekseltje dat op geen enkel potje past
E Er is een dekseltje dat op elk potje past
F Er is een dekseltje dat op een potje past
G Elk dekseltje past op elk potje
H Elk dekseltje past op een potje

1. $\forall x \in D : \forall y \in P : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
2. $\forall y \in P : \forall x \in D : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
3. $\exists x \in D : \exists y \in P : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
4. $\exists y \in P : \exists x \in D : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
5. $\exists x \in D : \forall y \in P : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
6. $\forall y \in P : \exists x \in D : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
7. $\forall x \in D : \exists y \in P : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
8. $\exists y \in P : \forall x \in D : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
9. $\exists a \in P : \forall b \in D : p(b,a)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
10. $\exists x \in P : \forall y \in D : p(y,x)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout

Deze oefening kan worden veralgemeend in volgende eigenschappen:

Eigenschap 2.4.2 (Verwisselen van kwantoren)**.** Voor elk predicaat $p(x,y)$ geldt:

$$
\begin{array}{lccl}
(1) & \forall x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) & \Leftrightarrow & \forall y \in Y : \forall x \in X : p(x,y) \\
(2) & \exists x \in X : \exists y \in Y : p(x,y) & \Leftrightarrow & \exists y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) \\
(3) & \exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) & \Rightarrow & \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) \\
(4) & \forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y) & \not\Rightarrow & \exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y)
\end{array}
$$

Dit betekent:

- Gelijksoortige kwantoren mogen altijd van plaats worden verwisseld: de uitspraak verandert niet van betekenis. Daarom mogen we ook schrijven $\forall x, y \in X$ of $\exists x, y \in Y$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Kwantoren

- Een bestaanskwantor mag achter een alkwantor worden geschoven: de uitspraak blijft waar, maar wordt zwakker.
- Een alkwantor **mag niet** achter een bestaanskwantor worden geschoven: de uitspraak wordt dan mogelijk onwaar.
  Bij $\forall y \in Y : \exists x \in X$ kan de x afhangen van y, maar bij $\exists x \in X : \forall y \in Y$ kan dat *niet*.

Opmerking 2.4.2.

- Onthoud: **als op elk potje een dekseltje past, dan betekent dat *niet* dat er een dekseltje is dat op elke potje past**. Maar, als er omgekeerd toch een dekseltje zou zijn dat op elk potje past, dan is er natuurlijk automatisch ook voor elke potje een passend dekseltje: namelijk dat 'universeel passend' dekseltje.
- Bij een uitspraak van de vorm $\forall x \in X : \exists y \in Y : p(x,y)$ volstaat het dat voor elke x een mogelijk *andere* y gevonden wordt: de y is dus mogelijk afhankelijk van x. Je zou met functie-notatie ook $y(x)$ kunnen schrijven, of met een subscript y_x:

  $$\forall x \in X : \exists y_x \in Y : p(x, y_x)$$

  Bij een uitspraak van de vorm $\exists y \in Y : \forall x \in X : p(x,y)$ moet er één vaste y bestaan die *niet* afhangt van x, maar voor alle x tegelijk werkt. Dat is een veel strengere eis.
- In deze eigenschap wordt steeds de kwantor-met-de-variabele van plaats verwisseld. De eigenschap geldt *niet* als je *enkel de kwantor* verplaatst. In dat geval krijg je een nieuwe uitspraak die in het algemeen geen logisch verband heeft met de oorspronkelijke uitspraak:

  $$\exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) \quad \text{vs} \quad \forall x \in X : \exists y \in Y : p(x,y)$$

Oefening 2.4.2. Vergelijk de betekenis van volgende twee uitspraken en geef voor elke uitspraak aan of ze waar of onwaar is:

1. $\forall m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : n > m$

2. $\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : n > m$.

Oefening 2.4.3. Onderzoek of volgende uitspraken al dan niet waar zijn. Geef ook telkens een vlotte, korte equivalente Nederlandse zin.

1. Juist | Fout $\forall n \in \mathbb{N}_0, \exists m \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

2. Juist | Fout $\exists m \in \mathbb{N}_0, \forall n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

3. Juist | Fout $\forall m \in \mathbb{N}_0, \exists n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

4. Juist | Fout $\exists n \in \mathbb{N}_0, \forall m \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

5. Juist | Fout $\forall m, n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

6. Juist | Fout $\exists m, n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

7. Juist | Fout $\exists n \in \mathbb{N} : \big(n > 1 \wedge \forall m_1, m_2 \in \mathbb{N} : \big(m_1 > 1 \wedge m_2 > 1\big) \Rightarrow m_1 \cdot m_2 \neq n\big)$

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Kwantoren

Oefening 2.4.4.

Onderzoek of volgende uitspraken waar of onwaar zijn.

(a) | Juist | Fout | $\forall m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(b) | Juist | Fout | $\exists m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(c) | Juist | Fout | $\forall m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(d) | Juist | Fout | $\exists m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(e) | Juist | Fout | $\forall n \in \mathbb{Z} : \exists m \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(f) | Juist | Fout | $\exists n \in \mathbb{Z} : \forall m \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

Oefening 2.4.5.

Geef telkens een wiskundige formule met dezelfde betekenis als de zin. Zijn de uitspraken waar of onwaar? (Er zijn soms andere formuleringen dan de gegeven oplossing mogelijk.)

1. Er bestaan twee gehele getallen zodat het eerste groter is dan het tweede.

2. Er bestaan twee gehele getallen zodat beide positief zijn.

3. Voor elk geheel getal bestaat er een groter geheel getal.

4. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een groter natuurlijk getal.

5. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een groter geheel getal.

6. Voor elk geheel getal bestaat er een groter natuurlijk getal.

7. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een kleiner natuurlijk getal.

8. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een kleiner geheel getal.

9. Er bestaat een natuurlijk getal dat groter is dan elk ander natuurlijk getal.

10. Er bestaat een geheel getal dat groter is dan elk geheel getal.

11. Er bestaat een geheel getal dat kleiner is dan elk natuurlijk getal.

12. Er bestaat een positief reëel getal dat kleiner is dan elk strikt positief natuurlijk getal.

13. Voor elke twee natuurlijke getallen geldt dat het eerste groter is dan het tweede of het tweede groter dan het eerste.

14. Voor elke twee verschillende natuurlijke getallen geldt dat het eerste groter is dan het tweede of het tweede groter dan het eerste.

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Bewijstechnieken

2.5.1 Verschillende types eigenschappen

Wiskundige eigenschappen en stellingen worden op allerlei verschillende manieren geformuleerd. We sommen hier enkele mogelijkheden op, telkens met een kort voorbeeld.

(a) **Een *universele* uitspraak**: $\forall a \in A : p(a)$

Voorbeeld 2.5.1. 'Voor elk reëel getal x is x^2 positief. '

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$$

In een universele uitspraak $\forall a \in A : p(a)$ kan het predicaat $p(a)$ ook de vorm aannemen van een implicatie of een equivalentie.

Voorbeeld 2.5.2.

1. 'Voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n een viervoud is, dan is n even.'

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ is een viervoud} \Rightarrow n \text{ is even}$$

2. 'Voor elk reëel getal x geldt dat x positief is als en slechts als x gelijk is aan zijn absolute waarde. '

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$$

(b) **Een *existentiële* uitspraak**: $\exists a \in A : p(a)$

Voorbeeld 2.5.3. 'Er bestaan strikt positieve natuurlijke getallen zodat de som van hun kwadraten terug een kwadraat is.'

$$\exists x, y, z \in \mathbb{N}_0 : x^2 + y^2 = z^2$$

(c) **De negatie van een existentiële uitspraak**: $\neg(\exists a \in A : p(a))$:

Voorbeeld 2.5.4. 'Er bestaan geen gehele getallen n en m zodat $8n - 6m = 101$. '

$$\neg(\exists n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m = 101)$$

(d) **De negatie van een universele uitspraak**: $\neg(\forall a \in A : p(a))$:

Voorbeeld 2.5.5. 'Niet alle priemgetallen zijn oneven.'

Merk op dat deze uitspraak niet equivalent is met 'Alle priemgetallen zijn even. '

2.5.2 Soorten bewijzen

Een wiskundig bewijs is een logische redenering die de waarheid van een uitspraak aantoont. Een bewijs is niet uniek, uitspraken kunnen op meerdere manieren aangetoond worden. Naast de verschillende types eigenschappen, zijn er ook verschillende types bewijzen. We bespreken er enkele.

We veronderstellen dat volgende basiseigenschappen gekend zijn zodat we deze kunnen gebruiken in de voorbeeld-bewijzen:

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Bewijstechnieken

Eigenschap 2.5.1 (De orde $\leq$ in $\mathbb{R}$)**.**

(o1) Voor alle reële getallen a, b en c geldt

$$a < b \Rightarrow (a + c < b + c)$$

(o2) Voor alle reële getallen a, b en c geldt

$$(a < b \wedge c > 0) \Rightarrow ac < bc$$

$$(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow ac > bc$$

(o3) Voor alle reële getallen a, b en c geldt

$$(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c.$$

Deze laatste eigenschap heet de **transitiviteit** van de ordening.

2.5.2.1 Bewijs per generiek element

Dit type bewijs wordt gebruikt om een universele uitspraak $\forall a \in A : p(a)$ te bewijzen. Om te bewijzen dat iets geldt *voor alle elementen* van een verzameling, volstaat het te bewijzen dat het geldt voor *elk willekeurig element* van die verzameling.

Om een universele uitspraak te bewijzen beginnen we het bewijs met de uitdrukking "Kies a in A *willekeurig*." en daarna volgt een redenering die $p(a)$ aantoont. Het is belangrijk dat in die redenering de beschouwde a ook willekeurig blijft, wat betekent dat we over a geen veronderstellingen maken. Als wie iets moeten bewijzen $\forall a \in \mathbb{R}$, mogen we (natuurlijk) niet aannemen dat a positief is, of $a > 1$. Je mag wel gebruikmaken van gevalsonderscheid, waarbij je het bewijs geeft voor verschillende gevallen: bijvoorbeeld eerst voor $a > 0$ en daarna voor $a \leq 0$. Als de uitspraak in beide gevallen bewezen kan worden, is de volledige uitspraak bewezen.

Voorbeeld 2.5.6. Bewijs dat $\forall a \in \mathbb{R}_0 : a^2 > 0$

Bewijs Kies $a \in \mathbb{R}_0$ willekeurig, dus $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$. Dan geldt dat ofwel $a < 0$ ofwel $a > 0$.

In het geval dat $a > 0$ volgt door beide leden van de ongelijkheid $a > 0$ met het strikt positieve getal a te vermenigvuldigen dat $a^2 > 0$ (eig (o2)).

In het geval dat $a < 0$ volgt ook door beide leden van de ongelijkheid $a < 0$ met het strikt negatieve getal a te vermenigvuldigen dat $a^2 > 0$ (eig (o2)).

In beide gevallen volgt dus dat $a^2 > 0$. Omdat $a \in \mathbb{R}_0$ willekeurig gekozen was, bewijst dit de eigenschap. ■

Opmerking 2.5.1. Wegens de equivalentie $\neg(\exists x \in X : p(x)) \iff \forall x \in X : \neg p(x)$ kan je ook voor de negatie van een existentiële uitspraak een bewijs geven per generiek element.

2.5.2.2 Bewijs per voorbeeld

Om een existentiële uitspraak $\exists a \in A : p(a)$ te bewijzen, moeten we een $a \in A$ geven waarvoor $p(a)$ geldt.

Als je moet bewijzen dat er zwarte zwanen bestaan, volstaat het een zwarte zwaan te vinden. Inderdaad, als je één zwarte zwaan effectief kan vinden, dan is het zeker dat er bestaan.

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 2.5.7.

1. Bewijs dat $\exists n \in \mathbb{Z} : n^2 = 9$.

Bewijs Merk op dat $3 \in \mathbb{Z}$ en $3^2 = 9$. Dus (minstens) voor $n = 3$ geldt dat $n^2 = 9$. ■

Het gegeven voorbeeld is niet noodzakelijk uniek. Hier kan je ook -3 kiezen natuurlijk.

2. Bewijs dat $\exists x, y, z \in \mathbb{N}_0 : x^2 + y^2 = z^2$

Bewijs Neem $x = 3$ en $y = 4$, dan is $x^2 + y^2 = 9 + 16 = 25$. Als we $z = 5$ nemen geldt dus dat $x^2 + y^2 = z^2$. ■

Merk wel op dat je soms ook kan aantonen dat iets moet bestaan *zonder* het ook effectief te construeren of te vinden.

2.5.2.3 Bewijs per tegenvoorbeeld

Wegens de equivalentie $\neg(\forall x \in X : p(x)) \iff \exists x \in X : \neg p(x)$, kan je voor de negatie van een universele uitspraak een bewijs geven per voorbeeld, het volstaat immers om een voorbeeld te geven waarvoor $p(x)$ niet opgaat. In dit geval wordt zo'n voorbeeld een **tegenvoorbeeld** genoemd.

Voorbeeld 2.5.8. Bewijs dat niet alle priemgetallen oneven zijn.

Bewijs We moeten dus bewijzen dat er een priemgetal bestaat dat even is. Het getal 2 is een tegenvoorbeeld, want 2 is een priemgetal en 2 is even. ■

Oefening 2.5.1. Zijn volgende uitspraken waar of onwaar? Geef een bewijs.

1. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0$.

2. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0$.

3. $\neg(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 = 0)$.

4. $\exists x \in \mathbb{C} : x^2 + 4 = 0$.

2.5.2.4 Bewijs uit het ongerijmde

Bij een **bewijs uit het ongerijmde** nemen we aan dat het te bewijzen *niet* waar is, en leiden daaruit een contradictie af. Een uitspraak is ofwel waar ofwel niet waar. Als de aanname dat ze niet waar is leidt tot een contradictie, dan moet de uitspraak dus noodzakelijk *waar* zijn. Een typische contradictie is $p \wedge \neg p$, namelijk dat zowel p als $\neg p$ waar zijn.

Voorbeeld 2.5.9. Bewijs dat er geen gehele getallen n en m bestaan zodat $8n - 6m = 101$.

Om $\neg(\exists n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m = 101)$ te bewijzen nemen we dus aan dat dit te bewijzen niet waar is, we nemen dus aan dat er wel gehele getallen n en m bestaan zodat $8n - 6m = 101$ en leiden daar een contradictie uit af.

Bewijs Bewijs uit het ongerijmde: Veronderstel dat n en m gehele getallen zijn waarvoor geldt dat $8n - 6m = 101$. Omdat $8n - 6m = 2(4n - 3m)$ is $8n - 6m$ een veelvoud van 2, dus even. We hebben verondersteld dat $8n - 6m = 101$ dus is 101 ook even. Maar 101 is duidelijk oneven, zodat we een tegenspraak hebben. Uit deze tegenspraak volgt dat er geen gehele getallen n en m bestaan

CC BY-NC-SA 4.0

met $8n - 6m = 101$. ■

Om deze uitspraak te bewijzen hoef je geen bewijs uit het ongerijmde te gebruiken, je kan het bewijs ook anders formuleren. We moeten hier de negatie van een existentiële uitspraak bewijzen, dus we kunnen ook een bewijs geven per generiek element. We gebruiken dat

$$\neg(\exists n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m = 101) \Leftrightarrow \forall n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m \neq 101.$$

Bewijs Kies n en m twee willekeurige gehele getallen. Dan is $8n - 6m = 2(4n - 3m)$ een veelvoud van 2, dus even. Omdat 101 oneven is, kan $8n - 6m$ niet gelijk zijn aan 101. ■

2.5.2.5 Het bewijzen van implicaties

Om een uitspraak van de vorm $\forall a \in A : p(a) \Rightarrow q(a)$ te bewijzen beginnen we met "Kies a in A willekeurig." Daarna moeten we voor deze a de implicatie $p(a) \Rightarrow q(a)$ bewijzen. We overlopen hiervoor enkele mogelijkheden:

- **Direct bewijs**

  Om een implicatie $p \Rightarrow q$ te bewijzen vertrekken we van het gegeven p, en redeneren of rekenen we tot we bij het te bewijzen q uitkomen.

  Voorbeeld 2.5.10. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n een viervoud is, dan is n even.

  Bewijs Kies n een willekeurig natuurlijk getal en veronderstel dat n een viervoud is. Dan bestaat er een $m \in \mathbb{N}$ zodat $n = 4m$. Bijgevolg is $n = 2 \cdot 2m$. Stel $k = 2m$. Dan is $n = 2k$, wat betekent dat n even is. ■

- **Bewijs door contrapositie**

  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ is een tautologie. De implicatie $p \Rightarrow q$ is dus equivalent met haar *contrapositie* $\neg q \Rightarrow \neg p$. In plaats van $p \Rightarrow q$ te bewijzen, kunnen we dus evengoed de implicatie $\neg q \Rightarrow \neg p$ bewijzen. Soms is dat eenvoudiger.

  Voorbeeld 2.5.11. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n^2 even is, dan is n ook even.

  Bewijs We tonen deze eigenschap aan door middel van contrapositie. We tonen dus aan dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n oneven is, dan n^2 ook oneven is. Neem een willekeurig natuurlijk getal n dat oneven is. Dan bestaat er een $m \in \mathbb{N}$ zodat $n = 2m + 1$. Bijgevolg is $n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$. Stel $k = 2m^2 + 2m$, dan is $n^2 = 2k + 1$ en bijgevolg is n^2 oneven. ■

  Door middel van contrapositie is dit een eenvoudig bewijs, de eigenschap bewijzen met een direct bewijs zou dit een hele uitdaging zijn.

- **Bewijs uit het ongerijmde**

  Om een uitspraak van de vorm

  $$\forall a \in A : p(a) \Rightarrow q(a)$$

  uit het ongerijmde te bewijzen nemen we aan dat de negatie hiervan, namelijk

  $$\exists a \in A : \neg(p(a) \Rightarrow q(a))$$

2.5 Bewijstechnieken

waar is en leiden hieruit een contradictie af. Omdat $\neg(p(a) \Rightarrow q(a))$ equivalent is met $p(a) \wedge \neg q(a)$, nemen we in het bewijs dus aan dat er een $a \in A$ bestaat waarvoor $p(a)$ waar is en $q(a)$ niet waar is en leiden hieruit een contradictie af.

Voorbeeld 2.5.12. Bewijs dat voor alle reële getallen x, y en a geldt: als $x > y$ en $ax \leq ay$ dan is $a \leq 0$.

Merk op dat we hier iets moeten bewijzen over 3 elementen uit $\mathbb{R}$.

Bewijs Bewijs uit het ongerijmde: Veronderstel dat x, y en a reële getallen zijn waarvoor geldt dat $x > y$ en $ax \leq ay$ (p waar) en $a > 0$ (q niet waar). Dan volgt uit $x > y$ en het feit dat a strikt positief is dat $ax > ay$, hetgeen in tegenspraak is met de onderstelling dat $ax \leq ay$. We vinden dus een contradictie. ■

Als laatste voorbeeld geven we nog een voorbeeld van een direct bewijs. We schrijven het bewijs niet meteen op, maar maken het proces van het zoeken naar welke stappen gezet moeten worden in het bewijs om die daarna met een leesbare redenering op te schrijven expliciet.

Voorbeeld 2.5.13. Bewijs dat voor alle strikt positieve reële getallen a en b geldt: $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.

Uitwerking: We kiezen twee willekeurige strikt positieve getallen a en b, zodat $a < b$.

Omdat we iets willen weten over a^2 en b^2, lijkt een mogelijkheid om de gegeven ongelijkheid $a < b$ met a of b te vermenigvuldigen. Omdat a en b strikt positief zijn blijven de ongelijkheden behouden wegens eigenschap (o2) over de orde in $\mathbb{R}$ zodat

$$a < b \Rightarrow a^2 < ab \tag{1}$$

en

$$a < b \Rightarrow ab < b^2. \tag{2}$$

Omdat gegeven is dat $a < b$ volgt dus dat $a^2 < ab$ en $ab < b^2$. Deze twee ongelijkheden bevatten beide ab zodat uit eigenschap (o3) volgt

$$(a^2 < ab) \text{ en } (ab < b^2) \;\Rightarrow\; a^2 < b^2. \tag{3}$$

Op deze manier hebben we een correcte *redenering gevonden*, nu moeten we die redenering ook nog duidelijke en correct *opschrijven*. Een enigszins dubieuze poging gaat als volgt:

Bewijs

$$\begin{array}{c} a < b \\ \Downarrow\ a > 0 \quad b > 0 \qquad \text{eig. (o2)} \\ a^2 < ab \quad \text{en} \quad ab < b^2 \\ \Downarrow \text{ transitiviteit eig. (o3)} \\ (a^2 < ab) \wedge (ab < b^2) \;\Rightarrow\; a^2 < b^2 \end{array}$$

■

Dit is geen goed geschreven bewijs! Enkel voor wie het bewijs al kent, is duidelijk wat er wordt bedoeld. Deze versie is hoogstens bruikbaar als schets om het bewijs te visualiseren.

Nog dubieuzer is volgend 'bewijs':

Bewijs $a < b \Rightarrow (a^2 < ab \wedge ab < b^2) \Rightarrow a^2 < b^2$. ■

Een correct en volledig bewijs is een leesbare opeenvolging van Nederlandse zinnen, met woorden zoals 'hieruit volgt', 'dus' en 'omdat' die aangeven hoe de verschillende zinnen met elkaar samenhangen. Er mogen natuurlijk wiskundige symbolen worden gebruikt, maar het geheel is een leesbaar verhaal.

Een beter bewijs van de eigenschap ziet er bijvoorbeeld zo uit:

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Bewijstechnieken

Bewijs Kies twee willekeurige strikt positieve reële getallen zodat $a < b$. We moeten bewijzen dat $a^2 < b^2$.

Omdat a strikt positief is, kunnen we in $a < b$ linkerlid en rechterlid vermenigvuldigen met a en geldt wegens eigenschap (o2) dat $a^2 < ab$.

Omdat b strikt positief is, kunnen we $a < b$ vermenigvuldigen met b en geldt opnieuw wegens eigenschap (o2) dat $ab < b^2$

Wegens de transitiviteit van de ordening (eigenschap (o3)) volgt uit $a^2 < ab$ en $ab < b^2$ dat inderdaad $a^2 < b^2$. ■

2.5.2.6 Het bewijzen van equivalenties

Omdat $p \Leftrightarrow q$ equivalent is met $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$ kunnen we een equivalentie bewijzen door beide implicaties te bewijzen.

Voorbeeld 2.5.14. Bewijs dat $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$

Bewijs Kies $x \in \mathbb{R}$ willekeurig.

- We tonen aan dat $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$:

  Dit volgt rechtstreeks uit de definitie van absolute waarde.

- We tonen aan dat $|x| = x \Rightarrow x \geq 0$:

  We tonen deze implicatie aan door middel van contrapositie. Uit $x < 0$ volgt per definitie dat $|x| = -x$ en ook dat $-x \neq x$. Uit $x < 0$ volgt dus dat $|x|$ niet gelijk is aan x.

■

2.5.2.7 Het bewijzen van de gelijkheid tussen verzamelingen

Zij A en B verzamelingen. Er geldt

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ en } B \subset A$$

Een gelijkheid $A = B$ van verzamelingen bewijzen we door zowel $A \subset B$ als $B \subset A$ aan te tonen. Om bijvoorbeeld $A \subset B$ aan te tonen nemen we een willekeurig element uit A en tonen we aan dat dit element ook in B zit.

Voorbeeld 2.5.15. Bewijs dat voor elke verzameling A geldt $(A^c)^c = A$.

Bewijs

Kies een willekeurige verzameling A.

We bewijzen eerst dat $(A^c)^c \subset A$:

Neem een $x \in (A^c)^c$ willekeurig. Dan is $x \notin A^c$. Hieruit volgt dat $x \in A$.

We bewijzen nu dat $A \subset (A^c)^c$:

Neem een $x \in A$. Noteer $B = A^c$. Dan is $x \notin A^c$, of nog $x \notin B$. Dus is $x \in B^c = (A^c)^c$.

Uit $(A^c)^c \subset A$ en $A \subset (A^c)^c$ volgt dat $(A^c)^c = A$. ■

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 3
Elementair Rekenen

(Versie 2026/11/23H.2)

3.1 Begintest Elementair rekenen

Indien je deze oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je Elementair Rekenen verder overslaan, anders herhaal je best grondig de rekenregels.

Oefening 3.1.1. Vul aan:

1. $(p+1)^2 + \frac{(p+1)^3}{2} + \frac{(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)^2}{2} \cdot [\ldots\ldots]$

Oefening 3.1.2. Ontbind in factoren.

1. $81x^2y^2 - 25 = \ldots\ldots$

Oefening 3.1.3. Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Je mag veronderstellen dat een uitdrukking die in de noemer staat steeds verschilt van 0.

1. $\dfrac{\frac{a-b}{b}}{1-\frac{a}{b}} = \ldots\ldots$

2. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} = \ldots\ldots$

3. $y^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2y}}{xy}\right)^4 = \ldots\ldots$

4. $\dfrac{-1}{1-\dfrac{x+1}{x}} = \ldots\ldots$

Oefening 3.1.4.

1. $|\sqrt{2}-2| = 2-\sqrt{2}$

Oefening 3.1.5.

1. Als 20% van x gelijk is aan 30, dan is $x = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Haakjes en ontbinden in factoren

Optellen $(2+3)$ en vermenigvuldigen $(2\cdot 3)$ zijn de twee basisoperaties met getallen. Bij combinaties zoals $2+3\cdot 5$ wordt om historische redenen eerst vermenigvuldigd en dan opgeteld, dus $2+3\cdot 5 = 2+(3\cdot 5) = 2+15 = 17$. Als je de andere volgorde wil *moet* je haakjes zetten: $(2+3)\cdot 5 = 5\cdot 5 = 25$.

Zeker zodra er ook met letters wordt gerekend, wordt het belangrijk om van sommen producten te kunnen maken, of omgekeerd van producten sommen te kunnen maken:

$2\cdot(a+3) = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2a+6$ product van 2 en $a+3$ wordt som van $2a$ en 6
$2\cdot a+6 = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2\cdot(a+3)$ som van $2a$ en 6 wordt product van 2 en $a+3$

Uitwerken van haakjes betekent *producten* herschrijven als *sommen*, zoals $2(a+b) = 2a+2b$.
Ontbinden in factoren betekent een *som* (of getal) herschrijven als een *product*, zoals $2a^2+6a = 2a(a+3)$.

Voor 'haakjes uitwerken' en 'ontbinden' gelden dezelfde regels, maar ze moeten telkens in de andere richting worden gelezen. Van links naar rechts zeggen ze hoe je een product (of een macht, dat is ook een product) schrijft als een som, maar van rechts naar links gelezen zeggen ze hoe je een som schrijft als een product.

Eigenschap 3.2.1. Zij $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(a+b)c &= ac+bc && \text{(distributiviteit van } \cdot \text{ t.o.v. } +)\\
a(c+d) &= ac+ad && \text{(idem, maar met som rechts)}\\
(a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd && \text{(want gelijk aan } (a+b)c+(a+b)d)\\
-(a+b) &= -a-b && \text{(want } (-1)(a+b) = (-1)a+(-1)b)\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 && \text{(kwadraat van een tweeterm)}\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 && \text{(kwadraat van tweeterm via } (a+(-b))^2)\\
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2 && \text{(verschil van twee kwadraten)}
\end{aligned}$$

Voor hogere machten gelden volgende formules:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 && \text{(derdemacht van een tweeterm)}\\
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k && \text{(Binomium van Newton)}\\
a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2) && \text{(som van derdemachten)}\\
a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) && \text{(verschil van derdemachten)}\\
a^n-b^n &= (a-b)(a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+\cdots+b^{n-2}a+b^{n-1}) && \text{(verschil van } n^{\text{de}} \text{ machten)}\\
a^n+b^n &= (a+b)(a^{n-1}-ba^{n-2}+b^2a^{n-3}-\cdots-b^{n-2}a+b^{n-1}) && \text{(som } n^{\text{de}} \text{ machten, } n \textbf{ oneven})
\end{aligned}$$

Opmerking 3.2.1.

Het Binomium van Newton staat hier enkel als referentie, het wordt verder nog uitgelegd.

Voorbeeld 3.2.1. Vereenvoudig door de haakjes uit te werken. $(x,y,p,q \in \mathbb{R})$

1. $1-(x-y-1) = -x+y+2$

Uitwerking: $1-(x-y-1) = 1-x+y+1 = -x+y+2$

2. $1-(p-q)+p = q+1$

Uitwerking: $1-(p-q)+p = 1-p+q+p = q+1$

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Haakjes en ontbinden in factoren

Voorbeeld 3.2.2. Werk de haakjes uit: $(x, y \in \mathbb{R})$

1. $(x+y)(x+3y)^2 = x^3+7x^2y+15xy^2+9y^3$

Uitwerking: $(x+y)(x+3y)^2 = (x+y)(x^2+6xy+9y^2) = x^3+6x^2y+9xy^2+yx^2+6xy^2+9y^3 = x^3+7x^2y+15xy^2+9y^3$

Voorbeeld 3.2.3. Vul aan door de voorgestelde factor buiten de haakjes te brengen, en vereenvoudig zo ver mogelijk. $(p, r, s, x \in \mathbb{R})$

1. $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot \left(4p+5\right)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4(p+1)) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4p + 4) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (4p+5)\,.
\end{aligned}$$

2. $(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) = \frac{4r}{3} \cdot (5)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) &= \frac{4r}{3} \cdot (3p+2) - \frac{4r}{3} \cdot 3 \cdot (p-1) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3 \cdot (p-1)) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3p + 3) \\
&= \frac{4r}{3} \cdot 5.
\end{aligned}$$

3. $\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 = \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 &= \frac{xs}{8} \cdot 1 + \frac{xs}{8} \cdot 2s + \frac{xs}{8} \cdot 24x^2s^2 \\
&= \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2).
\end{aligned}$$

Voorbeeld 3.2.4. Ontbind in factoren. $(x, y, r \in \mathbb{R})$

1. $81x^2y^2 - 25 = (9xy+5)(9xy-5)$

Uitwerking: $81x^2y^2 - 25 = (9xy)^2 - 5^2 = (9xy+5)(9xy-5)$ (verschil van twee kwadraten)

CC BY-NC-SA 4.0

3.2.A Oefeningen haakjes

3.2.A.1 Niveau 1

Oefening 3.2.1. Vereenvoudig. $(x, y, p, q \in \mathbb{R})$

1. $23 \cdot (1000 - 1) = \ldots\ldots$
2. $(923 + 77)/4 = \ldots\ldots$
3. $-\dfrac{2x + 4xy}{-2x} = \ldots\ldots$
4. $p - (p + q) + 2q = \ldots\ldots$

Oefening 3.2.2. Werk de haakjes uit en vereenvoudig. $(x, y, a \in \mathbb{R})$

1. $a(x + 3) - 3a = \ldots\ldots$
2. $ax + 3 + (-ax) = \ldots\ldots$
3. $2ax + 3 - (-ax) = \ldots\ldots$
4. $1 - (x - y + 1) + x = \ldots\ldots$

Oefening 3.2.3. Werk de haakjes uit. $(a \in \mathbb{R})$

1. $2(a + 3)^2 = \ldots\ldots$
2. $2(a - 3)^2 = \ldots\ldots$
3. $2(-a - 3)^2 = \ldots\ldots$

Oefening 3.2.4. Ontbind in factoren. $(x, y, a \in \mathbb{R})$

1. $x(x + 2) + 7(x + 2) = \ldots\ldots$
2. $3y(4y - 3) - 4x(4y - 3) = \ldots\ldots$
3. $(a + 1)(x + 1) - (2a - 4)(x + 1) = \ldots\ldots$
4. $5(x + 1) - (x + 1)^2 = \ldots\ldots$

3.2.A.2 Niveau 2

CC BY-NC-SA 4.0

3.2.A Oefeningen haakjes

Oefening 3.2.5. Ontbind in factoren. $(a, b, c, d, x, y, p, q \in \mathbb{R})$

1. $18x + 24y + 30z = \ldots\ldots$
2. $20ab^3 + 30bc + 25b^2c^3\sqrt{d} = \ldots\ldots$
3. $-9x^2y - 3xy = \ldots\ldots$
4. $\frac{p^2q^3}{8} - \frac{p^2q}{2} + pq = \ldots\ldots$
5. $a - b - 3(a - b) = \ldots\ldots$
6. $xy - yz - xt + zt = \ldots\ldots$

Oefening 3.2.6. Ontbind in factoren of vul aan. $(u, s, t \in \mathbb{R})$

1. $24st + 12t - 60ut = \ldots\ldots$
2. $\frac{st^2}{8} + \frac{s^2t^2}{12} + s^2t = \ldots\ldots$
3. $st + s + ut + u = \ldots\ldots$
4. $(2t - 2)(5t + 3) - (t - 1)(4t - 1) = \ldots\ldots$
5. $\frac{2s + 3}{2} + (2s + 3)^2 = \frac{2s + 3}{2} \cdot (\ldots\ldots)$
6. $\left(\frac{5s}{8}\right)(u - 1) - 5s(3u + 1) = \left(\frac{5s}{8}\right) \cdot (\ldots\ldots)$

Oefening 3.2.7. Ontbind in factoren. $(x, y \in \mathbb{R})$

1. $x^3 - 1 = \ldots\ldots$
2. $25x^2y^4 - 64 = \ldots\ldots$
3. $4x^2 + 24xy + 36y^2 = \ldots\ldots$
4. $x^2 - y^2 + 1 - 2x = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Breuken

Definitie 3.3.1 (Definitie breuken).

Een **breuk** is een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $b \neq 0$.
We noemen a de **teller**, b de **noemer** en de streep tussen beide getallen de **breukstreep**.

Voor reële getallen a, b, c, d met $b \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

We noemen $-\frac{a}{b}$ de **tegengestelde breuk** van $\frac{a}{b}$.

Als $a \neq 0$ en $b \neq 0$ noemen we $\frac{b}{a}$ de **omgekeerde breuk** van $\frac{a}{b}$.

Een *breuk* is dus per definitie een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$ met $a, b \in \mathbb{R}$, met $b \neq 0$. Wanneer a en b concrete getallen zijn, bijvoorbeeld de breuk $\frac{3}{4}$, dan kunnen we de breuk omzetten naar een kommagetal: $\frac{3}{4} = 0.75$. We zullen hier echter voornamelijk werken met breuken met letters, zoals $\frac{a-b}{x}, \frac{x^2y}{y^3}, \ldots$, met $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ en $x \neq 0,\ y \neq 0$.

Bij de notatie van de tegengestelde breuk van $\frac{a}{b}$ mag je kiezen of je het minteken in de teller, de noemer of voor de gehele breuk plaatst.

Eigenschap 3.3.1 (Mintekens).

Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

Voorbeeld 3.3.1 (Mintekens).

1. $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$
2. Voor $b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 1$ geldt: $-\frac{b+1}{1-b} = \frac{-(b+1)}{1-b} = \frac{-b-1}{1-b} = \frac{b+1}{b-1}$

Waarschuwing 3.3.1 (Veelgemaakte fouten).

Gebruik **haakjes** om een minteken voor een teller of een noemer te plaatsen. Bijvoorbeeld ($a \in \mathbb{R}$):

$$-\frac{a+5}{7} = \frac{-(a+5)}{7} = \frac{-a-5}{7} = \frac{a+5}{-7}.$$

Een vaak gemaakte fout is het minteken enkel voor één term te plaatsen $-\frac{a+5}{7} \neq \frac{-a+5}{7}$.

Omgekeerd geldt ook dat als er één term in de teller een minteken heeft, je dat minteken niet zonder meer voor de hele breuk mag plaatsen ($b \in \mathbb{R}$): $\frac{-2+b}{4} \neq -\frac{2+b}{4}$. Wel geldt dat

$$\frac{-2+b}{4} = \frac{-(2-b)}{4} = -\frac{2-b}{4}$$

Deze opmerkingen gelden evenzeer voor mintekens in de noemer.

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Breuken

Oefening 3.3.1. Voor $x \in \mathbb{R}$ met $x \neq 1$ geldt: $-\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{x-1}$

Eigenschap 3.3.2. Voor $a, b, k \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt

$$k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{b} \qquad \text{(getal maal breuk)}$$

$$\frac{k \cdot a}{b} = k \cdot \frac{a}{b} \qquad \text{(factor uit teller halen)}$$

Voorbeeld 3.3.2 (Getal maal breuk)**.** $(a, b \in \mathbb{R})$

1. $7 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3}$
2. $3 \cdot \dfrac{a+5}{7} = \dfrac{3(a+5)}{7} = \dfrac{3a+15}{7}$
3. $\dfrac{-10+5b}{4} = \dfrac{5(-2+b)}{4} = 5 \cdot \dfrac{-2+b}{4}$

Je kan breuken soms **vereenvoudigen** door de teller en de noemer beide te delen door eenzelfde factor, op voorwaarde dat deze factor verschillend is van nul. Meestal wordt in een oefening verwacht dat je een breuk zo eenvoudig mogelijk noteert. Je mag teller en noemer van een breuk ook vermenigvuldigen met eenzelfde factor verschillend van nul. Dit is nuttig om twee breuken op dezelfde noemer zetten.

Eigenschap 3.3.3. Voor $a, b, k \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ en $k \neq 0$ geldt

$$\frac{k \cdot a}{k \cdot b} = \frac{\cancel{k} \cdot a}{\cancel{k} \cdot b} = \frac{a}{b} \qquad \text{(gemeenschappelijke factor } k \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} \qquad \text{(met factor } k \text{ vermenigvuldigen)}$$

Voorbeeld 3.3.3 (Vereenvoudigen)**.**

1. $\dfrac{10}{15} = \dfrac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \dfrac{2}{3}$
2. $\dfrac{2x}{4} = \dfrac{2 \cdot x}{2 \cdot 2} = \dfrac{x}{2}$
3. Voor $x, y \in \mathbb{R}$ met $y \neq 0$ geldt: $\dfrac{x^2 y}{y^3} = \dfrac{y \cdot x^2}{y \cdot y^2} = \dfrac{x^2}{y^2}$
4. Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$, $d \neq 0$ geldt: $\dfrac{ab+ac}{ad} = \dfrac{a(b+c)}{ad} = \dfrac{b+c}{d}$
5. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq b$ geldt: $\dfrac{a^2-b^2}{3a-3b} = \dfrac{(a-b)\cdot(a+b)}{(a-b)\cdot 3} = \dfrac{a+b}{3}$

Waarschuwing 3.3.2 (Veelgemaakte fouten)**.**

Voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -1$ kunnen we $\dfrac{a+3}{a+1}$ niet vereenvoudigen, wegens geen gemeen-

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Breuken

schappelijke factor in teller en noemer.

$$\frac{a+3}{a+1} \neq \frac{0+3}{0+1}$$
$$\frac{a+3}{a+1} \neq \frac{1+3}{1+1}$$

De eerste gelijkheid geldt wel voor $a = 0$ en de tweede voor $a = 1$, maar de gelijkheden gelden niet voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -1$.

Voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -\frac{1}{2}$ kunnen we $\frac{2a}{2a+1}$ niet vereenvoudigen:

$$\frac{2a}{2a+1} \neq \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}a+1} = \frac{a}{a+1}.$$

Indien we toch de factor 2 willen weg delen in teller en noemer gebruiken we haakjes:

$$\frac{2a}{2a+1} = \frac{2a}{2\left(a+\frac{1}{2}\right)} = \frac{a}{a+\frac{1}{2}}.$$

Oefening 3.3.2. Vereenvoudig $(p, q \in \mathbb{R}, p \neq q)$.

1. $\frac{p^2-q^2}{p-q} = \ldots\ldots$

Breuken met gelijke noemer kan je **optellen** door de tellers op te tellen. Breuken optellen is dus een som van breuken schrijven als één breuk. Omgekeerd, als de teller van een breuk een som is, kan je de breuk splitsen, wat wil zeggen dat je deze schrijft als een som van 2 breuken.

Definitie 3.3.2 (Som van breuken met gelijke noemer en splitsen van breuken)**.**

Voor $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{(breuken optellen, gelijke noemers)}$$
$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \qquad \text{(som in teller splitsen)}$$

Voorbeeld 3.3.4 (Som van breuken met gelijke noemer, splitsen van breuken)**.**

1. $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$

2. Voor $x, y \in \mathbb{R}$ met $y \neq 0$ geldt: $\frac{x-y}{y^2} + \frac{3x+y}{y^2} = \frac{x-y+3x+y}{y^2} = \frac{4x}{y^2}$

3. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq b$ geldt: $\frac{3a+b^2}{a} = \frac{3a}{a} + \frac{b^2}{a} = 3 + \frac{b^2}{a}$

Waarschuwing 3.3.3 (Veelgemaakte fouten)**.**

Als de noemer van een breuk een som is kan je niet meteen de breuk splitsen. Voor een willekeurige $b \in \mathbb{R}$ met $b \neq -3$ kunnen we niet als volgt splitsen:

$$\frac{2}{b+3} \neq \frac{2}{b} + \frac{2}{3}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Breuken

Breuken met verschillende noemer kan je optellen of aftrekken door deze eerst op gelijke noemer te brengen. Je kan als gemeenschappelijke noemer het product van beide noemers nemen.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \quad = \quad \frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd} \quad = \quad \frac{ad+bc}{bd}.$$

Voorbeeld 3.3.5 (Som van breuken met verschillende noemer). $(x, y, a, b \in \mathbb{R}_0)$

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$

2. $\frac{1}{3x}+\frac{2}{y}=\frac{y}{3x\cdot y}+\frac{3x\cdot 2}{3x\cdot y}=\frac{6x+y}{3xy}$

3. $\frac{a+b}{2a}+\frac{a-b}{3b}=\frac{(a+b)3b}{2a\cdot 3b}+\frac{2a(a-b)}{2a\cdot 3b}=\frac{3ab+3b^2}{6ab}+\frac{2a^2-2ab}{6ab}=\frac{2a^2+ab+3b^2}{6ab}$

Oefening 3.3.3.

1. Schrijf $a-\frac{a}{b}$ als één breuk. $(a, b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0)$

Als gemeenschappelijke noemer het product van beide gegeven noemers nemen is altijd een correcte werkwijze, maar vaak niet de meest efficiënte. Ontbind eerst de noemers zo ver mogelijk in factoren. Bij gehele getallen bedoelen we met ontbinden in factoren het geheel getal schrijven als een product van priemfactoren. Als nieuwe noemer kies je dan het kleinste gemene veelvoud van de noemers. Dit kleinste gemene veelvoud vind je door van elke factor die voorkomt in één van de noemers de hoogste macht te nemen die voorkomt en deze te vermenigvuldigen met elkaar.

Voorbeeld 3.3.6 (Som van breuken met verschillende noemer).

Met behulp van het kleinste gemene veelvoud kan de optelling sneller:

1.

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5}{2^2\cdot 3}+\frac{7}{2\cdot 3^2}=\frac{5\cdot 3}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7\cdot 2}{2^2\cdot 3^2}=\frac{15}{36}+\frac{14}{36}=\frac{29}{36} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 18}{12\cdot 18}+\frac{7\cdot 12}{18\cdot 12}=\frac{174}{216}$$

2. Voor $a, b, k, l, m \in \mathbb{R}$ met $k \neq 0$, $l \neq 0$ en $m \neq 0$:

$$\frac{a}{k\cdot l}+\frac{b}{m\cdot l}=\frac{a\cdot m}{k\cdot l\cdot m}+\frac{b\cdot k}{k\cdot l\cdot m}=\frac{a\cdot m+b\cdot k}{k\cdot l\cdot m} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{a}{k\cdot l}+\frac{b}{m\cdot l}=\frac{a\cdot m\cdot l+b\cdot k\cdot l}{k\cdot l\cdot m\cdot l}=\ldots$$

3. Voor $a, b, k, l \in \mathbb{R}$ met $k \neq 0$ en $l \neq 0$:

$$\frac{a}{k^2\cdot l^2}+\frac{b}{k\cdot l^3}=\frac{a\cdot l}{k^2\cdot l^3}+\frac{b\cdot k}{k^2\cdot l^3}=\frac{a\cdot l+b\cdot k}{k^2\cdot l^3}$$

Breuken **vermenigvuldigen of delen** is eenvoudiger dan optellen of aftrekken. Hiervoor hoef je ze niet eerst op gelijke noemer te brengen.

Definitie 3.3.3.

Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$, $c \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Breuken

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a\cdot c}{b\cdot d} \qquad \text{(vermenigvuldiging)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{b\cdot c} \qquad \text{(deling)}$$

Voorbeeld 3.3.7 (Breuken vermenigvuldigen en delen). $(x, y \in \mathbb{R}_0)$

1. $\frac{2x}{3}\cdot\frac{2}{x} = \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$
2. $\frac{\frac{x}{2}}{\frac{3}{y}} = \frac{x}{2}\cdot\frac{y}{3} = \frac{xy}{6}$

Opmerking 3.3.1 (Breuken van breuken).

In de definitie van deling van breuken gebruiken we breuken van breuken. Voor breuken van breuken is de *grootte* van de verschillende breukstrepen en de precieze *plaats* van de symbolen erg belangrijk. Beide breukstrepen mogen niet even groot zijn want dan is de uitdrukking niet ondubbelzinnig. We schrijven voor de leesbaarheid de grootste breukstreep altijd in het midden van de relevante formule. Dus

$$x = \frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}} \quad \text{maar nooit} \quad x = \cancel{\frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}}}\,.$$

Oefening 3.3.4. Schrijf als één breuk en vereenvoudig zo ver mogelijk $(p, q \in \mathbb{R}_0)$.

1. $\frac{\frac{p+qp}{pq^2}}{\frac{p^2}{q}} = \ldots\ldots$

Eigenschap 3.3.4 (Eenvoudige maar belangrijke gevolgen).

Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, met $b \neq 0$, $c \neq 0$ geldt

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c} = \frac{a}{c} \qquad \text{(gelijke noemer } \frac{1}{b} \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c} = \frac{a}{b\cdot c} \qquad \text{(breuk gedeeld door getal is maal in noemer)}$$

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} = a\cdot\frac{d}{c} = \frac{a\cdot d}{c} \qquad \text{(getal gedeeld door breuk is maal omgekeerde)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Breuken

Voorbeeld 3.3.8. Vereenvoudig door met slechts één breukstreep te schrijven.($x, y \in \mathbb{R}_0$)

1. $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \dfrac{x}{y}$

Uitwerking: $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{2}{y} = \dfrac{x}{y}$

2. $\dfrac{x+y}{\frac{x}{y}} = \dfrac{(x+y)y}{x}$

Uitwerking: $\dfrac{x+y}{\frac{x}{y}} = (x+y) \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{(x+y)y}{x}$

3. $\dfrac{\frac{x+y}{x}}{y} = \dfrac{x+y}{xy}$

Uitwerking: $\dfrac{\frac{x+y}{x}}{y} = \dfrac{x+y}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{x+y}{xy}$

Tot slot nog enkele trucjes die in sommige contexten nuttig kunnen zijn.

Eigenschap 3.3.5 (trucjes). ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ en $d \neq 0$)

$$
\begin{aligned}
a + c &= d \cdot \left(\frac{a}{d} + \frac{c}{d}\right) && \text{(niet bestaande factor buiten haakjes brengen)} \\
a &= \frac{a}{1} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken)} \\
b &= \frac{1}{1/b} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken (variant))} \\
a \cdot b &= \frac{a}{1/b} && \text{(van een product een breuk maken)} \\
\frac{a}{b} &= a \cdot \frac{1}{b} && \text{(van een breuk een product maken)}
\end{aligned}
$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.3.A Oefeningen breuken

3.3.A.1 Niveau 1

Oefening 3.3.5. Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1. $20 \cdot (\frac{5}{4} - \frac{4}{5}) = \dots\dots$
2. $-\frac{6}{27} + \frac{27}{1} + \frac{16+14}{9} - \frac{3}{14+13} - 3 \cdot 9 = \dots\dots$
3. $-\frac{(1-a)-2}{a+1} = \dots\dots$ $(a \neq -1)$

3.3.A.2 Niveau 2

Oefening 3.3.6. Schrijf als een zo eenvoudig mogelijke breuk. Stel $a, b, c \in \mathbb{R}_0$.

1. $\frac{a-b}{c} - \frac{a-2b}{2c} = \dots\dots$
2. $\frac{\frac{a-b}{b}}{1-\frac{a}{b}} = \dots\dots$
3. $\frac{1-\frac{a+b}{b}}{\frac{a^2}{b}} = \dots\dots$
4. $a + \frac{a}{1+a} = \dots\dots$
5. $1 + \frac{a}{1+a} = \dots\dots$
6. $1 + \frac{1}{1+a} = \dots\dots$
7. $a + \frac{1}{1+a} = \dots\dots$
8. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}} = \dots\dots$
9. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}} = \dots\dots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Machten

3.4.1 Machten met gehele exponent

Net zoals *vermenigvuldigen* 'herhaald optellen' is: $3 \times 2 \stackrel{\text{def}}{=} 2+2+2$ en $n \times a = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n \text{ termen}}$,

is *machtsverheffen* 'herhaald vermenigvuldigen': $2^3 \stackrel{\text{def}}{=} 2 \cdot 2 \cdot 2$ en $a^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}}$.

Definitie 3.4.1 (Machtsverheffing met reëel grondtal en gehele exponent)**.**
De n-**de macht** van een reëel getal a, met $n \in \mathbb{N}$, genoteerd a^n, is

$$\begin{aligned} a^0 &\stackrel{\text{def}}{=} 1 && \text{als } a \neq 0 \\ a^n &\stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}} && \text{als } n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

We noemen a het **grondtal** en n de **exponent**.
Als a niet nul is, dan definiëren we ook machten met *negatieve* gehele exponenten:

$$a^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}.$$

De uitdrukkingen 0^0 en 0^{-n} zijn *onbepaald* en hebben dus *geen betekenis*.

Oefening 3.4.1. Onmiddellijke gevolgen van de definities:

1. $a^1 = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.
2. $a^0 = 1$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.
3. $0^n = \ldots\ldots$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$, 0^{-n} is niet gedefinieerd voor $n \in \mathbb{N}$.
4. $a^{-1} = \frac{1}{a}$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.

Omdat $a^2 = a \cdot a$ en $a^3 = a \cdot a \cdot a$ volgt ook direct dat

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= (a \cdot a)(a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{2+3} = a^5 \\ (a^2)^3 &= (a \cdot a)^3 = (a \cdot a)(a \cdot a)(a \cdot a) = a^{2 \cdot 3} = a^6 \\ a^3 \cdot b^3 &= (a \cdot a \cdot a)(b \cdot b \cdot b) = (a \cdot b)(a \cdot b)(a \cdot b) = (a \cdot b)^3 \end{aligned}$$

maar een uitdrukking als $a^2 \cdot b^3$ kan je niet schrijven als één macht, wel bijvoorbeeld als $(a \cdot b)^2 \cdot b$:

$$a^2 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot b = (a \cdot b)^2 \cdot b$$

In het algemeen gelden volgende rekenregels:

Eigenschap 3.4.1 (Rekenregels machten)**.**

3.4 Machten

Voor alle $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\begin{aligned} xa^r + ya^r &= (x+y)a^r && \text{(som van } \textit{gelijke} \text{ machten)} \\ a^m a^n &= a^{m+n} && \text{(product van machten met zelfde grondtal)} \\ (ab)^n &= a^n b^n && \text{(macht van product)} \\ (a^m)^n &= a^{mn} && \text{(macht van een macht)} \end{aligned}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \text{als } a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \text{als } b \neq 0$$

Dezelfde regels gelden voor *gehele* $m, n \in \mathbb{Z}$ zolang het grondtal niet nul is bij negatieve exponenten.

Voorbeeld 3.4.1. Bereken volgende machten.

1. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6 = 64$

2. $\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \cdot 9 = \frac{9}{4}$

3.4.2 Machten met rationale exponent

Als we ons beperken tot positieve grondtallen, kunnen we de machtsverheffing eenvoudig verder veralgemenen: we definiëren eerst $a^{\frac{1}{n}}$, dan $a^{\frac{m}{n}} = a^q$, met $q \in \mathbb{Q}$, en tenslotte vermelden we ook a^r, met $r \in \mathbb{R}$.

Definitie 3.4.2 (n-de machtswortel)**.**

Zij $a \in \mathbb{R}^+$ en $n \in \mathbb{N}_0$.

De macht $a^{\frac{1}{n}}$ met grondtal a en exponent $\frac{1}{n}$ wordt gedefinieerd als het uniek positief reëel getal b ($b \in \mathbb{R}^+$) waarvan de n-de macht gelijk is aan a. In symbolen:

$$b = a^{\frac{1}{n}} \iff b^n = a \,.$$

We noemen $a^{\frac{1}{n}}$ de n-**de machtswortel** uit a en noteren ook

$$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{n}} \,.$$

Voor $n = 2$ noteren we $a^{\frac{1}{2}}$ als $\sqrt{a}$ in plaats van $\sqrt[2]{a}$.

We definiëren voor $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$ ook

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \,.$$

Per definitie is $a^{\frac{m}{n}}$ dus de m-de macht van de n-de machtswortel uit a.

De definitie van $a^{\frac{1}{n}}$ is enkel zinvol als een dergelijk positief reëel getal b *bestaat* en *uniek* is. Precies om

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Machten

dat te garanderen moet de definitie voor **even** n beperkt worden tot *positieve* a en b. Inderdaad, voor negatieve a *bestaat* er immers niet altijd een geschikte b: neem bijvoorbeeld $a=-2$, dan bestaat er geen $b\in\mathbb{R}$ zodat $b^2=-2$. Als het getal b niet beperkt wordt tot de *positieve* getallen, dan is dergelijke b niet *uniek*: neem bijvoorbeeld $a=4$, dan voldoen zowel $b=2$ als $b=-2$ aan $b^2=4$.
Voor **oneven** machtswortels stelt dit probleem zich niet: $\sqrt[3]{8}=8^{\frac{1}{3}}=2$ en $\sqrt[3]{-8}=(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$. Dus als n oneven is definieert de formule $b=a^{\frac{1}{n}} \iff b^n=a$ ook n-de machtswortels van *negatieve* getallen.

Definitie 3.4.3 (Uitbreiding definitie n-de machtswortel)**.**

Zij $a\in\mathbb{R}$ en $n\in\mathbb{N}_0$ en n **oneven**.

De macht $a^{\frac{1}{n}}$ met grondtal a en exponent $\dfrac{1}{n}$ wordt gedefinieerd als het uniek reëel getal b waarvan de n-de macht gelijk is aan a. In symbolen:

$$b=a^{\frac{1}{n}} \iff b^n=a\,.$$

Ook voor machten met rationale exponenten blijven bovenstaande rekenregels gelden. Zo gelden bijvoorbeeld volgende rekenregels voor vierkantswortels, met $x\in\mathbb{R}^+, y\in\mathbb{R}_0^+$.

$$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}, \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x}{y}}, \qquad a\sqrt{x}+b\sqrt{x}=(a+b)\sqrt{x}$$

Opmerking 3.4.1.

Onmiddellijke gevolgen van de definities en rekenregels:

- $a^{-\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}=(\sqrt[n]{a})^{-1}$ voor alle $a\in\mathbb{R}_0^+$ en alle $n\in\mathbb{N}_0$
- $\sqrt[n]{a^m}=(a^m)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ voor alle $a\in\mathbb{R}_0^+$, alle $m\in\mathbb{Z}$ en alle $n\in\mathbb{N}_0$
- $\sqrt[n]{a^n}=a^{\frac{n}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a^1=a$ voor alle $a\in\mathbb{R}^+$ en alle $n\in\mathbb{N}_0$

Waarschuwing 3.4.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

- $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$
  want bijvoorbeeld $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ en $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$
- $a^{-2}\neq a^{\frac{1}{2}}$
  want bijvoorbeeld $5^{-2}=\dfrac{1}{5^2}=\dfrac{1}{25}$ en $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$
- $\sqrt{(-3)^2}\neq -3$
  want $\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$. Voor $a\in\mathbb{R}^+$ geldt wel dat $\sqrt{a^2}=a$.

Voorbeeld 3.4.2. Vereenvoudig volgende machten met rationale exponent (met $x\in\mathbb{R}_0^+$).

1. $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt{64}=8^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{8^2}=8^{\frac{1}{3}}\cdot 8=8^{\frac{1}{3}+1}=8^{\frac{4}{3}}=(\sqrt[3]{8})^4=2^4=16$

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Machten

2. $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x} = x^{\frac{3}{4}-1} = x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$

3. $\left(x^3 \cdot \sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 = x^6 \cdot x^{\frac{2}{4}} = x^{6+\frac{1}{2}} = x^{\frac{13}{2}} = \sqrt{x^{13}}$

Oefening 3.4.2. Vereenvoudig (met $x, y \in \mathbb{R}_0^+$):

1. $\dfrac{4}{\sqrt{8}} = \ldots\ldots$

2. $y^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2 y}}{xy}\right)^4 = \ldots\ldots$

3. $\sqrt{48x^9y^4} = \ldots\ldots$

3.4.3 Machten reële exponent

Men kan ook a^r definiëren met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$ (dus uitdrukkingen zoals $2^{\sqrt{3}}$, $\pi^{\sqrt{5}}$ en $\sqrt{7}^{\sqrt{\pi}}$). We geven de definitie hier niet in detail. We zullen later reële exponenten nodig hebben bij het bestuderen van zogenaamde exponentiële functies zoals $x \mapsto 2^x$.

Ook voor machten met reële exponenten blijven de gebruikelijke rekenregels gelden.

CC BY-NC-SA 4.0

3.4.A Oefeningen machten

3.4.A.1 Niveau 1

Oefening 3.4.3. Bereken:

1. $5^2 = \ldots\ldots$
2. $-5^2 = \ldots\ldots$
3. $(-5)^2 = \ldots\ldots$
4. $(2+3)^2 = \ldots\ldots$
5. $2^2 + 3^2 = \ldots\ldots$
6. $(2+3)^2 - (2^2+3^2) = \ldots\ldots$
7. $\sqrt{5^2} = \ldots\ldots$
8. $\sqrt{(-5)^2} = \ldots\ldots$

Oefening 3.4.4. Bereken

1. $2^2 \cdot 2^3 = 2^{\cdots\cdots}$
2. $(2^2)^3 = 2^{\cdots\cdots}$
3. $2^{(2^3)} = 2^{\cdots\cdots}$
4. $\dfrac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^{\cdots\cdots}$
5. $1302^5 \cdot 2^5 = \ldots\ldots^5$

3.4.A.2 Niveau 2

Oefening 3.4.5. Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Stel $x, y, a, b \in \mathbb{R}_0^+$.

1. $\dfrac{\sqrt{a}}{a^5} = \ldots\ldots$
2. $\left(x^6 y^8\right)^{-1/2} = \ldots\ldots$
3. $a^4 b \left(\dfrac{\sqrt{a^2 b^4}}{ab}\right)^3 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.4.B Herhalingsoefeningen breuken, haakjes, machten

Oefening 3.4.6. Vul aan. Je mag veronderstellen dat een uitdrukking die in de noemer staat steeds verschilt van 0.

1. $\frac{4x^2}{5} - 3x = 4x \cdot [\dots\dots]$

2. $(p+1)^2 + \frac{(p+1)^3}{2} + \frac{(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)^2}{2} \cdot [\dots\dots]$

3. $\frac{(m+n)}{2} \cdot \frac{m^2}{(m+n)^2} - \frac{m}{2} = \frac{\dots\dots}{2(m+n)}$

4. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} = \dots\dots \cdot \sqrt{2}$

5. $\frac{4}{q} - \frac{8+q}{2q^2} = \frac{\dots\dots}{2q^2}$

6. $\frac{-8}{2x} + \frac{4}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{\dots\dots}{2x(x-1)^2}$

7. $\left(a^{-1} \cdot b^{-3} \cdot c^2\right)^3 \cdot \left(a^{-2} \cdot b^{-4} \cdot c^3\right)^{-2} = a^{\dots\dots} \cdot b^{\dots\dots} \cdot c^{\dots\dots}$

8. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right)^{-1} = \frac{\dots\dots}{x+y^2}$

9. $(a+b)^3 - \left(a^3 + b^3\right) = (a+b) \cdot \dots\dots$

10. $\frac{a+b}{a^2+b^2} - \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{\dots\dots}{a^4-b^4}$

11. $(t-1) \cdot (1+t+t^2) = \dots\dots$

12. $\frac{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2}}{2p-2} = \dots\dots \cdot \frac{1}{p}$

13. $\frac{1}{2 + \frac{1}{2+1}} = \dots\dots$

14. $n^{-1} + n^{-2} + n^{-3} = n^{-3} \cdot (\dots\dots) = \frac{\dots\dots}{n^3}$

15. $x + 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{\dots\dots}{x-1}$

16. $xy^2z^3 + \frac{x^2yz}{2} + \frac{xyz^2w}{3} = xyz \cdot [\dots\dots]$

17. $\frac{3}{q} + \frac{1}{2q} - \frac{2}{4q} = \frac{\dots\dots}{4q} = \frac{\dots\dots}{q}$

18. $\left(\frac{n^4}{m^3} \cdot \frac{m^{-5}}{n^3}\right)^2 = \frac{n^{\dots\dots}}{m^{\dots\dots}}$

19. $\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c} = \frac{\dots\dots}{c(b+c)}$

20. $\frac{x^2z}{2} + zyx + \frac{zy^2}{2} = \frac{x+y}{2} \cdot [\dots\dots]$

CC BY-NC-SA 4.0

3.4.B Herhalingsoefeningen breuken, haakjes, machten

21. $\left(\frac{-4}{a}\right)^2 + \frac{3}{2a} = \frac{3}{a^2} \cdot [\ldots\ldots]$

22. $a^x \cdot a^{-\frac{2x}{3}} = a^{\ldots\ldots x}$

23. $(k+l+m)^2 = ((k+l)+m)^2 = k^2 + 2kl + l^2 + \ldots\ldots$

24. $\left(-(-x+y)\cdot(-1)^{-3}\right)^2 =$ $\boxed{+(y-x)^2}$ $\boxed{-(y-x)^2}$

25. $\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot 3a - \frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\ldots\ldots}{a(a+1)}$

26. $\dfrac{-1}{1 - \dfrac{x+1}{x}} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Absolute waarde

Definitie 3.5.1 (Absolute waarde)**.**

Voor een reëel getal $a \in \mathbb{R}$ definiëren we de *absolute waarde* van a, genoteerd $|a|$, als

$$|a| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a & \text{als} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{als} \quad a < 0. \end{cases}$$

Als a positief is, dan is $|a|$ gewoon a, maar als a negatief is, dan is $|a|$ het overeenkomende *positieve* getal $-a$. Dus, $|a|$ is altijd positief.

Voorbeeld 3.5.1 (Eenvoudige voorbeelden van absolute waarden)**.**

(a) $|5| = 5$ en $|-5| = 5$

(b) $|2 + (-1)| \neq |2| + |-1|$ (want $1 \neq 3$)

(c) $|(-3)^2| = |3^2| = 9 \quad (= |-3^2| = |-9|)$

(d) $|a^2 + 1| = a^2 + 1$, met $a \in \mathbb{R}$

(e) $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$

(f) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

(g) $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$

(h) $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$

Oefening 3.5.1. Bereken (zonder rekenmachine) volgende absolute waarden.

1. $|2 - 9| = \ldots\ldots$

2. $|-2 - (-6)| = \ldots\ldots$

3. $\left|\frac{11}{10} - \frac{51}{10}\right| = \ldots\ldots$

4. $|\pi - 3\pi| = \ldots\ldots$

Volgende eigenschappen volgen eenvoudig uit de definitie:

Eigenschap 3.5.1. Als $x, y, z \in \mathbb{R}$, dan is

(a) $|x| \geq 0$

(b) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(c) $|-x| = |x|$

(d) $|x|^2 = x^2 = |x^2|$ $\qquad (= |-x^2| = |(-x)^2|)$

(e) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ (absolute waarde van product is product van absolute waarden)

(f) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ met $y \neq 0$ (absolute waarde van quotiënt is quotiënt van absolute waarden)

Waarschuwing 3.5.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

(a) $|-a| = |a|$, maar ZEER ZEKER NIET ~~$|-a| = a$~~

$|-a| = a$ is FOUT als $a < 0$: als $a = -7$, dan is $|-a| = |-(-7)| \neq -7 = a$

(b) De absolute waarde van een som is niet steeds de som van de absolute waardes:

~~$|x + y| = |x| + |y|$~~

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Absolute waarde

$$|2+3| = |2| + |3| = 2+3 = 5$$

maar

$$|2+(-3)| = |-1| = 1 \quad \text{terwijl} \quad |2| + |-3| = 2+3 = 5$$

(c) De wortel van het kwadraat van een reëel getal is niet steeds gelijk aan dat reëel getal.

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{maar} \quad \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$$

Algemeen geldt

- voor $a \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt{a^2} = a$
- voor $a \in \mathbb{R}^-$: $\sqrt{a^2} = -a$

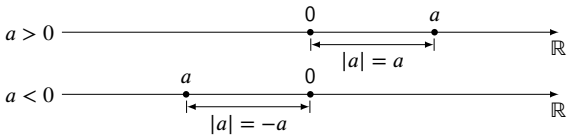
Dit kunnen we samenvatten als $\sqrt{a^2} = |a|$ voor elke reële a.

Oefening 3.5.2. Schrijf met een absolute waarde

1. $\sqrt{(x-4)^2} = \ldots\ldots$

2. $\sqrt{(-2x)^2} = \ldots\ldots$

Bij de voorstelling van a op de reële rechte $\mathbb{R}$ is $|a|$ gelijk aan de afstand van het punt a tot de oorsprong:

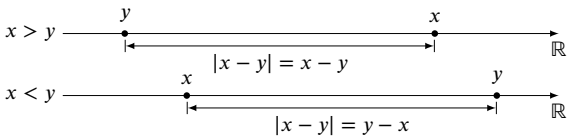


Deze eenvoudige opmerking leidt onmiddellijk tot volgend belangrijk inzicht:

Eigenschap 3.5.2. Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Dan geldt (op de reële rechte $\mathbb{R}$)

$|x-y|$ is de afstand tussen x en y.

In het bijzonder is $|x|$ de afstand van x tot de oorsprong.



Opmerking 3.5.1.

Uit $|x+y| = |x-(-y)|$ volgt dat $|x+y|$ gelijk is aan de afstand tussen x en $-y$.

Oefening 3.5.3.

1. De afstand van x tot 7 is $|x-7|$

2. De afstand van x tot -3 is $|x+3|$

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Rekenen met percentages

De *verhouding* tussen twee grootheden A en B is het *getal* $r = A/B$ dat weergeeft hoeveel keer A groter of kleiner is dan B. Een verhouding $r = 1$ betekent dat A en B even groot zijn, $r < 1$ betekent dat A kleiner is dan B en $r > 1$ dat A groter is dan B. De verhouding vergelijkt dus met 1.

Vermenigvuldigt men de verhouding r met 100 dan wordt dit een **percentage** genoemd: Vermenigvuldigen we bijvoorbeeld een verhouding van 0.5 met 100 dan krijgen we 50%.

Een *percentage* geeft dus een verhouding ten opzichte van 100: 100% is alles, 50% is de helft en 200% is het dubbel. Je leest het symbool % als 'per-cent', dus 'per honderd'.

Voorbeeld 3.6.1. Verhouding omzetten in percentage

Als er gisteren 25 zieken waren in een bedrijf met 500 werknemers, dan bedroeg het ziektepercentage $\frac{25}{500} \cdot 100 = 5\%$

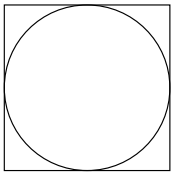
Oefening 3.6.1.

1. 30 op 150 is ..... % van 150.

2. Als je examenresultaat 90 op 150 punten is, dan heb je ..... % behaald.

3. Je krijgt in de supermarkt het tweede product aan halve prijs als je 2 identieke producten koopt. Hoeveel procent korting heb je dan op je totale aankoop (van 2 producten).

4. Beschouw een vierkant met een ingeschreven cirkel met straal r.



Hoeveel procent van de oppervlakte van het vierkant wordt bedekt door de oppervlakte van de ingeschreven cirkel?

Om $p\%$ van een grootheid te berekenen, *vermenigvuldig* je de grootheid met $\frac{p}{100}$.

Voorbeeld 3.6.2. Percentage van een getal berekenen

$$5\% \text{ van } 200 \text{ is } \frac{5}{100} \cdot 200 = 10$$

$$20\% \text{ van } 200 \text{ is } \frac{20}{100} \cdot 200 = 40$$

$$150\% \text{ van } 200 \text{ is } \frac{150}{100} \cdot 200 = 300$$

Oefening 3.6.2.

1. 20% van 150 is .....

3.6 Rekenen met percentages

2. 8% van 50 mensen zijn | 2 | 4 | 8 | 16 | mensen.

Als je weet wat $p\%$ is van een grootheid, dan kan je de grootheid zelf ook berekenen.

Voorbeeld 3.6.3. Totaal berekenen als je het percentage kent

Als de 2% rente die je gekregen hebt op je kapitaal K gelijk is aan 50 euro, dus $\frac{2}{100} \cdot K = 50$, dan is je kapitaal $K = 50 \cdot \frac{100}{2} = 2500$ euro.

Oefening 3.6.3.

1. Als 20% van x gelijk is aan 30, dan is $x = \ldots.\ldots$

2. Tijdens de solden is je favoriete jeans in korting. De winkel geeft 30% korting. Als je nog 63 euro moet betalen, wat was dan de prijs voor de solden?

Voorbeeld 3.6.4. Procentuele toename

Als de prijs van 80 euro stijgt met 10%, dan is de nieuwe prijs

$$80 + \frac{10}{100} \cdot 80 = 80 \cdot (1 + 0.1) = 80 \cdot 1.1 = 88 \text{ euro.}$$

Voorbeeld 3.6.5. Procentuele afname

Als de prijs van 200 euro daalt met 25%, dan is de nieuwe prijs

$$200 - \frac{25}{100} \cdot 200 = 200 \cdot (1 - 0.25) = 200 \cdot 0.75 = 150 \text{ euro.}$$

Oefening 3.6.4.

1. Een sofa kost 750 euro, exclusief btw. Hoeveel moet de consument betalen als er 21% btw wordt geheven?

2. Op restaurant geldt voor een dagmenu 12% btw. Het dagmenu staat in promo voor 40 euro, exclusief btw. Hoeveel moet je uiteindelijk betalen voor dit menu?

3. Als je 2000 euro verdient en een salarisverhoging krijgt van 5%, dan is je nieuwe salaris $\ldots.\ldots$ euro.

Als de prijs eerst met 10% daalt en daarna met 10% stijgt, bekom je niet de oorspronkelijke prijs.

Voorbeeld 3.6.6. Neem een prijs van 200 euro.

Na een daling van 10% wordt de prijs $200 - \frac{10}{100} \cdot 200 = 200 \cdot 0.9 = 180$ euro.

Na een daaropvolgende stijging van 10% wordt de prijs $180 + \frac{10}{100} \cdot 180 = 180 \cdot 1.1 = 198$ euro.

Oefening 3.6.5.

1. Je fietsherstelling kost 25 euro, inclusief de geldende 6% btw. Hoeveel zou je betalen zonder btw?

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 4
Rekenen met logaritmen

(Versie 2026/11/23H.2)

4.1 Begintest Logaritme

Indien je deze oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je Rekenen met Logaritmen verder overslaan, anders herhaal je best grondig de definitie en de rekenregels.

Oefening 4.1.1. Bereken de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel.

1. $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \ldots\ldots$
2. $\log_4\left(\log_4 \sqrt[4]{4}\right) = \ldots\ldots$

Oefening 4.1.2. Schrijf als één logaritme. $(x > 0, y > 0, z > 0)$

1. $\log_5(xy) - \log_5(yz) + \log_5(zx) = \log_5 \ldots\ldots$

Oefening 4.1.3. Bereken de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel.

1. $\log_9 25 - \log_3 15 = \ldots\ldots$
2. $\ln 108 - 2 \cdot \ln 6 + \ln\left(\frac{e}{3}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 De logaritme

Veronderstelde voorkennis: machten

We kennen voor een gegeven grondtal a en een gegeven exponent r de *macht* a^r. Zo hoort bij grondtal 3 en exponent 2 de macht $3^2 = 9$ en bij grondtal 2 en exponent 3 de macht $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Bij *logaritmen* keren we de berekening om: we *vertrekken* van een gegeven grondtal a en een gegeven macht a^r en *zoeken* de *exponent* r die hoort bij dat grondtal a om die macht a^r te bekomen. Als de macht geschreven is als a^r kunnen we r natuurlijk gewoon aflezen, maar als de macht is uitgerekend werkt dat niet meer. In het voorbeeld hierboven: we krijgen het grondtal 3 en de macht 9 en we zoeken de exponent r zodat $3^r = 9$. Die is 2 want $3^{\mathbf{2}} = 9$. We noemen die exponent 2 de 3-logaritme van 9, en we noteren die als $\log_3 9$. We hebben dus:

$$\log_3 9 = \mathbf{2} \quad \text{omdat} \quad 3^{\mathbf{2}} = 9 \quad \text{en er geldt dus dat } 3^{\log_3 9} = 9 \text{ en } \log_3 3^2 = 2$$
$$\log_2 8 = \mathbf{3} \quad \text{omdat} \quad 2^{\mathbf{3}} = 8 \quad \text{en er geldt dus dat } 2^{\log_2 8} = 8 \text{ en } \log_2 2^3 = 3$$

Definitie 4.2.1 (Logaritme)**.** De **logaritme** met grondtal a van x, ook de a-logaritme van x genoemd, genoteerd $\log_a x$, is per definitie

de exponent r waartoe men het grondtal a moet verheffen om x als uitkomst te krijgen.

Met symbolen:

$$\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x.$$

Deze definitie is enkel zinvol voor a en x strikt positieve reële getallen met $a \neq 1$ (zie verder) .

Voorbeeld 4.2.1.

Je kan de logaritme $\log_a x$ dus *direct aflezen* als je x als een macht met grondtal a kan schrijven.

1. $\log_2 8 = \log_2 2^{\mathbf{3}} = 3$
2. $\log 1000 = \log 10^{\mathbf{3}} = 3$
3. $\log_4 \frac{1}{4} = \log_4 4^{\mathbf{-1}} = -1$
4. $\log_4 4 = 1$
5. $\log_4 1 = 0$

Opmerking 4.2.1.

- In het secundair onderwijs wordt soms de notatie ${}^a\log x$ gebruikt.
  In de wetenschappen gebruikt men meestal $\log_a x$.
- Net zoals wortels als $\sqrt{4}, \sqrt{25}$ en $\sqrt[3]{8}$ makkelijk te berekenen zijn terwijl je voor $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ of $\sqrt[3]{9}$ een rekentoestel nodig hebt, geldt voor logaritmen dat $\log_2 4, \log_5 25$ en $\log_2 8$ makkelijk te berekenen zijn, terwijl je voor $\log_3 8$ of $\log_5 30$ een rekentoestel nodig hebt.
- Onmiddellijke gevolgen van de definities (met $a > 0$ en $a \neq 1$):

  $\log_a 1 = 0$ $\qquad$ $\log_a a^b = b$

  $\log_a a = 1$ $\qquad$ $\log_a \frac{1}{a^b} = -b$

- De **tiendelige** logaritme $\log x$: het grondtal $a = 10$ komt veel voor omdat we rekenen met het tiendelig talstelsel. We spreken af om het grondtal 10 *weg* te laten: $\log 100 = \log_{10} 100 = 2$. De *tiendelige* logaritme wordt ook wel *Briggse* logaritme genoemd.
- De **natuurlijke** logaritme $\ln x$: een tweede bijzondere grondtal is het *getal van Euler*: $e \approx 2.718281$. Dit getal e neemt binnen de wiskunde een speciale plaats in, net zoals bijvoorbeeld

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 De logaritme

het getal $\pi \approx 3.14159$. De logaritme met grondtal e krijgt een eigen notatie: $\log_e x = \ln x$ en een eigen naam: de 'ln' verwijst naar 'logaritmus naturalis' (dus '*natuurlijke logaritme*'), en wordt soms ook de *Neperse* logaritme genoemd.

Voorbeeld 4.2.2.

1. $\log_3 27 = 3$
2. $\log_5 25 = 2$
3. $\log_5 1 = 0$
4. $\log_4 2 = \frac{1}{2}$

Opmerking 4.2.2. Speciale grondtallen en argumenten waarbij de logaritme niet bestaat:

(a) $\log_1 5$ bestaat niet. Er bestaat immers geen exponent r zodat $1^r = 5$, want 1^r is steeds 1.

(b) $\log_0 5$ bestaat niet. Er bestaat geen exponent r waarvoor geldt dat $0^r = 5$. Positieve machten van 0 zijn 0, negatieve machten van 0 bestaan niet omdat je dan door 0 zou moeten delen, wat niet toegelaten is. Het resterende geval 0^0 is wiskundig onbepaald.

(c) $\log_{-4} 2$ bestaat niet, want er bestaat geen r waarvoor geldt dat $(-4)^r = 2$. Er bestaat zeker geen natuurlijk getal r waarvoor $(-4)^r = 2$, en rationale getallen r zijn problematisch omdat bijvoorbeeld $(-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$ niet bestaat.

(d) $\log_2(-4)$ bestaat ook niet, want er bestaat geen r waarvoor geldt dat $2^r = -4$. Inderdaad, machten van 2 zijn altijd positief.

(e) $\log_3 10$ bestaat, maar we kunnen dit niet exact berekenen omdat we het getal 10 niet kunnen schrijven als een macht met grondtal 3. Omdat $3^2 < 10 < 3^3$ kunnen we wel besluiten dat $\log_3 10$ een waarde moet zijn tussen 2 en 3. Met een rekentoestel of computer kunnen we een betere benaderende waarde vinden. Zo is bijvoorbeeld $\log_3 10 \approx 2.0959$, afgerond op 4 decimalen.

We merken dus op dat de definitie van de logaritme $\log_a x$ inderdaad moet beperkt worden:

- we aanvaarden als grondtal a enkel *strikt positieve getallen*
- we aanvaarden als grondtal a niet de waarde 1 (want machten van 1 zijn altijd gelijk aan 1)
- we aanvaarden als argument x enkel *strikt positieve getallen* (want machten met een strikt positief grondtal a zijn altijd strikt positief).

De logaritme $\log_a x$ kan zelf *wel alle reële waarden aannemen* (dus zowel negatief, nul als positief).

Uit de definitie volgt onmiddellijk volgende eigenschap:

Eigenschap 4.2.1 (Basisformules van de logaritme)**.**

Als a, x positieve reële getallen zijn, en $a \neq 1$, dan geldt

$$\log_a a^x = x \quad \text{en} \quad a^{\log_a x} = x$$

In het bijzonder geldt

$$\ln e^x = x \quad \text{en} \quad e^{\ln x} = x \quad \text{en} \quad \log 10^x = x \quad \text{en} \quad 10^{\log x} = x$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 De logaritme

Als we $\log_a a^x = x$ toepassen voor $x = 0$ en $x = 1$ krijgen we

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

Oefening 4.2.1.

Bereken volgende logaritmen (zonder rekenmachine).

1. $\log_3 81 = \ldots\ldots$

2. $\log 100 = \ldots\ldots$

3. $\log 0.01 = \ldots\ldots$

4. $\log_2 64 = \ldots\ldots$

5. $\log_2 128 = \ldots\ldots$

6. $\log_2(4^7) = \ldots\ldots$

7. $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = \ldots\ldots$

8. $\log_9 3 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.2.A Basisoefeningen logaritmen

4.2.A.1 Niveau 1

Oefening 4.2.2. Bereken indien mogelijk de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Indien de logaritme bestaat maar niet exact berekend kan worden, geef dan de grenzen aan (bv. $\log_3 10$ is een waarde tussen 2 en 3).

1. $\log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = \ldots\ldots$
2. $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \ldots\ldots$
3. $\log_1 1$: $\ldots\ldots$
4. $\log \frac{1}{1000} = \ldots\ldots$
5. $\ln \sqrt[3]{e^2} = \ldots\ldots$
6. $\log_6 1 = \ldots\ldots$
7. $\log_4 8 = \ldots\ldots$
8. $\log_5 10$: $\ldots\ldots$
9. $\log_3(-3)^6 = \ldots\ldots$
10. $\log_{-3}(-3)^6$: $\ldots\ldots$

4.2.A.2 Niveau 2

Oefening 4.2.3. Bereken zonder rekenmachine.

1. $\log_2 64 = \ldots\ldots$
2. $\log_5 125 = \ldots\ldots$
3. $\log_2 \frac{1}{32} = \ldots\ldots$
4. $\log_6(36\sqrt{6}) = \ldots\ldots$
5. $\log 0,00001 = \ldots\ldots$
6. $\log_4\left(\log_4 \sqrt[4]{4}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Rekenregels voor logaritmen

Veronderstelde voorkennis: breuken en machten

Uit de rekenregels voor machten volgen de rekenregels voor logaritmen.

Omdat $x = a^{\log_a x}$ en $y = a^{\log_a y}$ volgt uit de rekenregel voor het product van machten $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ dat

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}) = \log_a(a^{\log_a x + \log_a y}) = \log_a x + \log_a y$$

Op gelijkaardige manier volgt uit de rekenregel voor de macht van een macht $(a^r)^s = a^{s \cdot r}$ dat

$$\log_a(x^r) = \log_a(\left(a^{\log_a x}\right)^r) = \log_a(a^{r \cdot \log_a x}) = r \log_a x$$

en dus in het bijzonder (voor $r = -1$) dat $\log_a \frac{1}{x} = \log_a x^{-1} = -\log_a x$

Omdat $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$, geldt dus ook $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a \left(x \cdot y^{-1}\right) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$.

Voor een willekeurige b geldt ook volgend verband tussen $\log_a x$ en $\log_b x$:

$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \log_b a$$

Samengevat wordt dit:

Eigenschap 4.3.1 (Rekenregels logaritmen).

Logaritme van een product: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

of in woorden: *de logaritme van een product is de som van de logaritmen.*

Logaritme van een quotiënt: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

of in woorden: *de logaritme van een quotiënt is het verschil van de logaritmen.*

Logaritme van een macht: $\log_a(x^s) = s \cdot \log_a x$

of in woorden: *de logaritme zet een macht om in een product.*

Speciaal geval $s = -1$: $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = \log_a x^{-1} = -\log_a x$

Verandering van grondtal: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ of ook $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$

Speciaal geval $b = x$: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Rekenregels voor logaritmen

Voorbeeld 4.3.1.

- $\log_3(7 \cdot y) = \log_3 7 + \log_3 y$
- $\log 500 - \log 5 = \log \dfrac{500}{5} = \log 100 = 2$
- $\log x^{1000} = 1000 \log x$
- $\log_2 17 = \dfrac{\ln 17}{\ln 2}$

Voorbeeld 4.3.2.

1. $\log 4 + \log 25 = \log(4 \cdot 25) = \log(100) = 2$

2. $\log_8 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 8} = \dfrac{2}{3}$

3. $\dfrac{\log 16}{\log 2} = \log_2 16 = 4$

4. $\log_5 125 = \log_5(5 \cdot 25) = \log_5 5 + \log_5 25 = 1 + 2 = 3$.
of ook: $\log_5 125 = \log_5(5^3) = 3$.

5. $\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right) = \log_2 32 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3$
of ook: $\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

6. $\ln e^2 - \ln e = \ln\left(\dfrac{e^2}{e}\right) = \ln e = 1$
of ook: $\ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$

7. $\log_2 4^5 = 5 \cdot \log_2 4 = 5 \cdot 2 = 10$.
of ook: $\log_2 4^5 = \log_2(2^2)^5 = \log_2 2^{10} = 10$.

Waarschuwing 4.3.1 (Veelgemaakte fouten)**.** Bekijk grondig volgende uitdrukkingen:

1. $\log_5(20 + 5) \neq \log_5 20 + \log_5 5$

2. $\ln(20 + 5) \neq \ln 20 \cdot \ln 5$

3. $\log_5(30 - 5) \neq \dfrac{\log_5 30}{\log_5 5}$

4. $(\log 10)^3 \neq 3 \cdot \log 10$

5. $2 \ln \dfrac{e}{4} \neq \ln \dfrac{e^2}{4}$

In het algemeen kan je dus niet veel doen met de logaritme van een som (of verschil) (zie 1, 2 en 3).

~~$\log(x + y) = \log x + \log y$~~

~~$\log(x + y) = \log x \cdot \log y$~~

~~$\log(x - y) = \dfrac{\log x}{\log y}$~~

~~$(\log x)^n \neq n \cdot \log x$~~

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Rekenregels voor logaritmen

Opmerking 4.3.1 (Logaritmen met rekenmachine)**.**

Eenvoudige rekentoestellen kennen soms enkel de functie 'log()'. Je kan hiermee $\log_{10}(25)$ berekenen maar niet bijvoorbeeld $\log_5(25)$. Je kan echter gebruik maken van de formule om van grondtal te veranderen zodat je $\log_5(25)$ kan bereken als $\dfrac{\log 25}{\log 5}$.

In volgende voorbeelden worden de verschillende rekenregels tegelijk gebruikt:

Voorbeeld 4.3.3. Schrijf de uitdrukking $2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z &= \log_3(x^2) - \log_3(y^3) + \log_3(z^{0.5}) \\ &= \log_3(x^2 z^{0.5}) - \log_3(y^3) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2 z^{0.5}}{y^3}\right) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2\sqrt{z}}{y^3}\right). \end{aligned}$$

Hierbij hebben we eerst de rekenregel voor machten gebruikt, daarna de rekenregel voor product en tenslotte de rekenregel voor quotiënt.

Voorbeeld 4.3.4. Schrijf de uitdrukking $\log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z &= \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + \log_{\frac{1}{5}}(z^2) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}(xz^2) - \log_{\frac{1}{5}}(yz) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz^2}{yz}\right) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz}{y}\right). \end{aligned}$$

Opnieuw hebben we gebruik gemaakt van de rekenregel voor machten, de rekenregel voor product en de rekenregel voor quotiënt, in deze volgorde, en tenslotte de breuk binnen de logaritme vereenvoudigd.

Voorbeeld 4.3.5. Bereken de waarde van $\log_2 3 - \log_2 12$ zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Dat kan met behulp van de quotiëntregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 &= \log_2\left(\frac{3}{12}\right) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \log_2(2^{-2}) = -2. \end{aligned}$$

Een alternatieve manier gebruikt de productregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 &= \log_2 3 - \log_2(3 \cdot 4) = \log_2 3 - \log_2 3 - \log_2 4 \\ &= -\log_2(2^2) = -2. \end{aligned}$$

Voorbeeld 4.3.6. Als gegeven is dat $\log x = 2.4$ en dat $\log y = -1.1$, bereken dan $\log\left(\sqrt{x} \cdot y^3\right)$.

Dit kan gebeuren op twee manieren.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Rekenregels voor logaritmen

Eerst gebruiken we de betekenis van de logaritme om x en y te bepalen: $x = 10^{2.4}$ en $y = 10^{-1.1}$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(\sqrt{10^{2.4}}\cdot(10^{-1.1})^3\right)\\ &= \log\left((10^{2.4/2})\cdot(10^{-1.1\cdot 3})\right)\\ &= \log\left(10^{1.2}\cdot 10^{-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{1.2-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{-2.1}\right) = -2.1.\end{aligned}$$

Anderzijds kunnen we gebruik maken van de rekenregels van logaritmen om de gegeven formule te herschrijven als een uitdrukking in $\log x$ en $\log y$:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(x^{0.5}\cdot y^3\right)\\ &= \log(x^{0.5}) + \log(y^3)\\ &= 0.5\cdot\log x + 3\cdot\log y\\ &= 0.5\cdot 2.4 + 3\cdot(-1.1) = 1.2 - 3.3 = -2.1.\end{aligned}$$

Voorbeeld 4.3.7. Herschrijf de uitdrukking $\log_a\sqrt{\frac{yz^2}{ax}}$ in functie van $\log_a x$, $\log_a y$ en $\log_a z$, weer door gebruik te maken van de rekenregels:

$$\begin{aligned}\log_a\sqrt{\frac{yz^2}{ax}} &= \log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)^{0.5}\\ &= 0.5\log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a(yz^2) - \log_a(ax)\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a y + log_a(z^2) - \log_a a - \log_a x\right)\\ &= 0.5\cdot\left(-\log_a x + \log_a y + 2\log_a z - 1\right).\end{aligned}$$

We schrijven eerst de vierkanstwortel als een macht, passen dan de rekenregel voor machten toe, vervolgens de regel voor quotiënt, de regel voor product en nogmaals de regel voor macht.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3.A Oefeningen rekenregels logaritmen

4.3.A.1 Niveau 1

Oefening 4.3.1. Zij $a, b, c > 0$. Schrijf in functie van $\log a$, $\log b$ en $\log c$.

1. $\log \dfrac{a}{b^4} = \ldots\ldots$
2. $\log\left(c^3\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right) = \ldots\ldots$
3. $\log \dfrac{a^4bc}{\sqrt{bc^2}} = \ldots\ldots$

Oefening 4.3.2. Schrijf als één logaritme. $(x > 0, y > 0, z > 0)$

1. $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log(xy^2) + 5 \cdot \log y = \log \ldots\ldots$
2. $\dfrac{1}{2} \cdot \log_3\left(\dfrac{y}{x}\right) - \log_3 \sqrt{\dfrac{x}{y}} = \log_3 \ldots\ldots$
3. $\log_5(xy) - \log_5(yz) + \log_5(zx) = \log_5 \ldots\ldots$

4.3.A.2 Niveau 2

Oefening 4.3.3. Schrijf elke uitdrukking in functie van $\log x$, $\log(x-5)$ en $\log(x+1)$.

1. $\log \dfrac{x(x+1)}{x-5} = \ldots\ldots$
2. $\log\left((x+1)^2\sqrt{x-5}\right) = \ldots\ldots$
3. $\log \sqrt{\dfrac{x-5}{x^3(x+1)}} = \ldots\ldots$
4. $\log \dfrac{1}{(x+1)^2} = \ldots\ldots$

Oefening 4.3.4. Schrijf elke uitdrukking als één enkele logaritme.

1. $\log(x+1) - \log x^2 + \dfrac{1}{2}\log(x-3) = \ldots\ldots$
2. $3 - \log x = \ldots\ldots$
3. $5\log(x-1) - \dfrac{1}{2}\log(x+3) = \ldots\ldots$

Oefening 4.3.5. Bereken de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Neem zeker pen en papier bij de hand, want je kan ze niet allemaal uit je hoofd uitrekenen.

1. $\log 25 + \log 40 = \ldots\ldots$
2. $\log_3 36 - \log_3 4 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

4.3.A Oefeningen rekenregels logaritmen

3. $\log_9 25 - \log_3 15 = \ldots\ldots$

4. $\ln 108 - 2 \cdot \ln 6 + \ln\left(\frac{e}{3}\right) = \ldots\ldots$

Oefening 4.3.6. Bereken zonder gebruik te maken van een rekentoestel.

1. $e^{3\ln 2} = \ldots\ldots$

2. $4^{\log_2 3} = \ldots\ldots$

3. $27^{\log_3 2} = \ldots\ldots$

Oefening 4.3.7. Schrijf als één logaritme. Je mag het grondtal zelf kiezen. $(x > 0, y > 0)$

1. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{\frac{1}{3}} x = \ldots\ldots$

2. $\log_5(4xy) - \log_{\frac{1}{5}}(4xy) = \ldots\ldots$

Oefening 4.3.8.

1. Schrijf onderstaande uitdrukking in functie van $\log(k-1)$, $\log k$ en $\log(k+1)$.

$$\log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ldots\ldots$$

4.3.A.3 Niveau 3

Oefening 4.3.9.

1. Stel dat y impliciet gegeven is als functie van t door volgende formule:

$$k \cdot t = \frac{1}{3}[\ln(y-2) - \ln(y-5)]$$

Hierin is k een strikt positieve parameter.
Toon aan dat $y = \dfrac{5 - 2e^{-3kt}}{1 - e^{-3kt}}$

Oefening 4.3.10.

1. Zij $a, b, c, d > 0$. Toon aan dat $\log\frac{a}{b} - \log\frac{c}{d} = -\log\frac{b}{d} + \log\frac{a}{c}$

2. Zij $a, b > 0$. Toon aan dat $-\log\frac{2}{a} + \log\frac{2}{b} = -\log\frac{b}{a}$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 5

Sommatieteken en faculteit

(Versie 2026/11/23H.2)

5.1 Begintest Sommatieteken, faculteit en binomiaalgetallen

Indien je deze oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je je beperken tot de herhalingsoefeningen, anders herhaal je best eerst grondig de rekenregels met bijhorende oefeningen.

Oefening 5.1.1.

1. $\sum_{k=1}^{3} k^2 = \ldots\ldots$
2. $\sum_{k=1}^{n+1} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 + \ldots\ldots$
3. $\sum_{i=0}^{9} (i+1)^2 = \sum_{i=1}^{10} \ldots\ldots$
4. $(k+1)! + k! = (\ldots\ldots)k!$
5. $\binom{k+1}{k} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Het sommatieteken $\sum$

Met het **sommatieteken** $\sum$ kunnen sommen met veel termen kort worden opgeschreven. Het sommatieteken wordt vaak gebruikt in wetenschappen zoals statistiek, fysica, economie,....

In veel problemen komen sommen voor van termen die telkens op basis van een repetitief patroon zijn opgebouwd. We noteren dergelijke sommen dikwijls met puntjes. Zo schrijven we voor de som van de eerste honderd natuurlijke getallen bijvoorbeeld

$$1+2+3+\ldots+100$$

en de som van de eerste 10 kwadraten als

$$1+4+9+16+\ldots+100.$$

Het is voor iedereen duidelijk wat hiermee wordt bedoeld, en iedereen kan uitrekenen dat $1+2+3+\ldots+100 = 5050$ en $1+4+9+16+\ldots+100 = 385$.

Maar, in sommige gevallen is er toch verwarring mogelijk over wat er precies met de puntjes wordt bedoeld. Bijvoorbeeld: hoeveel is

$$3+5+7+\ldots+19 = ?$$

Bedoelen we hier de som van de *oneven* getallen $3+5+7+9+11+13+15+17+19$ of de som van de *priemgetallen* $3+5+7+11+13+17+19$?

Wanneer het patroon duidelijk is levert het sommatieteken een handige en elegante manier om dergelijke sommen te noteren. Een zogenaamde *sommatie-index* loopt daarbij over de verschillende termen:

$$\sum_{i=1}^{100} i \overset{\text{notatie}}{=} 1+2+3+\ldots+100.$$

We lezen dat als 'de som voor i gaande van 1 tot 100 van telkens het getal i'. Dus, $\sum_{i=1}^{100} i = 5050$, want $1+2+3+\cdots+100 = 5050$.

We kunnen natuurlijk niet alleen gewoon i optellen, maar bijvoorbeeld ook de eerste tien kwadraten

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 \overset{\text{notatie}}{=} 1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2 = 385,$$

dus 'de som voor i gaande van 1 tot 10 van telkens i^2'. Ook veel ingewikkeldere uitdrukkingen komen voor

$$\sum_{i=1}^{365} \frac{\sqrt{i+5}}{i^2+1} \overset{\text{notatie}}{=} \frac{\sqrt{1+5}}{1^2+1} + \ldots + \frac{\sqrt{365+5}}{(365)^2+1} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{370}}{133226}.$$

Vooraleer een formele definitie te geven, bekijken we eerst nog enkele eenvoudige voorbeelden:

Voorbeeld 5.2.1 (Inleidende voorbeelden).

1. Beschouw de som $2+4+8+16+32+64$.

Dit is een som van machten van 2. Elke term is van de vorm 2^i waarbij i loopt van 1 tot en met 6. We schrijven die som verkort als

$$2+4+8+16+32+64 = \underbrace{2^1}_{i=1} + \underbrace{2^2}_{i=2} + \underbrace{2^3}_{i=3} + \ldots + \underbrace{2^6}_{i=6} = \sum_{i=1}^{6} 2^i.$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Het sommatieteken $\sum$

We kunnen met deze notatie ook veel langere sommen opschrijven:

$$2+4+8+16+\ldots+4096 = 2^1+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{11}+2^{12} = \sum_{i=1}^{12} 2^i\,.$$

2. Beschouw de som $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

Dit is de som van de termen $\frac{1}{i}$, waarbij i loopt van 1 tot en met 5. We kunnen die som verkort schrijven als

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i}\,.$$

3. Beschouw de som $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}$.

We kunnen de som verkort schrijven als

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i^2}\,.$$

De letter die gebruikt wordt bij het sommatieteken hoeft niet i te zijn, dat mag een willekeurige letter zijn. Andere vaak gebruikte letters zijn j en k. De sommatie hoeft ook niet bij 1 te starten:

Voorbeeld 5.2.2.

1. Beschouw de som $2+3+4+\cdots+8$.

We kunnen die som verkort schrijven als $\sum_{k=2}^{8} k = 2+3+4+5+6+7+8$.

2. Beschouw de som $9+16+25+36+49+64+81$.

We kunnen die som verkort schrijven als $\sum_{j=3}^{9} j^2 = 9+16+25+36+49+64+81$.

Een algemene definitie van de sommatie, enigszins abstract geformuleerd, gaat als volgt:

Definitie 5.2.1 (Het sommatieteken)**.**

Voor $n \in \mathbb{N}$ en $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reële getallen definiëren we :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{notatie}}{=} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Deze notatie wordt veralgemeend voor $m, n \in \mathbb{Z}$ met $m \leqslant n$ en $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reële getallen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \overset{\text{notatie}}{=} a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

We lezen $\sum_{k=m}^{n} a_k$ als de som van (de) a_k voor k gaande van m tot en met n.

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Het sommatieteken $\sum$

Men noemt a_k de **algemene term** en k de **sommatie-index**.
Men noemt m de **ondergrens** en n de **bovengrens** van de sommatie.

Men noteert $\sum_{k=m}^{n} a_k$ soms ook als $\sum_{k=m}^{n} a_k$.

Voorbeeld 5.2.3.

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 100$$

$$\sum_{i=-2}^{3} i^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 27$$

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=-2}^{1} (-1)^i i^3 &= (-1)^{-2} \cdot (-2)^3 + (-1)^{-1} \cdot (-1)^3 + (-1)^0 \cdot 0^3 + (-1)^1 \cdot 1^3 \\ &= (1) \cdot (-8) + (-1) \cdot (-1) + 0 + (-1) \cdot (1) \\ &= -8 + 1 + 0 - 1 = -8\end{aligned}$$

Oefening 5.2.1.

1. Bereken de som $\sum_{j=3}^{5} j^2 = \ldots\ldots$

Opmerking 5.2.1.

- De sommatie-index bestaat alleen maar *in* de sommatie. In de uitgeschreven of uitgerekende som komt de sommatie-index niet meer voor.
- De sommatie-index mag geen andere betekenis hebben in de context.
  Als $k \in \mathbb{R}$, dan is
  $$\sum_{i=1}^{4} k^i = \sum_{j=1}^{4} k^j = k + k^2 + k^3 + k^4$$
  maar
  $$\sum_{k=1}^{4} k^k = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 \neq \sum_{i=1}^{4} k^i.$$
  Je mag voor $k + k^2 + k^3 + k^4$ dus *niet* de letter k kiezen als sommatie-index.

Uit de definitie volgen volgende eigenschappen:

Eigenschap 5.2.1 (Basiseigenschappen sommatie)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Het sommatieteken $\sum$

(a) De som $\sum_{k=1}^{n} a_k$ heeft n termen. Vb: $\sum_{k=1}^{2} 2^k = 2^1 + 2^2$, 2 termen

(b) De som $\sum_{k=0}^{n} a_k$ heeft $n+1$ termen. Vb: $\sum_{k=0}^{2} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2$, $2+1=3$ termen

(c) De som $\sum_{k=m}^{n} a_k$ heeft $n-m+1$ termen. Vb: $\sum_{k=5}^{6} 2^k = 2^5 + 2^6$, $6-5+1=2$ termen

(d) $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$ als en slechts als $a_0 = 0$ Vb: $\sum_{k=0}^{3} k = \sum_{k=1}^{3} k = 0+1+2+3$

(e) $\sum_{k=n}^{n} a_k = a_n$ (sommatie over één getal) Vb: $\sum_{k=7}^{7} 2^k = 2^7$

(f) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$ (veranderen van indexnaam) Vb: $\sum_{k=1}^{2} 2^k = \sum_{j=1}^{2} 2^j = 2^1 + 2^2$

Om een gegeven som te schrijven met behulp van het sommatieteken $\sum$ moeten we op zoek gaan naar de gemeenschappelijke vorm van de termen. Dat moet leiden tot een formule voor een algemene term, zeg a_k, die bijna altijd afhangt van een zelfgekozen sommatie-index (hier dus k). Vervolgens zoeken we de onder- en bovengrenzen, dit zijn respectievelijk de eerste en de laatste waarde die k moet aannemen opdat a_k precies alle termen van de som doorloopt.

Voorbeeld 5.2.4. Schrijf met een sommatieteken: $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = \sum_{i=1}^{4} a_ib_i$

Oefening 5.2.2. Schrijf volgende uitdrukkingen met een sommatieteken:

1. $\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} = \ldots\ldots$
2. $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^3 + x^4 + \frac{\sqrt{5}}{2}x^5 + \frac{\sqrt{6}}{2}x^6 + \frac{\sqrt{7}}{2}x^7 + \sqrt{2}x^8 + \frac{3}{2}x^9 = \ldots\ldots$

Als de termen van de gegeven som afwisselend positief en negatief zijn, kan je in de algemene term vermenigvuldigen met de factor $(-1)^k$ of $(-1)^{k+1}$. Voor oneven k is $(-1)^k = -1$, dus deze factor in de algemene term vermenigvuldigt alle termen met oneven sommatie-index met -1. Voor even k is $(-1)^{k+1} = -1$, dus deze factor in de algemene term vermenigvuldigt alle termen met even sommatie-index met -1.

Voorbeeld 5.2.5. Schrijf volgende uitdrukkingen met een sommatieteken:

1. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \cdots + 129 - 130$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Het sommatieteken $\sum$

Uitwerking: We nemen als ondergrens $k = 1$ en als bovengrens $k = 130$. De termen met een even sommatie-index k zijn negatief (de term voor $k = 2$ is -2, de term voor $k = 4$ is -4, ...). Vermits $(-1)^{k+1}$ gelijk is aan 1 voor oneven k en gelijk aan -1 voor even k, is de algemene term hier $a_k = (-1)^{k+1}k$.

Bovenstaande som kunnen we dus korter opschrijven als

$$\sum_{k=1}^{130}(-1)^{k+1}k.$$

2. $-1+2-3+4-5+6-7+8+\cdots-129+130.$

Uitwerking: We nemen als ondergrens $k = 1$ en als bovengrens $k = 130$. De termen met een oneven sommatie-index k zijn negatief (de term voor $k = 1$ is -1, de term voor $k = 3$ is -3, ...). Vermits $(-1)^k$ gelijk is aan -1 voor oneven k en gelijk aan 1 voor even k, is de algemene term hier $a_k = (-1)^k k$.

Bovenstaande som kunnen we dus korter opschrijven als

$$\sum_{k=1}^{130}(-1)^{k}k.$$

Opmerking 5.2.2.

We maken de volgende afspraken over haakjes:

$$\sum_{i=5}^{7}a_i+4 \overset{\text{afspraak}}{=} \left(\sum_{i=5}^{7}a_i\right)+4 = a_5+a_6+a_7+4$$

en

$$\sum_{i=5}^{7}(a_i+4) = (a_5+4)+(a_6+4)+(a_7+4) = a_5+a_6+a_7+12.$$

Algemeen geldt

$$\sum_{k=m}^{n}a_k+b = \left(\sum_{k=m}^{n}a_k\right)+b$$

Om verwarring te vermijden schrijf je wel best altijd de haakjes.

Bij de sommatie van een *product* is het niet nodig (maar ook niet fout) om haakjes te zetten:

$$\sum_{k=m}^{n}a_k b_k = \sum_{k=m}^{n}(a_k b_k).$$

Voorbeeld 5.2.6. Schrijf met een sommatieteken:

1. $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5 = \left(\sum_{i=1}^{4}a_ib_i\right)+a_5$

Oefening 5.2.3. Bereken de som:

1. $\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{2^i}{3}+5\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Het sommatieteken $\sum$

2. $\sum_{i=0}^{3} \frac{2^i}{3} + 5 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Rekenregels voor de sommatie $\sum$

We bundelen hier enkele rekenregels in verband met het sommatieteken zoals het afzonderen van de eerste of de laatste term en verandering van sommatie-index. Eerst enkele voorbeelden:

Voorbeeld 5.3.1.

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{99} 2 = 2+2+\cdots+2 = 99\cdot 2$

2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{8} k = 2+3+4+5+6+7+8 = 35$

Deze schrijfwijze is niet uniek: men kan dezelfde som bijvoorbeeld ook noteren als

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{7}(k+1) &= (1+1)+(2+1)+\ldots+(7+1)\\ &= 2+3+4+5+6+7+8 = 35\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}\sum_{j=3}^{9}(j-1) &= (3-1)+(4-1)+\ldots+(9-1)\\ &= 2+3+4+5+6+7+8 = 35.\end{aligned}$$

of

$$2+3+4+\cdots+8 = \sum_{i=0}^{6}(i+2)$$

3. Beschouw de som

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2^1+2^2+2^3 = 2+4+8 = 14. \tag{4}$$

Zonderen we hierin de eerste term af, dan bekomen we

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = 2+\sum_{k=2}^{3} 2^k,$$

de laatste term afzonderen geeft

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{k=1}^{2} 2^k + 8.$$

We kunnen ook een substitutie uitvoeren van de sommatie-index. Stellen we bijvoorbeeld $p = k+6$. Hoe schrijven we deze som als een som over de index p i.p.v. over de index k?

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{p=\ldots}^{\ldots} 2^{\cdots}$$

- Als $p = k+6$, dan is $k = p-6$.
- Als $k = 1$, dan is $p = 7$.
- Als $k = 3$, dan is $p = 9$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Rekenregels voor de sommatie $\sum$

Zo bekomen we

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k = \sum_{p=7}^{9} 2^{p-6} = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14.$$

Wanneer de sommatie over k-waarden van 1 t.e.m. 3 vervangen wordt door een sommatie met ondergrens 0 en bovengrens 2, wordt hetzelfde resultaat bekomen, mits de juiste aanpassing in de algemene term:

$$\sum_{k=1}^{3} 2^k \overset{l \overset{\text{def}}{=} k-1}{=} \sum_{l=0}^{2} 2^{l+1} = \sum_{k=0}^{2} 2^{k+1} = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14.$$

4.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{99} 2i &= 2 + 4 + \cdots + 198 \\ &= 2(1 + 2 + \cdots + 99) \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{99} i \qquad \text{(factor buitenbrengen)} \end{aligned}$$

Eigenschap 5.3.1 (Eigenschappen sommatie)**.**

Zij $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{Z}$ met $m \leq n$:

(1) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \alpha = \underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{n-m+1 \text{ keer}} = (n - m + 1)\alpha$ (som van constanten)

(2) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ (eerste term afzonderen)

(3) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n$ (laatste term afzonderen)

(4) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k \overset{j \overset{\text{def}}{=} k+r}{=} \sum_{j=m+r}^{n+r} a_{j-r}$ (substitutie sommatie-index)

(5) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=m}^{n} a_k + \beta \sum_{k=m}^{n} b_k$ (lineariteit)

Voorbeeld 5.3.2 (Eigenschappen sommatie)**.**

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} 7 = 7 + 7 + 7 = 3 \cdot 7 = (4 - 2 + 1) \cdot 7 = 21$

2. $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} 7^k = 7^2 + 7^3 + 7^4 = 7^2 + \sum_{k=3}^{4} 7^k$

3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} 7^k = 7^2 + 7^3 + 7^4 = \sum_{k=2}^{3} 7^k + 7^4$

4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} 7^k = 7^2 + 7^3 + 7^4 = \sum_{j=0}^{2} 7^{j+2}$ met $j = k - 2$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \left(5 \cdot 2^k + 7 \cdot 3^k\right) = 5 \cdot \sum_{k=1}^{3} 2^k + 7 \cdot \sum_{k=1}^{3} 3^k$

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Rekenregels voor de sommatie $\sum$

Oefening 5.3.1.

1. $\sum_{i=0}^{9} (i+1)^2 = \sum_{i=1}^{10} \dots \dots$
2. $\sum_{i=0}^{4} (10+i) = \sum_{i=1}^{4} i + \dots \dots$
3. $\sum_{j=1}^{4} (a+x_j) = \sum_{i=1}^{4} x_i + \dots \dots$

Als laatste bekijken we nog sommen waarvoor alle termen met een even sommatie-index nul zijn, evenals sommen waarvoor alle termen met een oneven sommatie-index nul zijn.

Voorbeeld 5.3.3.

1. $\sum_{n=6}^{26} \frac{1+(-1)^n}{n!} = \frac{2}{6!} + 0 + \frac{2}{8!} + \dots + 0 + \frac{2}{26!}$

Er geldt dat

$$1+(-1)^n = \begin{cases} 2, & \text{als } n \text{ even} \\ 0, & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$$

In de gegeven som varieert de sommatie-index n van 6 tot 26, maar de termen met oneven n zijn nul en hebben dus geen bijdrage in de som. We kunnen een andere sommatie-index k kiezen zodat de termen in deze som die nul zijn niet meer voorkomen in de som. Stellen we immers $n = 2k$ en laten we k variëren van $k = 3$ (dus $n = 6$) tot $k = 13$ (dus $n = 26$), dan verdwijnen de termen met oneven n uit de sommatie. We sommeren dan enkel over even n.

$$\sum_{n=6}^{26} \frac{1+(-1)^n}{n!} = \sum_{k=3}^{13} \frac{2}{(2k)!}$$

2. $\sum_{n=1}^{37} \frac{1-(-1)^n}{n^2} \cdot 3^n = \frac{2}{1^2} \cdot 3^1 + 0 + \dots 0 + \frac{2}{(37)^2} \cdot 3^{37}$

Er geldt dat

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 0, & \text{als } n \text{ even} \\ 2, & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$$

In de gegeven som varieert de sommatie-index n van 0 tot 37, maar de termen met even n zijn nul en hebben dus geen bijdrage in de som. We kunnen een andere sommatie-index k kiezen zodat de termen in deze som die nul zijn niet meer voorkomen in de som. Stellen we immers $n = 2k+1$ en laten we k variëren van $k = 0$ (dus $n = 1$) tot $k = 18$ (dus $n = 37$), dan verdwijnen de termen met even n uit de sommatie. We sommeren dan enkel over oneven n.

$$\sum_{n=1}^{37} \frac{1-(-1)^n}{n^2} \cdot 3^n = \sum_{k=0}^{18} \frac{2}{(2k+1)^2} \cdot 3^{2k+1}$$

Oefening 5.3.2.

Pas de sommatie-index aan in volgende sommen zodat er niet meer gesommeerd wordt over de termen die nul zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Rekenregels voor de sommatie $\sum$

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{23} \frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2-1}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{17} \frac{1-(-1)^n}{2} \cdot \frac{1}{n+1}$

CC BY-NC-SA 4.0

5.3.A Oefeningen sommatieteken

5.3.A.1 Niveau 1

Oefening 5.3.3. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{k=2}^{5} k = \ldots\ldots$
2. $\sum_{k=1}^{3} 10 = \ldots\ldots$
3. $\sum_{i=2}^{5} (2i+1)^2 = \ldots\ldots$
4. $\sum_{l=3}^{6} 4 = \ldots\ldots$
5. $\sum_{m=2}^{4} \frac{20}{m} = \ldots\ldots$

5.3.A.2 Niveau 2

Oefening 5.3.4. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{k=1}^{3} k^2 = \ldots\ldots$
2. $\sum_{k=2}^{4} 2^k = \ldots\ldots$
3. $\sum_{k=1}^{3} 3 = \ldots\ldots$
4. $\sum_{a=0}^{5} (2a+1) = \ldots\ldots$
5. $\sum_{l=1}^{4} (5l-1) = \ldots\ldots$
6. $\sum_{i=1}^{6} \frac{60}{i} = \ldots\ldots$

Oefening 5.3.5. Bereken volgende sommen:

CC BY-NC-SA 4.0

5.3.A Oefeningen sommatieteken

1. $\sum_{k=1}^{3} k^3 = \dots\dots$
2. $\sum_{k=-3}^{3} k^3 = \dots\dots$
3. $\sum_{k=-30}^{30} k^3 = \dots\dots$
4. $\sum_{n=-k}^{k} n^3 = \dots\dots \quad (k \in \mathbb{N})$

Oefening 5.3.6. Schrijf met een sommatieteken:

1. $2+5+10+17+26 = \sum_{k=1}^{5} \dots\dots$
2. $2+6+12+20+30 = \sum_{k=2}^{6} \dots\dots$
3. $1-3+5-7+9-11+13 = \sum_{k=1}^{7} \dots\dots$
4. $u_0 - 2u_1 + 3u_2 - 4u_3 + 5u_4 - 6u_5 + 7u_6 - 8u_7 + \cdots + 129u_{128} - 130u_{129} = \sum_{k=0}^{129} \dots\dots$
5. $a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_4 + a_4b_5 = \dots\dots$
6. $a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1 = \dots\dots$

Oefening 5.3.7. Vul aan.

1. $\sum_{k=1}^{3} k^2 = \sum_{k=1}^{2} k^2 + \dots\dots$
2. $\sum_{m=2}^{5} 4m = \dots\dots + \sum_{m=3}^{5} 4m$
3. $\sum_{k=1}^{3} k^2 = \sum_{k=3}^{\cdots\cdots} \dots\dots$
4. $\sum_{m=2}^{5} 2^m = \sum_{p=5}^{\cdots\cdots} 2^{\cdots\cdots}$

Oefening 5.3.8. Vul aan:

CC BY-NC-SA 4.0

5.3.A Oefeningen sommatieteken

1. $\sum_{i=1}^{4} 3i^2 = \sum_{j=5}^{\ldots\ldots} \ldots\ldots$
2. $\sum_{i=3}^{5} \left(2i^2+3\right) = \sum_{i=3}^{4} \left(2i^2+3\right) + \ldots\ldots$
3. $\sum_{k=1}^{n+1} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 + \ldots\ldots$

Oefening 5.3.9. Reken onderstaande sommen uit als je weet dat $\sum_{m=4}^{8} x_m = 10$, $\sum_{m=4}^{8} y_m = 15$ en $x_3 = 2$.

1. $\sum_{m=4}^{8} \left(y_m + 3\right) = \ldots\ldots$
2. $\sum_{m=4}^{8} \left(8x_m + 2\right) = \ldots\ldots$
3. $\sum_{m=3}^{8} \frac{x_m}{4} = \ldots\ldots$
4. $\sum_{k=1}^{6} x_{k+2} = \ldots\ldots$

5.3.A.3 Niveau 3

Oefening 5.3.10. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{i=m}^{m+5} k = \ldots\ldots \quad (m \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{R})$
2. $\sum_{k=0}^{3} \sin^2\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \ldots\ldots$
3. $\sum_{k=1}^{5} (n-k) - 7 = \ldots\ldots \quad (n \in \mathbb{R})$
4. $\sum_{p=0}^{8} 10^{5-p} = \ldots\ldots$
5. $\sum_{n=2}^{5} \left(\sum_{k=1}^{n} n\right) = \ldots\ldots$
6. $3\sum_{j=0}^{3} k + j = \ldots\ldots \quad (j,k \in \mathbb{R})$

CC BY-NC-SA 4.0

5.3.A Oefeningen sommatieteken

Oefening 5.3.11. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{j=0}^{5} 2^k = \ldots\ldots$ met $k \in \mathbb{R}$

2. $\sum_{k=17}^{21} 5 + \sqrt[k]{1+k} = \ldots\ldots$ met $k \in \mathbb{R}_0$

Oefening 5.3.12. Schrijf met een sommatieteken

1. $\sin x + \cos 2x + \sin 3x + \cos 4x + \sin 5x + \cos 6x + \sin 7x + \cos 8x + \sin 9x + \cos 10x.$

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 De faculteit $n!$

De macht a^n is een korte notatie voor het product van n keer hetzelfde getal a, namelijk $a \cdot a \cdot \cdots \cdot a = a^n$.

Analoog is $n!$ een korte notatie voor het product van alle getallen van 1 tot een bepaald getal n, namelijk $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = n!$.

We lezen $n!$ als n-faculteit of de faculteit van n.

De faculteit komt bijvoorbeeld voor bij de binomiaalgetallen (en dus bij het binomium van Newton), bij telproblemen, kansberekeningen en statistiek, maar ook in de analyse, bijvoorbeeld bij taylorreeksen.

Definitie 5.4.1 (Faculteit)**.** De **faculteit** van een natuurlijk getal $n!$ (lees: n-faculteit) is

$$n! \stackrel{\text{def}}{=} n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{als } n \in \mathbb{N}_0$$

$$0! \stackrel{\text{def}}{=} 1.$$

We kunnen natuurlijk de volgorde van de factoren omkeren, en ook schrijven:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Voorbeeld 5.4.1.

1. $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
2. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 4! = 120$
3. $100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
4. $\dfrac{100!}{98!} = \dfrac{100 \cdot 99 \cdot \cancel{98} \cdot \cancel{97} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{98} \cdot \cancel{97} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 100 \cdot 99 = 9900$
5. $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 = \dfrac{50!}{46!}$

De voorbeelden illustreren volgende rekenregels voor de faculteitsoperatie:

Eigenschap 5.4.1.

$$n! = n(n-1)! \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$$(n+1)! = (n+1)n! \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{n!}{p!} = \frac{n(n-1)\ldots(p+1)\cancel{p} \cdot \cancel{(p-1)} \ldots \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{p} \cdot \cancel{(p-1)} \ldots \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = n(n-1)\ldots(p+1) \qquad p < n$$

Merk op dat de eerste twee regels precies hetzelfde zeggen namelijk dat de faculteit van een natuurlijk getal gelijk is aan het product van dat getal met de faculteit van het vorige natuurlijke getal.

Opmerking 5.4.1. Je kan geen factor buiten haakjes brengen:

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ en $6! = (2 \cdot 3)!$,

maar $6! \neq 2 \cdot 3! = 2 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)$

CC BY-NC-SA 4.0

5.4.A Oefeningen faculteit

5.4.A.1 Niveau 1

Oefening 5.4.1. Bereken:

1. $7! = \ldots\ldots$
2. $6 \cdot 5! \cdot 7 = \ldots\ldots$ (korte formule) $= \ldots\ldots$ (getal)
3. $\dfrac{10!}{7!} = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{1984!}{1983!} = \ldots\ldots$

5.4.A.2 Niveau 2

Oefening 5.4.2. Vereenvoudig. ($k, n \in \mathbb{N}$ en $k + n \geqslant 2$)

1. $\dfrac{(k+1)!}{k!} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{(k+3)!}{k!} = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{(k+n)!}{k+n-1} = \ldots\ldots$

Oefening 5.4.3. Vereenvoudig. ($m, n \in \mathbb{N}$ met $m \neq 0$ en $n < m - 1$)

1. $\dfrac{m!}{(m-1)!} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{(m+4)!}{m!} = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{(m-n)!}{(m-n-1)(m-n)} = \ldots\ldots$

Oefening 5.4.4. Vul aan. ($k, l, m \in \mathbb{N}$ en $l \geqslant 3$)

1. $(k+1)! + k! = (\ldots\ldots)k!$
2. $3(l-2)! + 2(l-3)! = (\ldots\ldots)(l-3)!$
3. $\dfrac{1}{(k-1)! \cdot (n+1)!} + \dfrac{1}{k! \cdot n!} = \dfrac{\ldots\ldots}{k! \cdot (n+1)!}$

Oefening 5.4.5. Juist of fout? ($n, k, l \in \mathbb{N}_0$ en $l < k$)

1. $(n+4)!(n+3) \stackrel{?}{=} (n+3)!$ Juist | Fout
2. $(n+4)(n+3)! \stackrel{?}{=} (n+3)!$ Juist | Fout

CC BY-NC-SA 4.0

5.4.A Oefeningen faculteit

3. $(n+4)(n+3)! \stackrel{?}{=} (n+4)!$ Juist | Fout

4. $\frac{(n+4)!}{(n+3)} \stackrel{?}{=} (n+3)!$ Juist | Fout

5. $\frac{(n+4)!}{(n+4)} \stackrel{?}{=} (n+3)!$ Juist | Fout

6. $\frac{(n+4)!}{(n+3)!} \stackrel{?}{=} (n+4)!$ Juist | Fout

7. $\frac{(n+4)!}{(n+3)!} \stackrel{?}{=} (n+4)$ Juist | Fout

8. $\frac{(n+4)!}{4!} \stackrel{?}{=} n!$ Juist | Fout

9. $\frac{(4n)!}{4} \stackrel{?}{=} n!$ Juist | Fout

10. $\frac{n!4!}{5!} \stackrel{?}{=} \frac{n!}{5}$ Juist | Fout

11. $\frac{n!6!}{(n-1)!5!} \stackrel{?}{=} 6n$ Juist | Fout

12. $\frac{k!}{(k+2)!(k-l-1)!} \stackrel{?}{=} \frac{k!(k-l)}{(k+2)!(k-l)!}.$ Juist | Fout

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Binomiaalgetallen

We definiëren een handige notatie voor getallen die in allerlei contexten opduiken:

Definitie 5.5.1 (Binomiaalgetallen)**.**

Het **binomiaalgetal** n **over** p, genoteerd $\binom{n}{p}$, van twee natuurlijke getallen n en p met $p \leq n$ is

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Opmerking 5.5.1.

(a) Men leest $\binom{n}{p}$ als 'n over p' of als 'n kies p'.
Maar, let hiermee op want ook de breuk $\frac{n}{p}$ wordt soms gelezen als n over p.

(b) Deze getallen komen voor in het Binomium van Newton, en dat verklaart de naam *binomiaal*getallen.

(c) Deze getallen komen ook voor bij de studie van telproblemen: $\binom{n}{p}$ is precies gelijk aan het aantal *deelverzamelingen* van p elementen uit een verzameling van n elementen. Dat aantal wordt ook genoteerd als C_n^p. Er geldt dus dat (let op de omwisseling van de sub- en superscripts!):

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Voorbeeld 5.5.1 (Basisvoorbeeld)**.**

(a) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = 10 \quad (= C_5^3)$

(b) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \binom{5}{3} = 10$ (zie hierboven)

(c) $\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!0!} = 1 \quad (= C_2^2)$ (want $0! = 1$)

(d) $\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!4!} = 1 \quad (= C_4^0)$

(e) $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot 3!}{3!} = 4 \quad (= C_4^1)$ (want $4! = 4 \cdot 3!$).

Volgende rekenregels kunnen eenvoudig worden afgeleid uit de definitie (behalve de laatste: daar is zelf het bewijs vinden wat uitdagender, maar niet onmogelijk).

Eigenschap 5.5.1 (Rekenregels binomiaalgetallen)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Binomiaalgetallen

Voor natuurlijke getallen n en p met $p \leq n$ geldt:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} &= \binom{n}{n-p} \\
\binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1 \\
\binom{n}{1} &= \binom{n}{n-1} = n \qquad n \geq 1 \\
\binom{n+1}{p} &= \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \qquad p \geq 1
\end{aligned}$$

Volgende eigenschap is een veralgemening van merkwaardige producten als:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

Bijvoorbeeld de laaste vergelijking kunnen we ook schrijven als

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4.$$

Deze eigenschap levert ook de verklaring voor het woord *binomiaal*, want een '*bi*noom' is een '*twee*term' (net zoal een *mo*noom een *één*term is, en een *poly*noom een *veel*term). De binomiaalgetallen $\binom{n}{p}$ zijn dus precies die coëfficiënten die opduiken bij de p-de term als je een binoom verheft tot de n-de macht. We gebruiken het sommatieteken $\sum$:

Eigenschap 5.5.2 (Binomium van Newton)**.**

Zij $a, b \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$. Dan geldt

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$$

Omdat $(a+b)^n = (b+a)^n$ geldt ook dat

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^p b^{n-p}.$$

Oefening 5.5.1. Bereken volgende uitdrukkingen.

1. $\binom{5}{1} = \ldots\ldots$
2. $\binom{20}{19} = \ldots\ldots$
3. $\binom{2019}{1302} + \binom{2019}{1301} = \binom{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$
4. $\binom{42}{20} - \binom{42}{22} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Binomiaalgetallen

5. $\binom{k+1}{k} = \ldots\ldots$

Oefening 5.5.2. Juist of fout?

1. $\binom{2k}{k} = \frac{2}{k!}$

Juist	Fout

CC BY-NC-SA 4.0

5.5.A Herhaling somteken, faculteit en binomiaalgetallen

5.5.A.1 Niveau 2

Oefening 5.5.3. Vul aan: $(m \in \mathbb{N})$

1. $\dfrac{4}{(m+1)!} - \dfrac{1}{m!} = \dfrac{\dots\dots}{(m+1)!}$
2. $\displaystyle\sum_{k=5}^{14} k^2 = \sum_{l=1}^{10} \dots\dots$
3. $(m+2)! + (m+3)! = (m+2)!(\dots\dots)$

Oefening 5.5.4. Schrijf volgende sommaties voluit.

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} 2ju_{2j}^2 = \dots\dots$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \dots\dots$

Oefening 5.5.5. Juist of fout? ($n, k, l \in \mathbb{N}_0$ en $a, b \in \mathbb{R}$ en $p \in \mathbb{N}$ met $n > p$ en $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$)

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2+k) \stackrel{?}{=} 2n + \sum_{k=1}^{n} k.$ Juist | Fout
2. $\binom{5}{1} \stackrel{?}{=} \binom{5}{4}$ Juist | Fout
3. $\binom{2}{0} \stackrel{?}{=} \binom{2}{2}$ Juist | Fout
4. $\binom{n}{p} \stackrel{?}{=} \binom{n}{n-p}$ Juist | Fout
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(ak^2+b\right) \stackrel{?}{=} a\sum_{k=1}^{n} k^2 + b$ Juist | Fout
6. $\displaystyle\sum_{l=1}^{n+1}(l+1)^2 \stackrel{?}{=} \sum_{l=1}^{n}(l+1)^2 + (n+1)^2$ Juist | Fout
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \stackrel{?}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$ Juist | Fout

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 6
Veeltermen

(Versie 2026/11/23H.2)

6.1 Begintest Veeltermen

Indien je deze oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je het hoofdstuk Veeltermen verder overslaan.

Oefening 6.1.1. Geef het tekenverloop van de functie f met het gegeven functievoorschrift. (Bepaal het nulpunt/ de nulpunten van de functie en vul de correcte tekens aan in de tabel.)

1. $f(x) = -x + 8$

x		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

2. $f(x) = x^2 + 5x - 6$

x		$\ldots\ldots$		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

Oefening 6.1.2. Voor een veelterm $p(x)$ van graad 2 geldt: de hoogstegraadscoëfficiënt is 2, $p(1) = 3$ en $p(-1) = -3$. Wat is de constante term van $p(x)$? $\ldots\ldots$

Oefening 6.1.3.

1. De Euclidische deling van de veelterm $ax^2 + bx + c$ door $x - 3$ heeft als quotiënt $3x + 1$ en rest $r \in \mathbb{R}$. Wat is de waarde van b in deze veelterm?

$b = \ldots\ldots$

Oefening 6.1.4. Ontbind in factoren van zo laag mogelijke graad.

1. $2x^2 + 5x + 3 = (x + \ldots\ldots)(\ldots\ldots x + \ldots\ldots)$

2. $2x^3 + x^2 - 8x + 5 = (x - \ldots\ldots)^2(\ldots\ldots x + \ldots\ldots)$

Oefening 6.1.5. Schrijf als één breuk door de breuken op te tellen.

1. $\dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{x(x+1)} = \dfrac{(\ldots\ldots)x + \ldots\ldots}{x^2(x+1)}$

CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Eerstegraadsveeltermen

De meest eenvoudige veeltermen zijn die van de *eerste graad*. We bespreken hier enkele eigenschappen, en leggen het verband tussen de verwante begrippen *veelterm*, *functie* en *vergelijking*.

Definitie 6.2.1. Voor reële getallen a en b met $a \neq 0$ geldt:

- Een **eerstegraads*veelterm* in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax + b$$
- Aan dergelijke veelterm is volgende **eerstegraads*functie*** geassocieerd:
$$x \mapsto ax + b$$
- Een **eerstegraads*vergelijking*** (of ook ***lineaire* vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax + b = 0$$

Opmerking 6.2.1.

- Het woord *lineair* betekent in eerste instantie 'zoals een *lijn*', dus 'zoals een rechte'. Omdat een rechte een vergelijking heeft van de eerste graad, is het gebruik van het woord *lineair* uitgebreid naar 'van de eerste graad'. Voor vergelijkingen zijn 'lineair' en 'van de eerste graad' dus synoniemen. Maar voor functies heeft het begrip lineair in de wiskunde een beperktere en meer technische betekenis. Een functie is *lineair* als voor alle getallen a en b geldt dat $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$. In die betekenis is de functie $x \mapsto 2x$ wel degelijk lineair, maar de functie $x \mapsto 2x + 1$ is *niet* lineair. Daarom vermijden we het gebruik van het woord *lineair* voor functies en spreken we steeds over *eerstegraadsfuncties*. In sommige handboeken worden echter andere afspraken gemaakt.
- In de uitdrukking $ax + b$ heeft de letter x de rol van *variabele* of *onbekende*, terwijl de letters a en b *parameters* of *constanten* zijn en dus *willekeurige getallen* voorstellen. In plaats van x worden soms ook y, z of t gebruikt, en voor a en b komen ook $k, l, p, q, m, \alpha, \beta, \ldots$ dikwijls voor.

  Bij functies moet je dus steeds duidelijk aangeven *welke letter* de rol van variabele of onbekende heeft, en welke letters als parameters worden gebruikt. De notatie $x \mapsto ax + b$ zegt precies dat x de variabele is, terwijl z de variabele is in $z \mapsto pz + q$, en a de variabele is in $a \mapsto 2a + 3$.

Voorbeeld 6.2.1.

- $7x + 9$ is een eerstegraadsveelterm (in x).
- $x \mapsto 7x + 9$ is een eerstegraadsfunctie (met variabele x).
- $7x + 9 = 0$ is een eerstegraadsvergelijking (in één onbekende x).

Eigenschap 6.2.1. Voor een eerstegraadsfunctie $x \mapsto ax + b$, met $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, geldt:

- de grafiek van de functie is een **rechte** met vergelijking $y = ax + b$ en **richtingscoëfficiënt** a.
- als a positief is, is de functie strikt **stijgend** en als a negatief is de functie strikt **dalend**.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de y-as is het punt $(0, b)$.

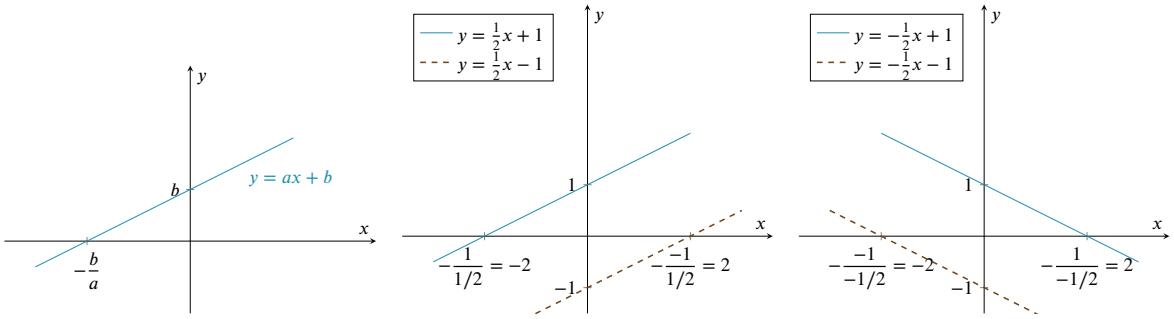
CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Eerstegraadsveeltermen

- het (enige) snijpunt van de grafiek met de x-as is het punt $(-\frac{b}{a}, 0)$. Het getal $-\frac{b}{a}$ is ook het (enige) *nulpunt* van de functie, en de (enige) oplossing van de vergelijking $ax + b = 0$.

Dit leidt tot volgend **tekenverloop** (ook *tekentabel*) voor de functie $x \mapsto ax + b$:

x		$-b/a$	
$ax+b$ met $a>0$	$-$	0	$+$
$ax+b$ met $a<0$	$+$	0	$-$



Opmerking 6.2.2.

- We spreken van *nulpunten* van een functie, *oplossingen* van een vergelijking en *nulpunten* (of *wortels*) van veeltermen. In deze cursus spreken we niet over nulwaarde van een functie, maar wel over nulpunt van een functie.
- als $a = 0$ reduceert de functie zich tot $x \mapsto 0x + b = b$, en dat is geen eerstegraadsfunctie maar een *constante* functie. De grafiek is dan de *horizontale* rechte met vergelijking $y = b$. Deze functie heeft *geen nulpunten* (de grafiek heeft dus geen snijpunten met de x-as), tenzij ook $b = 0$. In dat laatste geval zijn er *oneindig veel nulpunten* (dus snijpunten), want dan is de functie de nulfunctie $x \mapsto 0$.

Voorbeeld 6.2.2.

1. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $8 - 4x < 0$.

Uitwerking: De oplossing van $8 - 4x = 0$ is 2. De coëfficiënt $a = -4$ is negatief, dus is de tekentabel

x		2	
$8-4x$	$+$	0	$-$

De oplossingsverzameling is dus $V =]2, +\infty[$.

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Tweedegraadsveeltermen

Definitie 6.3.1. Voor reële getallen a, b, c met $a \neq 0$ geldt:

- Een **tweedegraadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax^2 + bx + c$$
- Aan dergelijke veelterm is volgende **(kwadratische) functie** geassocieerd:
$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$
- Een **tweedegraadsvergelijking** (ook **vierkantsvergelijking** of **kwadratische vergelijking**) **in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Voorbeeld 6.3.1.

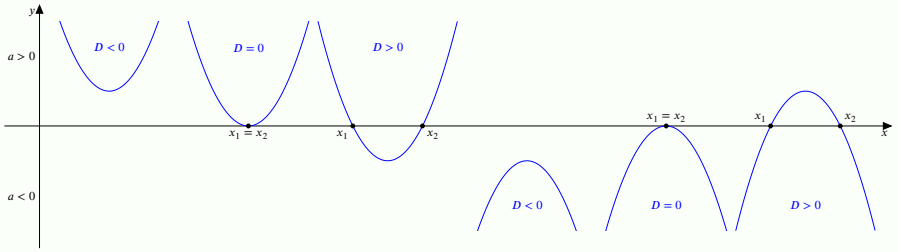
- $7x^2 + 2x + 4$ is een tweedegraadsveelterm. We noteren ook $p(x) = 7x^2 + 2x + 4$.
- $x \mapsto 7x^2 + 2x + 4$ is een kwadratische functie. We noteren ook $f : x \mapsto 7x^2 + 2x + 4$.
- $7x^2 + 2x + 4 = 0$ is een vierkantsvergelijking.

Eigenschap 6.3.1. Voor de functie $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$ geldt:

- de grafiek van f is een **parabool** met vergelijking $y = ax^2 + bx + c$.
- als a negatief is, is dat een **bergparabool**, als a positief is, is dat een **dalparabool**.
- het (enige) snijpunt van de grafiek met de y-as is het punt $(0, c)$.
- de nulpunten van f vinden we met behulp van de **discriminant** $D = b^2 - 4ac$ waarbij geldt dat
  - Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende reële** nulpunten.
  - Als $D = 0$ zijn er **twee gelijke reële** nulpunten.
  - Als $D < 0$ zijn er **geen reële** nulpunten.
- als $D \geq 0$ worden de nulpunten van $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ gegeven door
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{en} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{(wortelformule)}$$
  Deze nulpunten zijn ook de oplossingen van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$.
  Als $D > 0$ dan zijn de snijpunten van de grafiek met de x-as in $(x_1, 0)$ en $(x_2, 0)$.
  Als $D = 0$ is $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ en hebben we slechts 1 snijpunt met de x-as, in $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$.
- de functie f heeft volgend **tekenverloop** (of **tekentabel**):

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Tweedegraadsveeltermen



– Als $D > 0$ zijn er **twee verschillende nulpunten** $x_1 < x_2$, en volgend tekenverloop:

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c met $a>0$	$+$	0	$-$	0	$+$
ax^2+bx+c met $a<0$	$-$	0	$+$	0	$-$

– Als $D = 0$ zijn er **twee samenvallende nulpunten** $x_1 = x_2$, en volgend tekenverloop:

x		$x_1 = x_2$	
ax^2+bx+c met $a>0$	$+$	0	$+$
ax^2+bx+c met $a<0$	$-$	0	$-$

– Als $D < 0$ zijn er **geen nulpunten**, en volgend tekenverloop:

x	
ax^2+bx+c met $a>0$	$+$
ax^2+bx+c met $a<0$	$-$

- de **top** van de parabool heeft als coördinaten $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.
- bij een bergparabool is $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ het **maximum** van f, bij een dalparabool het **minimum**.
- de **symmetrie-as** is de verticale rechte door de top, met vergelijking $x = -\frac{b}{2a}$, deze symmetrie-as loopt in het midden tussen de nulpunten.

Voorbeeld 6.3.2.

1. Bereken de nulpunten van de functies $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2 - 1$ en $x \mapsto x^2 + 1$, en maak een tekening.

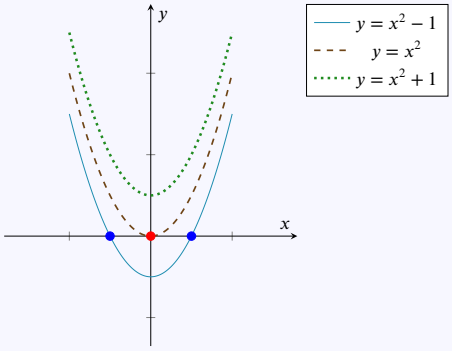
Uitwerking:

De nulpunten van $x \mapsto x^2$ zijn 0 (twee keer, maar aan elkaar gelijk), die van $x \mapsto x^2 - 1$ zijn ± 1, en $x \mapsto x^2 + 1$ heeft geen reële nulpunten.

De grafieken van de overeenkomstige functies – waarop het aantal nulpunten direct afleesbaar is – zijn:

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Tweedegraadsveeltermen



2. Zoek de nulpunten van $x \mapsto x^2 + 5x + 6$.

Uitwerking: De discriminant is $D = 25 - 4 \cdot 6 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \dfrac{-5+\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -2$ en $x_2 = \dfrac{-5-\sqrt{1}}{2 \cdot 1} = -3$.

3. Geef de symmetrie-as van de grafiek van de functie $x \mapsto x^2 + 5x + 6$.

Uitwerking: De vergelijking van de symmetrie-as is $x = -\dfrac{b}{2a}$, dus $x = -\dfrac{5}{2}$.

4. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

Uitwerking: We vinden dat $D = 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$. Dus $x_1 = x_2 = \dfrac{-6}{2 \cdot 9} = \dfrac{-1}{3}$.

5. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $x^2 + 5x + 6 \geqslant 0$.

Uitwerking: De nulpunten zijn $x_1 = -2$ en $x_2 = -3$. De coëfficiënt $a = 1$ is positief, dus is de tekentabel

x		$x_1 = -3$		$x_2 = -2$	
$x^2 + 5x + 6$	$+$	0	$-$	0	$+$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[$.

Eigenschap 6.3.2.

Als x_1 en x_2 de wortels zijn van $ax^2 + bx + c$, dan kunnen we deze veelterm **ontbinden in factoren**:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Voorbeeld 6.3.3. Ontbind $2x^2 + 5x + 3$ in factoren.

Uitwerking:

De discriminant is $D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, de nulpunten zijn $x_1 = \dfrac{-5+1}{4} = -1$ en $x_2 = \dfrac{-5-1}{4} = -\dfrac{3}{2}$, en dus

$$2x^2 + 5x + 3 = 2\,(x - (-1))\left(x - (-\frac{3}{2})\right) = 2\,(x+1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x+1)\,(2x+3)$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Tweedegraadsveeltermen

Waarschuwing 6.3.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

Een veelgemaakte fout bij het ontbinden in factoren van een tweedegraadsveelterm is het vergeten van de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm. Herneem vorig voorbeeld: Zowel $(x+1)(x+\frac{3}{2})$ als $2(x+1)(x+\frac{3}{2})$ hebben nulpunten -1 en $-\frac{3}{2}$, maar enkel $2(x+1)(x+\frac{3}{2}) = 2x^2+5x+3$.
Je kan narekenen dat $(x+1)(x+\frac{3}{2}) = x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2} \neq 2x^2+5x+3$.

Opmerking 6.3.1. Omdat $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2-ax(x_1+x_2)+ax_1x_2$ vinden we door gelijkstelling van de gelijknamige coëfficiënten van x ook dat

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{(som van de wortels)}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad \text{(product van de wortels)}$$

Het is dus niet nodig om de wortels zelf te berekenen als je enkel geïnteresseerd zou zijn in de som of het product van de wortels: die kan je immers beide direct afleiden uit de vergelijking.

CC BY-NC-SA 4.0

6.3.A Oefeningen eerste- en tweedegraadsveeltermen

6.3.A.1 Niveau 1

Oefening 6.3.1. Geef de symmetrie-as van de grafiek van volgende kwadratische functies.

1. $x \mapsto x^2 + 2x - 6$ heeft symmetrie-as: $x = \ldots\ldots$

2. $x \mapsto 3x^2 + 12x - 15$ heeft symmetrie-as: $x = \ldots\ldots$

Oefening 6.3.2. Zoek de snijpunten met de x-as en de y-as van de parabool met vergelijking $y = x^2 + x - 6$.

Oefening 6.3.3. Geef het tekenverloop van de functie f met het gegeven functievoorschrift. (Bepaal het nulpunt/ de nulpunten van de functie en vul de correcte tekens aan in de tabel.)

1. $f(x) = -x + 8$

x		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

2. $f(x) = -x^2 + 4x - 7$

x	
$f(x)$	$\ldots\ldots$

3. $f(x) = x^2 + 5x - 6$

x		$\ldots\ldots$		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

4. $f(x) = x^2 - 6x + 9$

x		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

5. $f(x) = -(x-2)(x+2)$

x		$\ldots\ldots$		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

6. $f(x) = 3x + 2$

x		$\ldots\ldots$	
$f(x)$	$\ldots\ldots$	0	$\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.3.A Oefeningen eerste- en tweedegraadsveeltermen

6.3.A.2 Niveau 2

Oefening 6.3.4. Ontbind in factoren.

1. $x^2 + x - 6 = \ldots\ldots$

2. $3x^2 + 12x - 15 = \ldots\ldots$

Oefening 6.3.5. Geef de oplossingen van volgende vierkantsvergelijkingen in onbekende x.

1. $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}(1-p) = 0$, met parameter $p > 0$.

2. $yx^2 + x - y = 0$, met parameter $y \neq 0$.

Oefening 6.3.6. Stel de vergelijking van de parabool met nulpunten in $(1,0)$ en $(4,0)$ op, die door het punt $(2,6)$ gaat. Schrijf de vergelijking in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.

Oefening 6.3.7. Welk van de volgende functievoorschriften hoort bij een bergparabool met snijpunt met de y-as in $(0,2)$?

Meerkeuze:

(a) $f(x) = x^2 + 2x + 2$

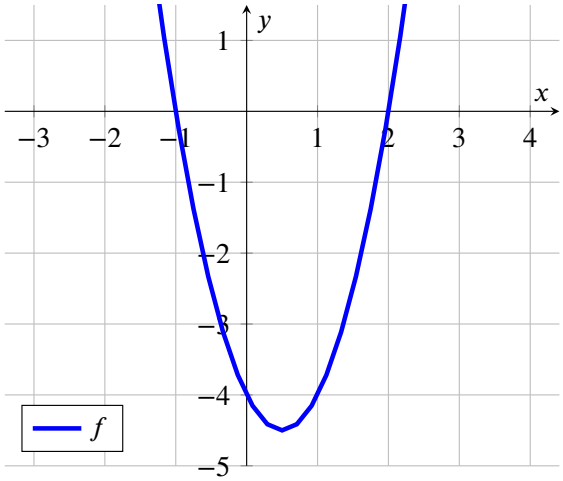
(b) $f(x) = -x^2 - 2x + 2$

(c) $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

(d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 2$

Oefening 6.3.8. Geef het functievoorschrift van de functie f waarvan de gegeven parabool de grafiek is. Geef het functievoorschrift in de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.

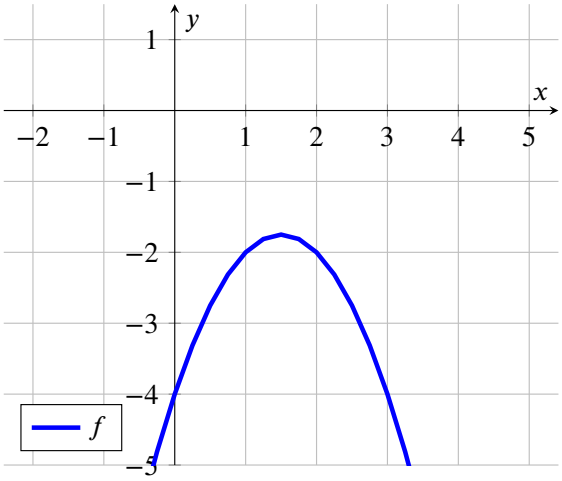
1. $f(x) = \ldots\ldots$



2. $f(x) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.3.A Oefeningen eerste- en tweedegraadsveeltermen



Oefening 6.3.9. Zoek de oplossingsverzameling van volgende ongelijkheden door het tekenverloop op te stellen:

1. $x^2 - 1 > 0$. Antwoord: ... ...

2. $x^2 - 2x - 3 > 0$. Antwoord: ... ...

3. $x^2 - 2x > 0$. Antwoord: ... ...

4. $-2x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$. Antwoord: ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 Veeltermen

Veronderstelde voorkennis: eenvoudige stelsels oplossen

Naar analogie met eerste- en tweedegraadsveeltermen definiëren we nu n-de graadsveeltermen.

Definitie 6.4.1 (Veelterm)**.** Zij $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ met $a_n \neq 0$.

- Een n-**de graadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

  De $a_i x^i$ zijn **termen** van de veelterm, de a_i zijn **coëfficiënten**, en n is de **graad**.
  Men noteert de graad van $p(x)$ met $\text{gr}(p(x)) \stackrel{\text{def}}{=} n$.

- Aan dergelijke veelterm $p(x)$ is volgende **veeltermfunctie** p geassocieerd:

$$p : x \mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Een n-**de graadsvergelijking in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

- De **getalwaarde** van $p(x)$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ is het getal $p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$.

Voorbeeld 6.4.1.

- $2x + 3$ is een eerstegraadsveelterm. De getalwaarde van $2x + 3$ in 3 is 9.
- $5x^2 + 7x + 1$ is een tweedegraadsveelterm.
- $x^{2026} - 1$ is een veelterm van graad 2026.
- 7 is een veelterm van graad 0.
- $ax + b$ met $a \neq 0$ kan gezien worden als een eerstegraadsveelterm, met 'parameters' of 'constanten' a en b in plaats van concrete getallen.
- $\sqrt{\pi}x^5 - e^y + \alpha^2$ kan gezien worden als een veelterm in x van de vijfde graad, met parameters y en α.
- $x^2 - e^x$ is *geen* veelterm in x wegens de exponentiële functie.
- Je kan ook veeltermen in andere letters tegenkomen: $5t^2 + 3t$ en $t + \cos\alpha$ zijn veeltermen in t, en $e^{2x}u^2 - 1$ is een veelterm in u (maar niet in x).

Opmerking 6.4.1.

- Volgens deze definitie is een veelterm dus een formele *uitdrukking* (of een *formule*: een reeks letters, cijfers en enkele symbolen zoals + en −). We *rekenen* met dergelijke uitdrukkingen volgens voor de hand liggende rekenregels zoals:

$$2x + 3x = 5x$$

$$2 \cdot (5x) = 10x$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 Veeltermen

$$(2x) \cdot (5x) = 10x^2$$

- Veeltermen zijn de functies die met enkel de elementaire bewerkingen optellen en vermenigvuldigen kunnen worden berekend. Je zal later zien dat veel functies goed kunnen worden *benaderd* door veeltermen.
- Een veelterm met één term noemen we een *term*, *éénterm* of *monoom*. Een veelterm met twee termen is een *tweeterm* of *binoom*. En één met *veel termen* is dus een *veel*term of *polynoom*.
- De getalwaarde van een veelterm in 0 is precies de constante term a_0 van de veelterm:

$$p(0) = a_n 0^n + a_{n-1} 0^{n-1} + \ldots + a_2 0^2 + a_1 0 + a_0 = a_0$$

- Met het sommatieteken kunnen we een veelterm ook schrijven als

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Oefening 6.4.1. Voor een veelterm $p(x)$ van graad 2 geldt: de hoogstegraadscoëfficiënt is 2, $p(1) = 3$ en $p(-1) = -3$. Wat is de constante term van $p(x)$? ... ...

Definitie 6.4.2 (Nulpunten van veeltermen)**.**

Een **nulpunt** (ook **nulwaarde** of **wortel**) van een veelterm $p(x)$ is een reëel getal a waarvoor $p(a) = 0$.

Oefening 6.4.2. Voor een veelterm $p(x)$ van graad 2 geldt: de constante term is 2, $x = 1$ is een nulpunt en $p(-1) = 6$. Wat is $p(2)$?

$p(2) = \ldots \ldots$

Het zoeken van nulpunten is precies hetzelfde als het oplossen van vergelijkingen:

Eigenschap 6.4.1 (Verband tussen nulpunten van veeltermen en oplossingen van vergelijkingen)**.**

De *nulpunten* van een veelterm $p(x)$ zijn de *oplossingen* van de *vergelijking* $p(x) = 0$.

Voorbeeld 6.4.2 (Nulpunten van eenvoudige veeltermen)**.**

1. Het getal 3 is een nulpunt van $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ omdat $p(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$.
2. Het getal 3 is een oplossing van de vergelijking $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.
3. De veelterm $x - 5$ heeft 5 als nulpunt(en).
4. De veelterm $x^2 - 4$ heeft -2 en 2 als nulpunt(en).
5. De veelterm $x^2 + 4$ heeft geen enkel reëel getal als nulpunt(en).

Er zijn relatief eenvoudige procedures om nulpunten te vinden van eerstegraadsveeltermen en tweedegraadsveeltermen. Er bestaan ook (ingewikkeldere) algoritmes voor het vinden van de nulpunten van veeltermen van de derde en vierde graad. Evariste Galois heeft in het begin van de negentiende eeuw aangetoond dat er voor vijfdegraadsveeltermen *geen* algemene procedure *kan* bestaan die alleen gebruik maakt van zogenaamde algebraïsche bewerkingen: optellen/aftrekken, vermenigvuldigen/delen en machtsverheffen/worteltrekken.

CC BY-NC-SA 4.0

6.4 Veeltermen

Een veelterm $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ is per definitie een *som* van termen (vandaar de naam *veel-term*). Het is dikwijls handig om dergelijke som van termen ook te kunnen schrijven als een *product* van factoren. De uitdrukking 'ontbinden in factoren' betekent precies het schrijven van dergelijke som als een product:

Definitie 6.4.3 (Ontbinden in factoren)**.**

Een veelterm $d(x)$ is een **factor** van een veelterm $p(x)$ als we $p(x)$ kunnen schrijven als een product van $d(x)$ met een andere veelterm.

Dus: $d(x)$ is een *factor* van $p(x)$ als $p(x) = d(x) \cdot q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$.

Een factor van de nulde graad (dus een getal) is een **triviale factor**. We beschouwen die niet als 'echte' factor.

Een veelterm $p(x)$ **ontbinden in factoren** betekent hem schrijven als een product van zo veel mogelijk niet-triviale factoren.

Voorbeeld 6.4.3 (Ontbinden in factoren)**.**

1. $x + 1$ is een factor van $x^2 - 1$ want $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

2. De veelterm $x^2 - 1$ kan ontbonden worden in de factoren $x+1$ en $x-1$ want $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Tot slot definiëren we nog wanneer twee veeltermen van dezelfde graad gelijk zijn aan elkaar. Veeltermen die niet dezelfde graad hebben kunnen niet gelijk zijn aan elkaar.

Definitie 6.4.4 (Gelijkheid van veeltermen)**.**

Twee veeltermen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

en

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

van dezelfde graad n zijn **gelijk** als de overeenkomstige coëfficiënten gelijk zijn:

$$a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Euclidisch deling van veeltermen

We bekijken eerst de deling met rest voor natuurlijke getallen.

Voorbeeld 6.5.1 (Delen-met-rest voor natuurlijke getallen.).

Zeggen dat de deling van 13 door 4 gelijk is aan 3 met rest 1, betekent dat

$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

omdat 4 hoogstens 3 keer in 13 kan, en er blijft dan nog 1 over.

Op dezelfde manier betekent 20 delen door 3 dat

$$20 = 6 \cdot 3 + 2$$

of met symbolen: als we *deeltal* D delen door *deler* d, krijgen we *quotiënt* q en *rest* r als volgende formule geldt:

$$D = q \cdot d + r \text{ met } r < d.$$

Daarbij is het erg belangrijk dat $r < d$. Als dat niet het geval is, heb je nog niet ver genoeg gedeeld, want je kan dan de rest r nog verder delen door d.

Men kan ook voor veeltermen volgende eigenschap bewijzen:

Eigenschap 6.5.1 (Euclidische deling).

Als $p(x)$ en $d(x)$ twee willekeurige veeltermen zijn,

dan bestaan er unieke veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ zodat volgende gelijkheid geldt

$$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x) \quad \text{met } \mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$$

Opmerking 6.5.1.

Let op de strikte ongelijkheid $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$. Dus $\mathrm{gr}(r(x))$ mag niet gelijk zijn aan $\mathrm{gr}(d(x))$.

Voorbeeld 6.5.2 (Voorbeelden deling van veeltermen).

$p(x) = x^2 + 2x$	en	$d(x) = x + 2$,	dan is $q(x) = x$ en $r(x) = 0$
$p(x) = x^2 + x$	en	$d(x) = x^2$,	dan is $q(x) = 1$ en $r(x) = x$
$p(x) = x + 1$	en	$d(x) = x$,	dan is $q(x) = 1$ en $r(x) = 1$
$p(x) = x$	en	$d(x) = x^2$,	dan is $q(x) = 0$ en $r(x) = x$

Definitie 6.5.1 (Euclidische deling van veeltermen).

Als $p(x)$ en $d(x)$ twee willekeurige veeltermen zijn, en $q(x)$ en $r(x)$ zijn de bijhorende unieke veeltermen zodat $p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$, waarbij $\mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$,

dan noemen we $p(x)$ het **deeltal**, $d(x)$ de **deler**, $q(x)$ het **quotiënt** en $r(x)$ de **rest**.

Als $r(x) = 0$ zegt men dat de veelterm $p(x)$ **deelbaar is door** de veelterm $d(x)$.

Opmerking 6.5.2.

Als de veelterm $p(x)$ **deelbaar is door** de veelterm $d(x)$ wil dit dus zeggen dat er een unieke veelterm $q(x)$ bestaat zodat $p(x) = q(x) \cdot d(x)$.

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Euclidisch deling van veeltermen

Voorbeeld 6.5.3 (Deelbaarheid van veeltermen)**.**

$2x^4-4x^3+x^2-x-2$ is deelbaar door $2x^3+x+1$ want $2x^4-4x^3+x^2-x-2=(x-2)(2x^3+x+1)$. (Reken na door de haakjes van het rechterlid uit te werken.) We kunnen eveneens zeggen dat $2x^4-4x^3+x^2-x-2$ deelbaar is door $x-2$.

We bestuderen nu het algoritme dat voor een gegeven veelterm $p(x)$ en een gegeven deler $d(x)$ het quotiënt en de rest berekent. Het algoritme levert dus twee veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ op zodat

$$p(x)=q(x)\cdot d(x)+r(x) \quad \text{met } \operatorname{gr}(r(x))<\operatorname{gr}(d(x))$$

net zoals de bekende staartdeling voor een gegeven natuurlijk getal D en een deler d twee nieuwe getallen q en r oplevert zodat

$$D=q\cdot d+r \quad \text{met } r<d.$$

Voorbeeld 6.5.4 (Algoritme Euclidische deling stap per stap uitgelegd)**.**

Bereken het quotiënt en de rest van de deling van de veelterm $2x^3+x^2-5x+2$ door de veelterm $x-3$.

Volgens de definitie hierboven moeten we dus op zoek naar de veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ die horen bij $p(x)=2x^3+x^2-5x+2$ (het deeltal) en $d(x)=x-3$ (de deler).

We gebruiken een aangepaste vorm van de staartdeling van natuurlijke getallen. Bestudeer het schema samen met de uitleg.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 2x^3 & + & x^2 & - & 5x & + & 2 & x-3 \\
\text{(b)} - & 2x^3 & - & 6x^2 & & & & & \hline \\
 & & & 7x^2 & - & 5x & + & 2 & 2x^2+7x+16 \\
 & & \text{(d)} - & 7x^2 & - & 21x & & & \text{(a)}\quad\text{(c)}\quad\text{(e)} \\
 & & & & & 16x & + & 2 & \\
 & & & & \text{(f)} - & 16x & - & 48 & \\
 & & & & & & & 50 & \\
 & & & & & & & \text{(g)} &
\end{array}$$

(a) Deel de hoogstegraadsterm van $p(x)$ door de hoogstegraadsterm van $d(x)$. Dus deel $2x^3$ door x. Schrijf dit 'voorlopig quotiënt' $2x^3/x=2x^2$ in de rechterkolom.

(b) Vermenigvuldig de deler $x-3$ met het 'voorlopig quotiënt' $2x^2$ en schrijf dit product $(x-3)\cdot 2x^2=2x^3-6x^2$ onder het deeltal. Trek dit product $2x^3-6x^2$ af van het deeltal $2x^3+x^2-5x+2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen tegen elkaar weg. De 'voorlopige rest' is $2x^3+x^2-5x+2-(2x^3-6x^2)=7x^2-5x+2$. Die 'voorlopige rest' is nog te groot, want de graad 2 van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad 1 van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

(c) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de 'voorlopige rest' (dus $7x^2$) door de hoogstegraadsterm van de deler $x-3$, dus door x. Voeg deze component $7x^2/x=7x$ toe aan het 'voorlopig quotiënt' in de rechterkolom.

(d) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x-3$ met deze nieuwe component $7x$ en schrijf het product $7x\cdot(x-3)$ onder de 'voorlopige rest' $7x^2-5x+2$. Trek het product $7x^2-21x$ af van de 'voorlopige rest' $7x^2-5x+2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen weer tegen elkaar weg. De nieuwe 'voorlopige rest' is $7x^2-5x+2-(7x^2-21x)=16x+2$. Deze 'voorlopige rest' $16x+2$ is nog te groot, want de graad van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Euclidisch deling van veeltermen

(e) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de nieuwe 'voorlopige rest' $(16x)$ door x. Voeg 16 toe als nieuwe component van het 'voorlopig quotiënt'.

(f) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x-3$ met die nieuwe component 16 en trek het product $16(x-3)$ af van de huidige 'voorlopige rest' $16x+2$. Dit geeft de nieuwe 'voorlopige rest' 50.

(g) Omdat de graad van deze 'voorlopige rest' strikt kleiner is dan de graad van de deler, is het onmogelijk dat we de rest nog kunnen schrijven als een product van de deler met nog iets. Dit beëindigt dus de procedure. 50 is de uiteindelijke rest, en $2x^2+7x+16$ is het uiteindelijke quotiënt.

Besluit: $2x^3+x^2-5x+2=(2x^2+7x+16)(x-3)+50$

De algemene procedure is als volgt:

Eigenschap 6.5.2 (Algoritme Euclidische deling)**.**

Om een veelterm $p(x)$ te delen door een veelterm $d(x)$ ga je als volgt te werk:

(a) Plaats deeltal $p(x)$ en deler $d(x)$ in een *deelschema*, door ze te rangschikken volgens dalende machten van x en de ontbrekende machten in het deeltal aan te vullen met coëfficiënten nul (of open plaatsen).

(b) Deel de term met de hoogste macht van het deeltal door de term met de hoogste macht van de deler.

Zo bekom je een *voorlopig quotiënt*.

(c) Vermenigvuldig deze eerste term van het quotiënt met de deler, en trek dit product af van het deeltal.

Zo bekom je een *voorlopige rest*.

(d) Deel de term met de hoogste macht van de voorlopige rest door de term met de hoogste macht van de deler, en voeg het resultaat als nieuwe component toe aan de het voorlopige quotiënt.

Dit geeft een nieuw *voorlopig quotiënt*.

(e) Vermenigvuldig de nieuwe component met de deler, en trek dit product af van het deeltal.

Zo bekom je een nieuwe *voorlopige rest*.

(f) Herhaal de vorige twee stappen tot de graad van de voorlopige rest strikt kleiner is dan de graad van de deler.

We geven nog enkele voorbeelden.

Voorbeeld 6.5.5. Deel $2x^3-8$ door $x+2$.

Uitwerking:

CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Euclidisch deling van veeltermen

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
 & 2x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & - & 8 & & & x+2 \\
- & 2x^3 & + & 4x^2 & & & & & & & \hline
 & & - & 4x^2 & + & 0x & - & 8 & & & 2x^2-4x+8 \\
 & & - & 4x^2 & - & 8x & & & & & \\
 & & \hline & & & 8x & - & 8 & & & \\
 & & & & & 8x & + & 16 & & & \\
 & & & & - & \hline & - & 24 & & &
\end{array}$$

Besluit: $2x^3 - 8 = (2x^2 - 4x + 8)(x + 2) - 24$

Voorbeeld 6.5.6. Deel $-x^3 + 9x + 2$ door $x + 4$.

Uitwerking:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
- & x^3 & + & 0x^2 & + & 9x & + & 2 & & & x+4 \\
- & x^3 & - & 4x^2 & & & & & & & \hline
 & & & 4x^2 & + & 9x & + & 2 & & & -x^2+4x-7 \\
 & & - & 4x^2 & + & 16x & & & & & \\
 & & & \hline & - & 7x & + & 2 & & & \\
 & & & & - & 7x & - & 28 & & & \\
 & & & & & \hline & & 30 & & &
\end{array}$$

Besluit: $-x^3 + 9x + 2 = (-x^2 + 4x - 7)(x + 4) + 30$

Voorbeeld 6.5.7. Deel $4x^4 + x^3 + 2x + 1$ door $2x^2 + 1$.

Uitwerking:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
 & 4x^4 & + & x^3 & + & 0x^2 & + & 2x & + & 1 & 2x^2+1 \\
- & 4x^4 & & & + & 2x^2 & & & & & \hline
 & & & x^3 & - & 2x^2 & + & 2x & + & 1 & 2x^2+\tfrac{1}{2}x-1 \\
 & & & x^3 & & & + & \tfrac{1}{2}x & & & \\
 & & & \hline & - & 2x^2 & + & \tfrac{3}{2}x & + & 1 & \\
 & & & & - & 2x^2 & & & - & 1 & \\
 & & & & & \hline & & \tfrac{3}{2}x & + & 2 &
\end{array}$$

Besluit: $4x^4 + x^3 + 2x + 1 = \left(2x^2 + \frac{1}{2}x - 1\right)(2x^2 + 1) + \left(\frac{3}{2}x + 2\right)$

CC BY-NC-SA 4.0

6.5.A Oefeningen Euclidische deling

6.5.A.1 Niveau 2

Oefening 6.5.1. Zoek het quotiënt en de rest van volgende delingen met behulp van een Euclidische deling.

1. Deel $2x^4 - 1$ door $x - 1$.

2. Deel $4x^3 + 4x^2 - 5x - 3$ door $2x^2 - x - 1$.

3. Deel $5x^3 + 125$ door $x + 5$.

4. Deel $3x^3 + 8x^2 - x + 1$ door $3x + 2$.

Oefening 6.5.2.

1. De Euclidische deling van de veelterm $ax^2 + bx + c$ door $x - 3$ heeft als quotiënt $3x + 1$ en rest $r \in \mathbb{R}$. Wat is de waarde van b in deze veelterm?

$b = \ldots\ldots$

2. De Euclidische deling van de veelterm $p(x) = ax^2 + bx + c$ door $2x + 1$ heeft als quotiënt $-x - 1$ en rest 2. Wat is de waarde van $p(1)$?

$p(1) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.6 Ontbinden in factoren

Om veeltermen te ontbinden in factoren bestuderen we eerst het delen van een veelterm door een veelterm van de *eerste graad*, dus een deler van de vorm $x-a$, met $a \in \mathbb{R}$.

Eigenschap 6.6.1 (Rest bij deling door $x-a$)**.**

Bij deling van een veelterm $p(x)$ door $x-a$ is de rest gelijk aan de getalwaarde $p(a)$ van $p(x)$ in a.

Bewijs. Uit de formule van de Euclidische deling volgt dat $p(x) = (x-a)q(x)+r(x)$ met $q(x)$ het quotiënt en $r(x)$ de rest met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(x-a) = 1$. De rest $r(x)$ is dus een veelterm van graad nul, een getal. Noteer de rest dus als $r \in \mathbb{R}$, en bereken de getalwaarde van $p(x)$ in a: $p(a) = (a-a)q(a)+r = 0+r = r$, en dus $p(a) = r$. De rest is dus inderdaad gelijk aan de getalwaarde van $p(x)$ in a.

Voorbeeld 6.6.1.

De rest bij de deling van $p(x) = 2x^3 - 8$ door $x+2$ is $p(-2) = 2\cdot(-2)^3 - 8 = -16-8 = -24$.

Eigenschap 6.6.2 (Deelbaarheidscriterium)**.**

Een veelterm $p(x)$ is deelbaar door $x-a$ als en slechts als $p(a) = 0$.

Bewijs. $p(x)$ is deelbaar door $x-a$ als de rest van de deling van $p(x)$ door $x-a$ gelijk is aan nul. Uit vorige eigenschap volgt dat de rest van de deling van $p(x)$ door $x-a$ gelijk is aan $p(a)$. Dus de rest is nul als en slechts als $p(a) = 0$, en dat is precies het te bewijzen.

Opmerking 6.6.1. Als we een nulpunt a kennen van een veelterm $p(x)$ (met $\text{gr}(p(x)) > 1$), dan weten we wegens vorige eigenschap dat $p(x)$ deelbaar is door $x-a$. Dit wil zeggen dat er een unieke veelterm $q(x)$ bestaat zodat $p(x) = q(x)(x-a)$. We kunnen $q(x)$ vinden als quotiënt van de deling van $p(x)$ door $x-a$. Als we $p(x)$ schrijven als $p(x) = q(x)(x-a)$ hebben we $p(x)$ ontbonden in de factoren $q(x)$ en $x-a$. Als $\text{gr}(q(x)) > 1$ en $q(x)$ heeft minstens 1 nulpunt, dan kan $q(x)$ nog verder ontbonden worden in factoren. Om veeltermen te ontbinden in factoren moeten we dus zoeken naar nulpunten.

Voorbeeld 6.6.2.

Voor de veelterm $p(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2$, kunnen we berekenen dat $p(2) = 0$.

We kunnen $p(x)$ dus schrijven als $p(x) = q(x)(x-2)$, waarbij we $q(x)$ kunnen vinden als quotiënt van de deling van $p(x)$ door $x-2$. Na het uitvoeren van de Euclidische deling vinden we dat $q(x) = 2x^3+x+1$.

Hoe vind je een nulpunt van een veelterm? In het algemeen zal je hier een benaderingmethode voor moeten gebruiken. Voor het speciale maar toch veel voorkomend geval van veeltermen met *gehele* coefficiënten bestaat er wel een procedure:

Eigenschap 6.6.3.

Als een veelterm $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$, *met gehele coëfficiënten* a_i, deelbaar is door $x-a$, met a een *geheel getal*, **dan** is a *een gehele deler van de constante term* a_0 van deze veelterm $p(x)$.

Bewijs. Omdat $p(x)$ deelbaar is door $x-a$ volgt dat $p(a) = 0$. Welnu, a invullen in $p(x) = 0$ en de

CC BY-NC-SA 4.0

6.6 Ontbinden in factoren

constante term naar het rechterlid brengen levert dan

$$a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \dots a_1 a = -a_0$$

waarbij in het linkerlid een factor a kan worden afgezonderd. Dat betekent precies dat a een deler is van $-a_0$, en dus ook van a_0.

Opmerking 6.6.2.

- We kunnen bovenstaande eigenschap ook formuleren als:

  Als a een geheel nulpunt is van een veelterm $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$, *met gehele coëfficiënten* a_i, **dan** is a *een gehele deler van de constante term* a_0 van deze veelterm $p(x)$.

- De eigenschap zegt **niet** dat elke gehele deler van de constante term a_0 van een veelterm een nulpunt is van deze veelterm, maar **wel** dat *alle mogelijke gehele nulpunten* te vinden zijn in de (eindige) verzameling van gehele delers van de constante term a_0.

Voorbeeld 6.6.3. Bepaal alle gehele a zodat $p(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ deelbaar is door $x - a$.

We moeten dus alle gehele nulpunten van $p(x)$ bepalen. Uit vorige eigenschap volgt dat enkel gehele delers van de constante term in aanmerking komen, dus $\pm 1, \pm 3, \pm 9$:

$$\begin{array}{llll}
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x-1) & \text{omdat} \quad p(\ 1) = 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x+1) & \text{omdat} \quad p(-1) = 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x-3) & \text{omdat} \quad p(\ 3) = 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x+3) & \text{omdat} \quad p(-3) = 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x-9) & \text{omdat} \quad p(\ 9) \neq 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x+9) & \text{omdat} \quad p(-9) \neq 0.
\end{array}$$

Voorbeeld 6.6.4. Bepaal alle gehele a zodat $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ deelbaar is door $x - a$.

We moeten dus alle gehele nulpunten van $p(x)$ bepalen. Uit vorige eigenschap volgt dat enkel delers van de constante term in aanmerking komen, dus ± 1 en ± 2:

$$\begin{array}{llll}
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x-1) & \text{omdat} \quad p(\ 1) \neq 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x+1) & \text{omdat} \quad p(-1) \neq 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x-2) & \text{omdat} \quad p(\ 2) = 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x+2) & \text{omdat} \quad p(-2) \neq 0.
\end{array}$$

We vinden enkel dat $p(x)$ deelbaar is door $x - 2$. Het quotiënt van de deling van $x^3 - 2x^2 + x - 2$ door $x - 2$ kunnen we bepalen met het algoritme van de Euclidische deling.

Algoritme 6.6.1 (Delen door $x - a$ met a een geheel getal)**.**

Voor een veelterm $p(x)$ met *gehele* coëfficiënten kan je alle a (met $a \in \mathbb{Z}$) waarvoor $p(x)$ deelbaar is door $x - a$ en de bijhorende quotiënten als volgt bepalen:

(a) Bepaal *de delers van de constante term* van de veelterm.

(b) Bepaal *de getalwaarde van de veelterm* voor deze delers.

(c) Als voor een deler a deze getalwaarde 0 is, dan is $p(x)$ deelbaar door $x - a$.

(d) Bepaal het quotiënt via de Euclidische deling of via het rekenschema van Horner.

CC BY-NC-SA 4.0

6.6 Ontbinden in factoren

Merk op: deze eigenschap geldt ENKEL voor *gehele* getallen a en veeltermen met *gehele* coëfficiënten.

Stel dat een veelterm $p(x)$ deelbaar is door $x-a$. Dan bestaat er een unieke veelterm $q(x)$ zodat $p(x) = q(x)(x-a)$. De veelterm $p(x)$ is dan ontbonden in de factoren $q(x)$ en $x-a$. Als de veelterm $q(x)$ minstens één nulpunt heeft, kan $q(x)$ verder ontbonden worden in factoren. Wanneer $q(x)$ bijvoorbeeld een tweedegraadsveelterm is met negatieve discriminant, dan kan $q(x)$ niet verder ontbonden worden in factoren. We illustreren het ontbinden in factoren met een voorbeeld van een derdegraadsveelterm:

Voorbeeld 6.6.5. Ontbind de veelterm $p(x) = x^3 - 7x - 6$ in factoren van zo laag mogelijke graad.

Uitwerking: We zoeken eerst een nulpunt van de gegeven veelterm. We gaan na of $p(x)$ een geheel nulpunt a heeft. Hiervoor moet a een deler zijn van de constante term. De mogelijkheden zijn dus $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

We berekenen $p(1) = 1 - 7 - 6 \neq 0, p(2) = 8 - 14 - 6 \neq 0$, maar $p(3) = 27 - 21 - 6 = 0$.

Er bestaat dus zeker een veelterm $q(x)$ zodat $x^3 - 7x - 6 = (x-3)q(x)$.

Deze veelterm $q(x)$ kan je berekenen met de Euclidische Deling:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 1x^3 & + & 0x^2 & - & 7x & - & 6 & x-3 \\
\cline{9-9}
- & 1x^3 & - & 3x^2 & & & & & x^2+3x+2 \\
\cline{2-5}
 & & & 3x^2 & - & 7x & - & 6 & \\
 & & - & 3x^2 & - & 9x & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & 2x & - & 6 & \\
 & & & & - & 2x & - & 6 & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Hieruit volgt dat $x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x^2+3x+2)$. Nu gaan we na of de factor x^2+3x+2 nog verder kan worden ontbonden. De discriminant in positief, en de nulpunten zijn: $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = -2, -1$.

We vinden de ontbinding $x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x+1)(x+2)$.

Merk op: in dit geval had je ook voor de overige delers van de constante term 6 de getalwaarde van $p(x)$ kunnen berekenen, en vinden dat $p(-1) = -1 + 7 - 6 = 0$ en ook $p(-2) = -8 + 14 - 6 = 0$. De drie nulpunten van $p(x)$ zijn dus $3, -1$ en -2, en daaruit volgt ook dadelijk de ontbinding $x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x+1)(x+2)$. Dat werkt hier omdat *alle* nulpunten geheel zijn, de methode met de discriminant werkt ook voor niet-gehele nulpunten.

Opmerking 6.6.3.

Een veelterm van graad 3 heeft altijd minstens één reëel nulpunt. Als dit nulpunt geen geheel getal is, dan kunnen we dit niet vinden met de technieken hierboven. Als dit nulpunt wel een geheel nulpunt is, dan kunnen we dit vinden onder de gehele delers van de constante term. In dat geval kunnen we de veelterm ontbinden in ofwel 3 factoren van de eerste graad, ofwel in een factor van de eerste graad en een factor van de tweede graad met negatieve discriminant.

CC BY-NC-SA 4.0

6.6.A Oefeningen ontbinden in factoren

6.6.A.1 Niveau 1

Oefening 6.6.1. Bereken de rest van volgende delingen.

1. Wat is de rest bij deling van $p(x) = x^3 - 2$ door $x - 3$? … …
2. Wat is de rest bij deling van $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ door $x + 2$? … …
3. Wat is de rest bij deling van $p(x) = -x^4 + 2x^3 - 5x + 1$ door $x - 1$? … …

6.6.A.2 Niveau 2

Oefening 6.6.2. Ontbind de volgende veeltermen in factoren van zo laag mogelijke graad, met behulp van de Euclidische deling:

1. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = \ldots\ldots$
2. $x^3 - x^2 - 5x + 5 = \ldots\ldots$
3. $2x^3 + x^2 - 8x + 5 = \ldots\ldots$

Oefening 6.6.3. Ontbind de volgende veeltermen in factoren van zo laag mogelijke graad.

1. $x(x+1)(2x+1) + 6(x+1)^2 = \ldots\ldots$
2. $2x^4 - 1 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.7 Het schema van Horner

In principe is het eenvoudig om de getalwaarde $p(7)$ van de veelterm $p(x) = x^9 + x^5 + 1$ te berekenen door $p(7) = 7^9 + 7^5 + 1$ uit te rekenen. Je moet daarvoor wel hoge machten berekenen.

Er bestaat een algoritme dat de berekening van $p(a)$ voor willekeurige veeltermen $p(x)$ en getallen a reduceert tot eenvoudigere vermenigvuldigingen en optellingen. Het algoritme geeft ook het quotiënt van de deling van $p(x)$ door $(x - a)$. Dat algoritme is gekend onder de naam **Rekenschema van Horner**. Je kan dit gebruiken als alternatief voor de Euclidische deling. Het is sneller, maar het is minder duidelijk wat er juist gebeurt. Als je het reeds kent kan je het hier opfrissen, anders gebruik je gewoon de Euclidische deling.

We leggen de regel van Horner hier uit aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 6.7.1. Deel $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ door $x - 2$.

Het startschema ziet eruit als volgt

	2	−4	5	−7
2				

waarbij de coefficiënten van $p(x)$ in de bovenste rij staan, en het getal 2 links van het schema. We laten nu de eerste coëfficiënt (dus 2) zakken, vermenigvuldigen die met de 2 links, en schrijven het resultaat op de tweede rij, onder de tweede coëfficiënt (dus onder -4):

	2	−4	5	−7
2		4		
	2			

We tellen de -4 en 4 bij elkaar op, schrijven het resultaat $-4 + 4 = 0$ onderaan en vermenigvuldigen 0 met de linkse 2 en schrijven het resultaat 0 weer op de tweede rij, onder de 5, en tellen dan 0 op bij die 5:

	2	−4	5	−7
2		4	0	
	2	0	5	

We vermenigvuldigen opnieuw de onderste 5 met de linkse 2, schrijven het product 10 onder de -7, tellen op en krijgen rechts onderaan het getal 3:

	2	−4	5	−7
2		4	0	10
	2	0	5	3

Het schema is nu volledig, en men kan bewijzen dat het meest rechtse getal onderaan altijd de getalwaarde van de veelterm is in het punt 2, en dat de overige getallen in de onderste rij steeds de coëfficiënten zijn van het quotiënt van $p(x)$ gedeeld door $x - 2$.

Het quotiënt is dus $2x^2 + 0x + 5$ en de rest is 3, of

$$2x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = (x - 2)(2x^2 + 5) + 3$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.7 Het schema van Horner

Voorbeeld 6.7.2. Als voorbeeld op de Euclidische deling hebben we $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ gedeeld door $x - 3$. We kunnen deze deling ook uitvoeren met het rekenschema van Horner:

	2	1	−5	2
3		6	21	48
	2	7	16	50

Dus: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (2x^2 + 7x + 16)(x - 3) + 50$.

Merk op dat de rest 50 dus ook de getalwaarde van het deeltal voorstelt voor $x = 3$, want

$$p(3) = 2 \cdot 3^3 + 3^2 - 5 \cdot 3 + 2 = 50$$

Voorbeeld 6.7.3. Deel $p(x) = x^4 - 15x^2 - 10x + 24$ door $x - 1$.

	1	0	−15	−10	24
1		1	1	−14	−24
	1	1	−14	−24	0

en dus $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = (x - 1)(x^3 + x^2 - 14x - 24)$.

Voorbeeld 6.7.4. Ontbind $p(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ in factoren.

Omdat $p(-3) = 0$ is $x^4 - 10x^2 + 9$ deelbaar door $x - (-3) = x + 3$.

We berekenen het quotiënt met het rekenschema van Horner.

	1	0	−10	0	9
−3		−3	9	3	−9
	1	−3	−1	3	0

Het quotiënt is dus $x^3 - 3x^2 - x + 3$ en de rest is 0, dus $x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 3)(x^3 - 3x^2 - x + 3)$.

We zoeken nu verder naar nulpunten van $x^3 - 3x^2 - x + 3$, en vinden (na nog wat rekenwerk) dat $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$.

Merk op: in dit geval kan de veelterm eenvoudiger worden ontbonden door alle nulpunten te zoeken.

CC BY-NC-SA 4.0

6.7.A Oefeningen Horner

6.7.A.1 Niveau 2

Oefening 6.7.1. Bepaal voor onderstaande veeltermen een nulpunt a en bereken het quotiënt bij deling door $x - a$.

1. $x^4 - 2x^3 + 1$:

$x^4 - 2x^3 + 1$ delen door …… geeft als quotiënt ……

2. $x^3 - x^2 - 5x + 6$:

$x^3 - x^2 - 5x + 6$ delen door …… geeft als quotiënt ……

CC BY-NC-SA 4.0

6.7.B Herhaling ontbinden in factoren

6.7.B.2 Niveau 2

Oefening 6.7.2. Ontbind de volgende veeltermen in factoren van zo laag mogelijke graad. Gebruik hiervoor de Euclidische deling of het schema van Horner.

1. $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = \ldots\ldots$

2. $x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = \ldots\ldots$

3. $3x^3 - 5x^2 - 10x - 6 = \ldots\ldots$

4. $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.8 Veeltermbreuken

We bekijken nu breuken van veeltermen.

Definitie 6.8.1. Een **veeltermbreuk** in één onbekende x is een uitdrukking van de vorm $\frac{p(x)}{q(x)}$ met $p(x), q(x)$ veeltermen en $q(x)$ niet de nulveelterm.

Opmerking 6.8.1. Als we een veeltermbreuk zien als een functie $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$, dan wordt dit een rationale functie genoemd. Een rationale functie is enkel gedefinieerd voor waarden van x waarvoor de noemer $q(x)$ niet nul is. Op deze pagina zien we veeltermbreuken als formele uitdrukkingen waarmee we kunnen rekenen, we komen later terug op rationale functies en hun domein.

Voorbeeld 6.8.1.

1. $\frac{x^2+1}{x}$ is een veeltermbreuk.
2. $\frac{2}{x^3+1}$ is een veeltermbreuk.
3. $\frac{2x^3+7x}{3} = \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{3}x$ is zowel een veeltermbreuk, als een veelterm.

Voor veeltermbreuken gelden uiteraard dezelfde rekenregels als voor breuken in het algemeen.

Voordat je begint te rekenen met veeltermbreuken is het handig om deze veeltermbreuken eerst te vereenvoudigen. Dit kan je doen door de veeltermen in teller en noemer te ontbinden in factoren en dan gemeenschappelijke factoren weg te delen.

Voorbeeld 6.8.2. Vereenvoudig.

1. $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2.$
2. $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6} = \frac{x-3}{x+2}.$

Uitwerking: De teller kunnen we ontbinden in factoren als $x^2-9 = (x-3)(x+3)$. Om de noemer te ontbinden in factoren berekenen we de discriminant: $D = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1$, dus $x_1 = \frac{-5-\sqrt{1}}{2} = -3$ en $x_2 = \frac{-5+\sqrt{1}}{2} = -2$. Dit betekent dat $x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$ en dus vinden we

$$\frac{x^2-9}{x^2+5x+6} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}$$

Veeltermbreuken met gelijke noemer kan je optellen door de tellers op te tellen.

Voorbeeld 6.8.3. Schrijf als één breuk door de breuken op te tellen.

1. $\frac{x^2}{x+1} + \frac{-x+2}{x+1} = \frac{x^2-x+2}{x+1}.$

Bij het optellen van veeltermbreuken met verschillende noemer kan je het volgende stappenplan volgen.

(a) Vereenvoudig elke breuk afzonderlijk.

CC BY-NC-SA 4.0

(b) Bepaal het kleinste gemene veelvoud van de noemers.

(c) Breng alle breuken op gelijke noemer.

(d) Tel de breuken met gelijke noemers op.

Voorbeeld 6.8.4. Schrijf als één breuk door de breuken op te tellen.

1. $\frac{2}{x} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{3x^2-2}{x(x^2-1)}$

Uitwerking: We kunnen de breuken niet vereenvoudigen. Het kleinste gemene veelvoud van de noemers is $x(x^2-1)$. We brengen eerst de breuken op gelijke noemer en tellen daarna op.

$$\frac{2}{x} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{2(x^2-1)+x^2}{x(x^2-1)} = \frac{3x^2-2}{x(x^2-1)}$$

2. $\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} = \frac{5x+2}{x(x+1)}$

Uitwerking: We kunnen de breuken niet vereenvoudigen. Het kleinste gemene veelvoud van de noemers is $x(x+1)$. We brengen eerst de breuken op gelijke noemer en tellen daarna op.

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} = \frac{2(x+1)+3x}{x(x+1)} = \frac{5x+2}{x(x+1)}$$

3. $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^3+x^2+2x}{(x-1)(x+1)}$

Uitwerking: We kunnen de breuken niet vereenvoudigen. Het kleinste gemene veelvoud van de noemers is $(x-1)(x+1)$. We brengen eerst de breuken op gelijke noemer en tellen daarna op.

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{x^2}{x-1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{x^2}{x-1} = \frac{2x+x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^3+x^2+2x}{(x-1)(x+1)}$$

4. $\frac{x^2+4x+4}{x+2} + \frac{3}{x-1} = \frac{x^2+x+1}{x-1}$

Uitwerking: We kunnen de eerste breuk vereenvoudigen, immers $x^2+4x+4 = (x+2)^2$, dus

$$\frac{x^2+4x+4}{x+2} + \frac{3}{x-1} = \frac{(x+2)^2}{x+2} + \frac{3}{x-1} = (x+2) + \frac{3}{x-1} = \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} = \frac{x^2+x-2+3}{x-1} = \frac{x^2+x+1}{x-1}$$

5. $\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x^2(x+1)}$

Uitwerking: Het kleinste gemene veelvoud van de noemers is $x^2(x+1)$. We brengen eerst de breuken op gelijke noemer en tellen daarna op. Dit geeft

$$\begin{aligned}\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x(x+1)} &= \frac{A(x+1)}{x^2(x+1)} + \frac{Bx}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{A(x+1)+Bx}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{(A+B)x+A}{x^2(x+1)}\end{aligned}$$

Oefening 6.8.1. Schrijf als één breuk door de breuken op te tellen.

1. $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x^2-1} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

6.8 Veeltermbreuken

2. $\dfrac{x+1}{x+3} - \dfrac{2}{x^2+6x+9} = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x(x-3)} - \dfrac{x}{2(x+3)} = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{A}{4(x-2)} + \dfrac{B}{2(x-2)^2} + \dfrac{C}{2(x+2)} = \ldots\ldots$

Ook vermenigvuldigen en delen van veeltermbreuken gebeurt volgens de rekenregels van breuken.

Voorbeeld 6.8.5. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\dfrac{x+2}{3} \cdot \dfrac{x^3}{x^3+2x^2+x+2} = \dfrac{(x+2)x^3}{3(x^3+2x^2+x+2)} = \dfrac{(x+2)x^3}{3(x^2+1)(x+2)} = \dfrac{x^3}{3(x^2+1)}$
2. $\dfrac{\frac{x+2}{3}}{\frac{x^3}{x^2+1}} = \dfrac{x+2}{3} \cdot \dfrac{x^2+1}{x^3} = \dfrac{(x+2)(x^2+1)}{3x^3}.$

Omdat we in de meeste toepassingen de veeltermbreuken ontbonden in factoren nodig hebben, hebben we het in het resultaat de haakjes niet uitgewerkt.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 7
Vergelijkingen

(Versie 2026/11/23H.2)

7.1 Begintest Vergelijkingen

Indien je deze oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je het hoofdstuk Vergelijkingen verder overslaan.

Oefening 7.1.1. Los de volgende vergelijkingen op naar x.

1. $q = x(p + x)$, met parameters p en q, waarbij $q > 0$.
2. $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{12}{x^2 - 2x - 3}$. Aantal oplossingen? … …
3. $\sqrt{2x+7} = x + 2$. Aantal oplossingen? … …
4. $\left|\dfrac{x}{2} - 1\right| = 1$. Aantal oplossingen? … …

Oefening 7.1.2. Voor welke waarden van de parameters a, b en c gelden volgende gelijkheden.

1. $ax(x+1) + b(x+1) + cx^2 = 1$ $a = \ldots\ldots, b = \ldots\ldots$ en $c = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{-x^2 - 2x - 5}{(x^2+1)(x-3)} = \dfrac{ax+b}{x^2+1} + \dfrac{c}{x-3}$ $a = \ldots\ldots, b = \ldots\ldots$ en $c = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

7.2 Vergelijkingen in 1 onbekende

Het *oplossen van vergelijkingen* is een steeds weerkerend thema in de wiskunde. Er zijn verschillende soorten vergelijkingen, zoals veeltermvergelijkingen, rationale vergelijkingen, irrationale vergelijkingen, goniometrische vergelijkingen, exponentiële vergelijkingen en logaritmische vergelijkingen. We bespreken hier kort de terminologie en enkele algemene principes die daarmee samenhangen.

Definitie 7.2.1.

- Een **gelijkheid** is een uitdrukking die precies één gelijkheidsteken $=$ bevat. Het **linkerlid** van de gelijkheid is het deel van de uitdrukking vòòr het gelijkheidsteken, het **rechterlid** is het deel erachter.
- Een **vergelijking in één onbekende** is een *gelijkheid* waarin één onbekende voorkomt.
- Een **oplossing** van de vergelijking is een waarde van de onbekende waarvoor de gelijkheid waar is. De **oplossingsverzameling** van de vergelijking is de verzameling van *alle* oplossingen.
- We noemen twee vergelijkingen **equivalent** als ze dezelfde oplossingsverzameling hebben.

Opmerking 7.2.1.

Een gelijkheid die enkel getallen en gekende functies bevat

- kan **waar** zijn, bijvoorbeeld $1+1=2$ of $\sqrt{4}=2$,
- kan **niet waar** zijn, bijvoorbeeld $1+1=3$ of $\sqrt{4}=-2$,
- kan **geen betekenis** hebben, bijvoorbeeld $1+=3$ of $\sqrt{-4}=2$.

Voor de onbekende wordt vaak de letter x gebruikt, maar een onbekende kan met eender welke letter worden aangeduid. Het oplossen van een vergelijking komt erop neer dat je die waarden voor de onbekende zoekt waarvoor het linkerlid gelijk is aan het rechterlid. **Bij het oplossen van een vergelijking mag men enkel bewerkingen uitvoeren die de vergelijking vervangen door een equivalente vergelijking.** Een vergelijking kan precies één oplossing, meer dan één oplossing of geen oplossing hebben. We noteren deze oplossingsverzameling met V. Het is steeds een goed idee om je gevonden oplossing te controleren, door deze waarde van de onbekende in te vullen in de vergelijking, om zo na te gaan of linkerlid inderdaad gelijk is aan rechterlid.

Voorbeeld 7.2.1.

- In de vergelijking
$$2x+6=10$$
wordt het linkerlid $2x+6$, met daarin de onbekende x, gelijkgesteld aan het rechterlid 10. De vergelijking bevat één onbekende, namelijk x. Enkel $x=2$ is een oplossing van die vergelijking. Soms wordt de oplossing van een vergelijking genoteerd als een verzameling V. Voor dit voorbeeld schrijven we dan $V=\{2\}$.

  De vergelijking $2x+6=10$ is equivalent met de vergelijking $2x=4$, omdat beide vergelijkingen oplossingsverzameling $V=\{2\}$ hebben.
- De vergelijking
$$x^2-1=0$$
heeft 2 oplossingen, namelijk $x=1$ en $x=-1$. We noteren $V=\{-1,1\}$.

CC BY-NC-SA 4.0

7.2 Vergelijkingen in 1 onbekende

Een vergelijking vervangen door een (eenvoudigere) equivalente vergelijking kan met volgende eigenschappen van gelijkheden.

Eigenschap 7.2.1 (Overbrengingsregels)**.** Voor elke $a, b, r \in \mathbb{R}$ geldt

$$\begin{array}{rrcll} & a = b & \iff & a + r = b + r & \text{(plus getal)} \\ \text{Voor } r \neq 0: & a = b & \iff & a \cdot r = b \cdot r & \text{(maal getal)} \end{array}$$

Opmerking 7.2.2.

- De eerste eigenschap zegt dat je bij beide leden van een gelijkheid eenzelfde getal mag optellen

  $$a = b \Rightarrow\ a + r = b + r$$

  of aftrekken

  $$a + r = b + r \Rightarrow\ a = b.$$

  Als we bij de gelijkheid $x = y$ van beide leden y aftrekken krijgen we $x - y = 0$, wat neerkomt op de term y naar het andere lid brengen.

  $$x = y \iff\ x - y = 0$$

  Bij het overbrengen van een **term** van het ene naar het andere lid verandert het teken.

- De tweede eigenschap zegt dat je beide leden van een gelijkheid mag vermenigvuldigen

  $$a = b \Rightarrow\ a \cdot r = b \cdot r$$

  of delen

  $$a \cdot r = b \cdot r \Rightarrow\ a = b$$

  met eenzelfde getal, verschillend van nul.

  Als we bij de gelijkheid $x = y$, met $y \neq 0$, beide leden delen door y krijgen we $\frac{x}{y} = 1$, wat neerkomt op de factor y naar het andere lid brengen.

  $$x = y \iff\ \frac{x}{y} = 1 \text{ indien } y \neq 0$$

  Bij het overbrengen van een **factor** van het ene naar het andere lid wordt een vermenigvuldiging een deling en omgekeerd.

Met deze eigenschappen van gelijkheden kunnen we de oplossingsverzameling zoeken van vergelijkingen, namelijk de verzameling alle getallen die voldoen aan de gelijkheid.

We passen deze eigenschappen ter illustratie stap voor stap toe op volgend zeer eenvoudig voorbeeld.

Voorbeeld 7.2.2.

$$2x + 4 = 0$$

Het oplossen van deze vergelijking komt erop neer dat je de vergelijking herschrijft op een zodanige manier dat je in één lid enkel de onbekende hebt staan, en in het andere lid geen onbekende meer hebt. Op die manier kan je de oplossing direct aflezen.

In bovenstaande vergelijking kunnen we van beide leden 4 aftrekken, wat neerkomt op de term 4 naar het rechterlid brengen:

$$2x + 4\mathbf{-4} = 0\mathbf{-4}$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.2 Vergelijkingen in 1 onbekende

dit geeft

$$2x = -4$$

Om nu in het linkerlid alleen nog de onbekende over te houden kunnen we linkerlid en rechterlid delen door 2, wat neerkomt op de factor 2 naar het rechterlid brengen:

$$\frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{-4}{\mathbf{2}}$$

dit geeft

$$x = -2$$

als oplossing van de vergelijking. Dus de oplossingsverzameling is $V = \{-2\}$.

We controleren nog of voor de gevonden oplossing het linkerlid inderdaad gelijk is aan het rechterlid:

het linkerlid: $2(-2) + 4 = -4 + 4 = 0$

het rechterlid: 0

Uiteraard mag je deze uitwerking korter noteren als:

$$2x + 4 = 0 \iff 2x = -4 \iff x = -2$$

Eigenschap 7.2.2 (productregel)**.**

Als het product van twee factoren nul is, dan is minstens één van beide factoren nul.

Voorbeeld 7.2.3.

$$(x-1)\sqrt{x+2} = 0$$

Uit deze gelijkheid volgt dat $x - 1 = 0$ of $\sqrt{x+2} = 0$. De oplossingen van deze vergelijking zijn dus $x = 1$ en $x = -2$.

Opmerking 7.2.3. Een gelijkheid kan naast onbekenden ook parameters bevatten:

- Als x een **onbekende** is, dan is $2x + 4 = 0$ een vergelijking waarvan we oplossingen kunnen zoeken: de gelijkheid $2x + 4 = 0$ is *waar* als en slechts als $x = -2$.
- Als a een reëel getal is en x een **onbekende**, dan is $2x + a = 0$ een vergelijking waarvan we de oplossing kunnen zoeken, die zal afhangen van de **parameter** a: de gelijkheid $2x + a = 0$ is *waar* als en slechts als $x = -\frac{a}{2}$.

Als een gelijkheid *letters* bevat, noemen we die letters **onbekenden** of **parameters** naargelang de context of de rol die de letters vervullen. Voor onbekenden worden dikwijls de letters x en y gebruikt, maar ook andere letters komen voor (bijvoorbeeld t als de onbekende de tijd voorstelt, n als het een natuurlijk getal voorstelt, of z als het een complex getal voorstelt). Voor parameters kiezen we dikwijls $a, b, c \ldots$ of $k, l, m, \ldots$ of griekse letters $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Veeltermvergelijkingen

Veronderstelde voorkennis: veeltermen ontbinden in factoren

Definitie 7.3.1. Veeltermvergelijkingen in één onbekende zijn vergelijkingen waarbij zowel het rechterlid als het linkerlid veeltermen in één onbekende zijn.

De **graad van een veeltermvergelijking** in één onbekende is de hoogste macht van de onbekende die in de vergelijking voorkomt.

Merk op dat één van beide leden een veelterm van graad nul, dus een constante, kan zijn.

Voorbeeld 7.3.1.

- $5x^3 + 2x = 8x^2 + 17$ heeft graad 3.
- $3x^2 - 5x + 2 = 0$ heeft graad 2.
- $x^4 = 16$ heeft graad 4.

We bekijken eerst het oplossen van **eerstegraadsvergelijkingen**. Indien er haakjes in de opgave staan rekenen we deze meestal eerst uit. Daarna verplaatsen we alle termen met onbekenden naar het ene lid, alle termen zonder onbekenden naar het andere lid.

Voorbeeld 7.3.2. Los op naar x:

1.

$$5x + 3 = 3x + 1$$

We verplaatsen $3x$ naar het linkerlid

$$2x + 3 = 1$$

We verplaatsen 3 naar het rechterlid

$$2x = -2$$

Om nu in het linkerlid alleen nog de onbekende over te houden kunnen we linkerlid en rechterlid delen door 2:

$$\frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{-2}{\mathbf{2}}$$

dit geeft

$$x = -1$$

als oplossing van de vergelijking. Dus de oplossingsverzameling is $V = \{-1\}$.

We controleren nog of voor de gevonden oplossing het linkerlid inderdaad gelijk is aan het rechterlid:

het linkerlid: $5(-1) + 3 = -2$

het rechterlid: $3(-1) + 1 = -2$

Uiteraard mag je deze uitwerking ook korter noteren, bijvoorbeeld als:

$$5x + 3 = 3x + 1 \iff 2x = -2 \iff x = -1$$

2.

$$2(x - 4) = 7(3x - 1)$$

De eerste stap is hier het uitwerken van de haakjes:

$$2(x - 4) = 7(3x - 1) \Leftrightarrow 2x - 8 = 21x - 7$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Veeltermvergelijkingen

Vervolgens verplaatsen we de -8 naar het rechterlid:

$$2x = 21x - 7 + 8 \Leftrightarrow 2x = 21x + 1$$

Nu verplaatsen we de $21x$ naar het linkerlid:

$$2x - 21x = 1 \Leftrightarrow -19x = 1$$

Dan delen we beide leden door -19:

$$x = \frac{1}{-19} = -\frac{1}{19}$$

Dus de oplossingsverzameling is $V = \left\{-\frac{1}{19}\right\}$. Controle:

linkerlid: $2\left(-\frac{1}{19} - 4\right) = 2\left(\frac{-1-76}{19}\right) = -\frac{154}{19}$,

rechterlid: $7\left(3 \cdot \left(-\frac{1}{19}\right) - 1\right) = 7\left(\frac{-3-19}{19}\right) = -\frac{154}{19}$

Het oplossen van vergelijkingen met **hogere graadsveeltermen** kan door alle termen naar één lid te brengen en van de verkregen veelterm de nulpunten te zoeken.

Oefening 7.3.1.

1. Los op naar x: $2x^2 - 6 = 4x$

2. Los op naar x: $x^3 = px^2$, met parameter p.

Opmerking 7.3.1.

Om een veeltermvergelijking van graad hoger dan één op te lossen moet je ontbinden in factoren. Om bijvoorbeeld de vergelijking $(x^2 - x - 6)(x - 1) = 0$ op te lossen heeft het dus geen zin om de haakjes uit te werken en deze vergelijking te schrijven als $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$. Wel moet je de factor $x^2 - x - 6$ ontbinden in factoren:

$$(x^2 - x - 6)(x - 1) = 0 \iff (x - 3)(x + 2)(x - 1) = 0$$

De oplossingen zijn dus $x = 3$, $x = -2$ en $x = 1$.

Veeltermvergelijkingen kunnen soms ook door middel van een substitutie opgelost worden.

Voorbeeld 7.3.3. In de vergelijking

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

herkennen we een vierkantsvergelijking in t, als we $t = x^2$ stellen.

De oplossingen van de vergelijking $t^2 + t - 2 = 0$ zijn $t = 1$ en $t = -2$. We bepalen nu voor elke oplossing de bijhorende waarde van x.

- $t = 1$ geeft de vergelijking $x^2 = 1$, met als oplossing $x = 1$ en $x = -1$.
- $t = -2$ geeft de vergelijking $x^2 = -2$, die geen reële oplossingen heeft.

De vergelijking $x^4 + x^2 - 2 = 0$ heeft dus als reële oplossingen $x = 1$ en $x = -1$.

Controle:

voor $x = 1$: linkerlid: $1^4 + 1^2 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$

CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Veeltermvergelijkingen

voor $x=-1$: linkerlid: $(-1)^4+(-1)^2-2=1+1-2=0$

Hetzelfde resultaat kan ook gevonden worden door x^4+x^2-2 te ontbinden in factoren, maar dit vraagt meer rekenwerk en is bijgevolg niet de aangewezen methode:

We zoeken eerst een geheel nulpunt van $p(x)=x^4+x^2-2$. Hiervoor kijken we naar de gehele delers van de constante term, dit zijn $1,-1,2,-2$.

We berekenen $p(1)=1+1-2=0$.

Er bestaat dus zeker een veelterm $q(x)$ zodat $x^4+x^2-2=(x-1)q(x)$.

Deze veelterm $q(x)$ berekenen we met de Euclidische deling of via het rekenschema van Horner:

$$x^4+x^2-2=(x-1)(x^3+x^2+2x+2)$$

We ontbinden de factor $q(x)=x^3+x^2+2x+2$ verder: we kijken opnieuw naar de gehele delers van de constante term, dit zijn $1,-1,2,-2$. Nu is $q(1)=1+1+2+2\neq 0$, maar $q(-1)=-1+1-2+2=0$. We delen $q(x)$ door $x+1$ met de Euclidische deling of via het rekenschema van Horner en vinden dat $x^3+x^2+2x+2=(x+1)(x^2+2)$. Dus

$$x^4+x^2-2=(x-1)(x+1)(x^2+2)$$

De factor x^2+2 kan niet verder ontbonden worden want deze heeft geen reëel nulpunt.

$$x^4+x^2-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2+2)=0$$

De oplossingen van de vergelijking $x^4+x^2-2=0$ zijn dus $x=1$ en $x=-1$.

Opmerking 7.3.2.

Bij veeltermvergelijkingen met parameters kunnen 2 soorten vragen gesteld worden.

- *Los de vergelijking op naar de onbekende.*
  Bijvoorbeeld: Los $3x^2+bx-1=0$, met parameter b, op naar x:
  De discriminant is $D=b^2-4\cdot 3\cdot(-1)=b^2+12>0$. Omdat $D>0$, vinden we twee verschillende oplossingen:
  $$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2+12}}{6}$$
  $$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2+12}}{6}$$
  De oplossingen hangen dus af van de parameter b.
- *Voor welke waarden van de parameter(s) zijn twee veeltermen (van dezelfde graad) gelijk.*
  Bijvoorbeeld: Voor welke waarden van de parameters a en b geldt de gelijkheid
  $$(x-2)(ax+b)=x^2-3x+2.$$
  We herschrijven deze gelijkheid: $ax^2+(b-2a)x-2b=x^2-3x+2$.
  Twee veeltermen van graad 2 zijn gelijk als de overeenkomstige coëfficiënten gelijk zijn, dus
  $$\begin{cases} a=1 \\ b-2a=-3 \\ -2b=2 \end{cases}$$
  Dit stelsel heeft als unieke oplossing $a=1$ en $b=-1$.

CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Veeltermvergelijkingen

Oefening 7.3.2. Voor welke waarden van de parameters a en b geldt de gelijkheid

$$2ax^2 + (b-1)x + 4 = 6x^2 + 3x + 4.$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.3.A Oefeningen veeltermvergelijkingen

7.3.A.1 Niveau 1

Oefening 7.3.3. Los de volgende veeltermvergelijkingen op naar x.

1. $3x - 5 = x + 9$ $x = \ldots\ldots$
2. $5x^2 + 2x - 5 = 3x^2 + 4x + 7$ $\ldots\ldots$
3. $x^2 - x + 1 = -5 + x$ $\ldots\ldots$
4. $x + 10 = -2x + \frac{1}{2}$ $x = \ldots\ldots$
5. $2x + 1 = 2x^2 - 3$ $\ldots\ldots$

7.3.A.2 Niveau 2

Oefening 7.3.4. Los de volgende veeltermvergelijkingen op naar x.

1. $q = x(p + x)$, met parameters p en q, waarbij $q > 0$.
2. $x^3 + a = ax^2 + x$, met parameter a.

Oefening 7.3.5. Los de volgende veeltermvergelijkingen op naar x.

1. $x^4 + 4 = 5x^2$
2. $x^4 + a = (a + 1)x^2$, met parameter $a > 0$.

Oefening 7.3.6. Los op naar a.

1. $a^2 + ab - b^2 = 0$

Oefening 7.3.7. Voor welke waarden van de parameters a, b en c gelden volgende gelijkheden.

1. $ax^2 + bx + c = 2(x - 1)^2 + 3(x - 1) + 4$
2. $ax(x + 1) + b(x + 1) + cx^2 = 1$
3. $a(x^2 + x + 1) + bx^2 + cx = 1$
4. $2x^2 - 3x + 7 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 Rationale vergelijkingen

Veronderstelde voorkennis: veeltermbreuken en eenvoudige stelsels oplossen

Rationale vergelijkingen in één onbekende zijn vergelijkingen waarbij linkerlid en rechterlid opgebouwd zijn uit veeltermen en veeltermbreuken in die onbekende. De onbekende moet in minstens één noemer voorkomen.

Voorbeeld 7.4.1 (Rationale vergelijkingen)**.**

- $\frac{x^2+1}{x-4} = 3$
- $\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} = x^2$
- $\frac{x^2+7x+4}{3x+2} = \frac{x+6}{2x}$

Vooraleer we de oplossingen zoeken van een rationale vergelijking, noteren we de waarde(n) van de onbekende waarvoor de noemers die voorkomen in de vergelijking nul worden. Dit wordt de **bestaansvoorwaarde** genoemd. Deze waarden kunnen niet tot de oplossing behoren omdat de noemers van de breuken niet nul mogen zijn.

Voorbeeld 7.4.2 (Bestaansvoorwaarde)**.**

Vooraleer we de vergelijking $\frac{x+1}{x-5} = 7$ oplossen, noteren we dat de bestaansvoorwaarde $x \neq 5$ is.

Een rationale vergelijkingen lossen we op door eerst de voorkomende veeltermbreuken te vereenvoudigen indien mogelijk en dan de noemer(s) weg te werken. Na het wegwerken van de noemers moeten we verder een veeltermvergelijking oplossen. Om de noemers weg te werken gebruiken we de overbrengingsregel:

$$\text{Voor } r \neq 0 : a = b \iff a \cdot r = b \cdot r$$

We werken de noemers weg door beide leden te vermenigvuldigen met het kleinste gemene veelvoud van de noemers die voorkomen in de vergelijking (na vereenvoudiging van de veeltermbreuken) en vinden als resulaat een veeltermvergelijking.

Voorbeeld 7.4.3. Los op naar x:

1. $\frac{x-3}{x} = \frac{7}{5}$

Uitwerking: Bestaansvoorwaarde: $x \neq 0$. We vermenigvuldigen beide leden met $5x \neq 0$.

$$\frac{x-3}{x} = \frac{7}{5} \iff 5(x-3) = 7x \iff 5x - 15 = 7x \iff -15 = 2x \iff x = -\frac{15}{2}$$

$x = -\frac{15}{2}$ voldoet aan de bestaansvoorwaarde, dus de oplossing is $x = -\frac{15}{2}$.

2. $\frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} = 1$

Bij een som van veeltermbreuken kan je als tussenstap deze eerst op gelijke noemer brengen.

Uitwerking: Bestaansvoorwaarde: $x \neq 0$ en $x \neq -1$.

- Eerst brengen we de breuken in het linkerlid op gelijke noemer, daarna vermenigvuldigen we beide leden

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 Rationale vergelijkingen

met het kleinste gemene veelvoud van de noemers: $x(x+1) \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}=1 &\iff \frac{2(x+1)}{x(x+1)}+\frac{x}{x(x+1)}=1\\ &\iff 2(x+1)+x=x(x+1)\\ &\iff 0=x^2-2x-2\\ &\iff x=1\pm\sqrt{3}\end{aligned}$$

Beide gevonden waarden voldoen aan de bestaansvoorwaarde dus de oplossingen zijn $x_1 = 1+\sqrt{3}$ en $x_2 = 1-\sqrt{3}$.

- Alternatief 1: Je kan de stap van de breuken in het linkerlid op gelijke noemer te zetten overslaan en meteen beide leden vermenigvuldigen met $x(x+1)$:

$$\begin{aligned}\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}=1 &\iff 2(x+1)+x=x(x+1)\\ &\iff 0=x^2-2x-2\\ &\iff x=1\pm\sqrt{3}\end{aligned}$$

- Alternatief 2: Je kan elke term in zowel linkerlid als rechterlid op gelijke noemer brengen:

$$\begin{aligned}\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}=1 &\iff \frac{2(x+1)}{x(x+1)}+\frac{x}{x(x+1)}=\frac{x(x+1)}{x(x+1)}\\ &\iff 2(x+1)+x=x(x+1)\\ &\iff 0=x^2-2x-2\\ &\iff x=1\pm\sqrt{3}\end{aligned}$$

3. $\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{5}{x-1}$

Vermenigvuldigen met het kleinste gemene veelvoud van de noemers is niet altijd vermenigvuldigen met het product van de noemers. Om het kleinste gemene veelvoud te vinden moet je eerst de noemers ontbinden in factoren.

Uitwerking: Bestaansvoorwaarde: $x \neq 1$ en $x \neq -1$.

De noemer in het linkerlid kunnen we ontbinden in factoren: $x^2-1=(x-1)(x+1)$. We vermenigvuldigen beide leden met het kleinste gemene veelvoud van de noemers, namelijk $(x-1)(x+1) \neq 0$.

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)}=\frac{5}{x-1} \iff 2x=5(x+1) \iff -5=3x \iff x=-\frac{5}{3}$$

$x=-\frac{5}{3}$ voldoet aan de bestaansvoorwaarde, dus de oplossing is $x=-\frac{5}{3}$.

4. $\dfrac{2x+10}{x+5}=3$

Hou rekening met de bestaansvoorwaarde!

Uitwerking: Bestaansvoorwaarde: $x \neq -5$.

- We werken de noemer weg door beide leden te vermenigvuldigen met $x+5 \neq 0$:

$$\frac{2x+10}{x+5}=3 \iff 2x+10=3x+15 \iff -5=x$$

De oplossing $x=-5$ voldoet niet aan de bestaansvoorwaarde, dus deze vergelijking heeft geen oplossing.

- Alternatief: We vereenvoudigen eerst de breuk. We mogen de gemeenschappelijke factor $x+5$ wegdelen in teller en noemer omdat $x+5 \neq 0$ wegens de bestaansvoorwaarde: $\dfrac{2x+10}{x+5}=3 \iff 2=3$. We besluiten weer dat de vergelijking geen oplossing heeft.

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 Rationale vergelijkingen

Oefening 7.4.1. Los op naar x: $\dfrac{x+1}{x-2} = 3$

Opmerking 7.4.1.

Uit de overbrengingsregels volgen volgende speciale gevallen:

Voor reële getallen a, b, c met $b \neq 0$:

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{b} \iff a = c$

$\dfrac{a}{b} = 0 \iff a = 0$

Voorbeeld 7.4.4.

Uit $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{7}{2}$ volgt dat $x - 3 = 7$, dus $x = 10$.

Uit $\dfrac{x-3}{2} = 0$, volgt dat $x = 3$.

Opmerking 7.4.2.

Bij rationale vergelijkingen met parameters kunnen 2 soorten vragen gesteld worden.

- *Los de vergelijking op naar de onbekende.*

  Bijvoorbeeld: Los $\dfrac{x+b}{x-2} = 3$, met parameter b, op naar x:

  De bestaansvoorwaarde is $x \neq 2$. We vinden

  $\dfrac{x+b}{x-2} = 3 \iff x + b = 3(x-2) \iff x + b = 3x - 6 \iff b + 6 = 2x \iff x = 3 + \dfrac{b}{2}$

  De waarde $x = 3 + \dfrac{b}{2}$ voldoet aan de bestaansvoorwaarde tenzij $b = -2$. In dit geval heeft de vergelijking geen oplossing.

  geval $b = -2$: geen oplossing

  geval $b \neq -2$: één oplossing, namelijk $x = 3 + \dfrac{b}{2}$

  De oplossing hangt dus af van de parameter b.

- *Voor welke waarden van de parameter(s) zijn beide leden gelijk.*

  Bijvoorbeeld: Voor welke waarden van de parameters a en b geldt de gelijkheid

  $$\frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

  We herschrijven deze gelijkheid door de breuken in het rechterlid op gelijke noemer te brengen:

  $\dfrac{5x-1}{x^2-1} = \dfrac{a(x+1)}{x^2-1} + \dfrac{b(x-1)}{x^2-1} \iff \dfrac{5x-1}{x^2-1} = \dfrac{(a+b)x + a - b}{x^2-1} \iff 5x - 1 = (a+b)x + a - b.$

  Twee veeltermen van graad 1 zijn gelijk als de overeenkomstige coëfficiënten gelijk zijn, dus

  $$\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = -1 \end{cases}$$

  Dit stelsel heeft als unieke oplossing $a = 2$ en $b = 3$.

CC BY-NC-SA 4.0

7.4 Rationale vergelijkingen

Oefening 7.4.2. Voor welke waarden van de parameters a en b geldt de gelijkheid

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x+3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.4.A Oefeningen rationale vergelijkingen

7.4.A.1 Niveau 1

Oefening 7.4.3. Los de volgende rationale vergelijkingen op naar x.

1. $\dfrac{2x-1}{x+1} = 3 \qquad x = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x-1} = 3$

7.4.A.2 Niveau 2

Oefening 7.4.4. Los de volgende rationale vergelijkingen op naar x.

1. $\dfrac{1}{2x-4} + \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{5}{6}$
2. $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{12}{x^2-2x-3}$
3. $\dfrac{x^2-4}{x-2} = x$
4. $\dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1}$
5. $\dfrac{x+1}{x^2-2x+1} - \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2}{x^2-1}$

Oefening 7.4.5. Los de volgende rationale vergelijkingen op naar x.

1. $\dfrac{x+a}{x-1} = 2$, met parameter a.
2. $\dfrac{-2}{x+a} = \dfrac{-1}{x}$, met parameter a

Oefening 7.4.6. Voor welke waarden van de parameter(s) zijn beide leden gelijk?

1. $\dfrac{6}{(x^2-1)(x+2)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2}$, met parameters a, b en c.
2. $\dfrac{-x^2-2x-5}{(x^2+1)(x-3)} = \dfrac{ax+b}{x^2+1} + \dfrac{c}{x-3}$, met parameters a, b en c.

7.4.A.3 Niveau 3

Oefening 7.4.7. Los de volgende rationale vergelijkingen op naar x.

1. $\dfrac{a}{x-1} = \dfrac{x+a}{x+2}$, met parameter a

CC BY-NC-SA 4.0

7.5 Irrationale vergelijkingen

Irrationale vergelijkingen in één onbekende zijn vergelijkingen waarbij de onbekende onder minstens één wortelteken voorkomt. We beperken ons op deze pagina tot vierkantswortels, en nemen die wortels enkel van veeltermen.

Voorbeeld 7.5.1 (Irrationale vergelijkingen)**.**

- $\sqrt{x+2} = x$
- $\sqrt{3x+2} = \sqrt{5x+3}$

Bij het oplossen van een irrationale vergelijkingen zal men op een bepaald moment beide leden van de vergelijking kwadrateren. Maar hierdoor kan een specifiek type probleem optreden: het introduceren van 'valse oplossingen'.

Voorbeeld 7.5.2. Beschouw de vergelijking

$$\sqrt{x+2} = x.$$

Een mogelijkheid om deze vergelijking op te lossen is om beide leden van de vergelijking te *kwadrateren*:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= x^2 \\ \Leftrightarrow\ x+2 &= x^2, \end{aligned}$$

en dit is een tweedegraadsvergelijking $x^2 - x - 2 = 0$, waarvan je kan berekenen dat de oplossingen -1 en 2 zijn. Mooi, daarmee hebben we de vergelijking opgelost. Of toch niet?

Als we $x = 2$ invullen in $\sqrt{x+2} = x$ vinden we $\sqrt{4} = 2$, wat uiteraard klopt. Maar als we $x = -1$ invullen vinden we $\sqrt{1} = -1$. Maar $\sqrt{1}$ is helemaal niet gelijk aan -1, en $x = -1$ is dus *geen* oplossing van $\sqrt{x+2} = x$, ook al was het wel een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking.

Hoe kunnen we dit soort problemen voorkomen? Een vergelijking met een vierkantswortel zouden we graag oplossen zoals hierboven, namelijk door de vergelijking te kwadrateren. Kwadrateren introduceert echter mogelijk valse oplossingen, die we met behulp van zogenaamde *bestaansvoorwaarden* en *kwadrateringsvoorwaarden* kunnen uitsluiten. Bij het oplossen van een vergelijking met een vierkantswortel in, moeten we rekening houden met volgende voorwaarden:

- **Bestaansvoorwaarde**: wat onder de vierkantswortel staat moet positief zijn.
- **Kwadrateringsvoorwaarde**: wat gelijk is aan een vierkantswortel moet positief zijn.

De oplossingen van irrationale vergelijkingen moeten dus voldoen aan bestaans- en kwadrateringsvoorwaarden.

Opmerking 7.5.1. Van waar komt die kwadrateringsvoorwaarde precies?

Uit $a = b$, volgt dat $a^2 = b^2$.

Maar dit mogen we niet omdraaien, uit $a^2 = b^2$ volgt niet steeds dat $a = b$:

Uit $(3)^2 = (-3)^2$ volgt immers niet dat $3 = -3$.

De vergelijkingen $a = b$ en $a^2 = b^2$ zijn dus niet equivalent, ze hebben niet dezelfde oplossingsverzameling.

CC BY-NC-SA 4.0

7.5 Irrationale vergelijkingen

Voorbeeld 7.5.3. Herneem vorig voorbeeld:

$$\sqrt{x+2} = x.$$

De **bestaansvoorwaarde** zegt dat wat onder de vierkantswortel staat positief moet zijn, oftewel dat $x+2 \geq 0$. Dit kunnen we herschrijven als $x \geq -2$. Beide oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking (-1 en 2) voldoen aan deze voorwaarde.
De **kwadrateringsvoorwaarde** zegt dat wat gelijk is aan een vierkantswortel positief moet zijn. In dit geval is de vierkanstwortel gelijk aan x, en dus moet $x \geq 0$. Het getal 2 is groter dan nul, en is dan ook een oplossing van de vergelijking $\sqrt{x+2} = x$: het voldoet immers aan beide voorwaarden en is een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking. Het getal -1 is echter niet groter dan 0, de kwadrateringsvoorwaarde is niet voldaan, en -1 is inderdaad geen oplossing van $\sqrt{x+2} = x$.

We overlopen de oplossingsmethode in volgende drie gevallen:

(a) De onbekende komt onder slechts één wortelteken voor, bijvoorbeeld $\sqrt{x+5} - x = -1$.

(b) De vergelijking is een gelijkheid van twee wortels, bijvoorbeeld $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3}$.

(c) De onbekende komt onder twee worteltekens voor, bijvoorbeeld $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 3$.

Voorbeeld 7.5.4.

1. Los op naar x: $\sqrt{x+5} - x = -1$

Uitwerking:

We kunnen de **wortel isoleren** in één van beide leden: $\sqrt{x+5} = x - 1$

Bestaansvoorwaarde: $x+5 \geq 0$, dus $x \geq -5$

Kwadrateringvoorwaarde: $x - 1 \geq 0$, dus $x \geq 1$

We **kwadrateren** beide leden en lossen de bekomen vergelijking op:

$$x+5 = (x-1)^2 \iff x+5 = x^2 - 2x + 1 \iff x^2 - 3x - 4 = 0$$

De oplossingen van $x^2 - 3x - 4 = 0$ zijn 4 en -1. Enkel 4 voldoet aan de bestaans- en kwadrateringsvoorwaarde en is bijgevolg de enige oplossing van de gegeven vergelijking.

2. Los op naar x: $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3}$

Uitwerking:

Bestaansvoorwaarde: In dit geval hebben we twee bestaansvoorwaarden namelijk $2x+1 \geq 0$, dus $x \geq -\frac{1}{2}$ en $x+3 \geq 0$, dus $x \geq -3$. Beide voorwaarden zijn voldaan indien $x \geq -\frac{1}{2}$.

Kwadrateringvoorwaarde: Omdat beide leden positief zijn hebben we geen kwadrateringsvoorwaarde nodig.

We **kwadrateren** beide leden en lossen de bekomen vergelijking op:

$$2x+1 = x+3 \iff x = 2$$

De oplossing 2 voldoet aan de bestaansvoorwaarden en is bijgevolg de enige oplossing van de gegeven vergelijking.

3. Los op naar x: $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 3$

Uitwerking:

CC BY-NC-SA 4.0

7.5 Irrationale vergelijkingen

Bestaansvoorwaarden: $x \geq 0$ en $x - 1 \geq 0$. Beide voorwaarden zijn voldaan indien $x \geq 1$.

Kwadrateringvoorwaarde: Omdat beide leden positief zijn hebben we geen kwadrateringsvoorwaarde nodig.

We **kwadrateren** beide leden en krijgen zo een irrationale vergelijking met **slechts één wortelteken**:

$$x + x - 1 + 2\sqrt{x(x-1)} = 9$$

We **isoleren** het wortelteken in het linkerlid:

$$2\sqrt{x(x-1)} = 9 - 2x + 1 \iff \sqrt{x(x-1)} = 5 - x$$

Deze vergelijking heeft als kwadrateringsvoorwaarde $5 - x \geq 0$. We **kwadrateren** beide leden en lossen de bekomen vergelijking op:

$$x(x-1) = 25 - 10x + x^2 \iff x^2 - x = 25 - 10x + x^2 \iff 9x = 25$$

De oplossing $x = \frac{25}{9}$ voldoet aan de bestaans- en kwadrateringsvoorwaarden en is bijgevolg de enige oplossing van de gegeven vergelijking.

Oefening 7.5.1. Los op naar x: $1 + \sqrt{x+1} = x$

De kwadrateringsvoorwaarde is in het leven geroepen voor het oplossen van vergelijkingen met vierkantswortels, maar bestaansvoorwaarden komen in nog veel andere situaties voor.

Opmerking 7.5.2 (Andere voorbeelden van bestaansvoorwaarden)**.**

Bestaansvoorwaarden treden ook op in andere situaties, bijvoorbeeld:

- De noemer van een breuk mag niet nul zijn.
- Het argument van de logaritme moet strikt positief zijn: de uitdrukking $\log x$ heeft enkel zin als $x > 0$.
- Het argument van de tangens mag niet van de vorm $\frac{\pi}{2} + k\pi$ zijn met $k \in \mathbb{Z}$. Dus de uitdrukking $\tan x$ is enkel zinvol voor $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Opmerking 7.5.3 (Vergelijkingen met een derdemachtswortel)**.**

Bij vergelijkingen met derdemachtswortels moet je geen **bestaansvoorwaarde** opstellen, je kan immers ook van een negatief getal de derde machtswortel nemen. Evenmin moet je het analoge van de **kwadrateringsvoorwaarde** opstellen:

Uit $a = b$ volgt $a^3 = b^3$ en uit $a^3 = b^3$ volgt $a = b$. De vergelijkingen $a = b$ en $a^3 = b^3$ zijn equivalent, ze hebben dezelfde oplossingsverzameling.

CC BY-NC-SA 4.0

7.5.A Oefeningen irrationale vergelijkingen

7.5.A.1 Niveau 1

Oefening 7.5.2. Los op naar x.

1. $\sqrt{x+3} = 2$
2. $\sqrt{2x-5} = 1$
3. $\sqrt{x+2} = -1$

7.5.A.2 Niveau 2

Oefening 7.5.3. Los op naar x.

1. $\sqrt{2x+7} = x+2$
2. $\sqrt{x-3} = \sqrt{2x+5}$
3. $\sqrt{2x^2-4} = x$
4. $\sqrt{x+5} = 2+\sqrt{x-3}$

Oefening 7.5.4. Los op naar x.

1. $\sqrt{x+2a} = 2$ met parameter a
2. $\sqrt{x^2-a} = x-1$, met parameter a

CC BY-NC-SA 4.0

7.6 Absolute waarde en vergelijkingen

Veronderstelde voorkennis: De definitie van absolute waarde

Om vergelijkingen op te lossen waarin de onbekende voorkomt in een absolute waarde, kunnen we volgende eigenschap gebruiken.

Eigenschap 7.6.1. Als $x, y \in \mathbb{R}$, dan is

(a) $|x| = |y| \iff x = \pm y$

(b) $|x| = 0 \iff x = 0$

Voorbeeld 7.6.1. De vergelijking $|x-5| = 9$ heeft 2 oplossingen want ofwel is $x-5 = 9$ ofwel is $x-5 = -9$. De oplossingen zijn dan $x = 14$ of $x = -4$. We noteren de oplossingsverzameling als $V = \{-4, 14\}$.

Oefening 7.6.1. Los volgende vergelijkingen op naar x.

1. $|x| = 5$ ……
2. $|x-5| = 0$ ……
3. $|2x+5| = 4$ ……
4. $|x-3| = 7$ ……
5. $\left|\frac{x}{2} - 1\right| = 1$ ……
6. $\sqrt{(x-2)^2} = 5$ ……

CC BY-NC-SA 4.0

7.7 Vergelijkingen in 2 onbekenden

We beperken ons hier tot het geven van enkele voorbeelden. In veel gevallen stelt een vergelijking in twee onbekenden grafisch een kromme voor.

Voorbeeld 7.7.1.

- In de vergelijking
$$2x + 6 = 3y + x$$
wordt het linkerlid $2x + 6$, met daarin de onbekende x, gelijkgesteld aan het rechterlid $3y + x$ met onbekenden x en y. Er zijn *oneindig veel* oplossingen, bijvoorbeeld $x = 0$ en $y = 2$, of ook $x = 6$ en $y = 4$. Bij elke y hoort precies één x zodat die x en y een oplossing vormen, namelijk $x = 3y-6$. Je kan ook beweren dat bij elke x precies één y hoort, namelijk $y = x/3+2$. In deze laatste vergelijking herkennen we de **vergelijking van een rechte** in het vlak: de *voorwaarde* waaraan getallen x en y moeten voldoen opdat het punt (x, y) op die rechte zou liggen.
- De vergelijking
$$y = x^2$$
heeft ook *oneindig veel* oplossingen. Alle oplossingen (x, y) liggen op een parabool.
- De vergelijking
$$y^2 = -x^2$$
heeft een *unieke* oplossing, namelijk enkel $(x, y) = (0, 0)$ voldoet aan de vergelijking.
- De vergelijking
$$x^2 + y^2 = -1$$
heeft *geen* oplossingen.
- Soms is de vergelijking waar voor *alle* waarden van de onbekenden. Dan noemen we de vergelijking een **identiteit**. Dat geldt bijvoorbeeld voor de uitdrukking
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

We bekijken nu in meer detail de lineaire vergelijkingen in twee onbekenden.

Definitie 7.7.1. Een **eerstegraadsvergelijking** (of **lineaire vergelijking**) **in twee onbekenden** x, y is een uitdrukking van de vorm
$$ax + by + c = 0$$
met $a, b, c \in \mathbb{R}$ waarbij a en b niet beide nul zijn.

Voorbeeld 7.7.2. Beschouw de volgende eerstegraadsvergelijking in twee onbekenden x en y
$$10x + 2y - 6 = 0$$
Dit is eigenlijk de *vergelijking van een rechte*. Immers, we kunnen dit ook schrijven als:
$$y = -5x + 3$$
Voor elke x-waarde kunnen we dan een y-waarde berekenen, bv. voor $x = 0$ vinden we $y = 3$. Elk punt op de rechte is een oplossing van de vergelijking.

CC BY-NC-SA 4.0

7.7 Vergelijkingen in 2 onbekenden

Eigenschap 7.7.1.

De verzameling van alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan de vergelijking $ax + by + c = 0$ vormen een rechte:

- Als $b \neq 0$ is kunnen we de vergelijking herschrijven als :

$$y = -\frac{1}{b}(ax + c) \quad \text{of} \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

  Dit is de grafiek van de reële functie $x \mapsto mx + q$ met $m = -\frac{a}{b}$ en $q = -\frac{c}{b}$.

  Alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan de vergelijking $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ vormen dus een rechte met richtingscoëfficiënt $-\frac{a}{b}$ en snijpunt met de y-as $-\frac{c}{b}$. Indien $a = 0$ is dit een horizontale rechte.

- Als $b = 0$ is de vergelijking $ax + c = 0$. Vermits a en b niet beiden nul zijn is $a \neq 0$ dus kunnen we de vergelijking herschrijven als

$$x = -\frac{c}{a}.$$

  Merk op dat er geen voorwaarde is op y, dus y kan alle mogelijke waarden aannemen. Alle punten (x, y) in het vlak die voldoen aan $x = -\frac{c}{a}$ vormen bijgevolg de verticale rechte $x = -\frac{c}{a}$.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 8
Functies deel 1

(Versie 2026/11/23H.2)

8.1 Intuïtieve definitie van het begrip functie

Functies zijn erg fundamentele objecten in de wiskunde. Ze verschijnen in velerlei contexten, onder verschillende gedaanten, en hebben verschillende definities en voorstellingen. Een typisch eerste voorbeeld om in gedachten te houden is de functie 'kwadrateer', die met elk getal zijn kwadraat associeert.

Definitie 8.1.1 (Pseudo-definities van het begrip functie)**.**

Een **functie** is iets dat voldoet aan volgende, min of meer equivalente, karakteriseringen:

- een *machine* of *black box* die voor toegelaten *inputs* telkens exact één *output* genereert.
- een bepaald soort *verband* tussen een *onafhankelijke variabele* en een *afhankelijke variabele*.
- een *wiskundig object* dat een *('functioneel') verband* uitdrukt tussen andere *wiskundige objecten*.

Deze pseudo-definitie is bewust erg vaag, maar met de volgende voorbeelden, definities en eigenschappen zal het concept 'functie' een steeds duidelijkere en concretere invulling krijgen.

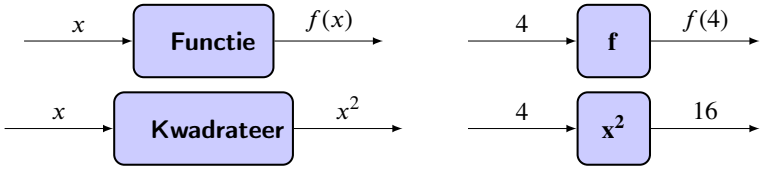
Een nuttige initiële voorstellingswijze van een functie bestaat uit een (in dit geval blauwe) *black box*, die voor een bepaalde input I een bepaalde output O genereert:



Een **functie** zet dus een *input* om in een *output*. Ongeveer alles kan dienen als input en output van wiskundige functies, maar in wat volgt zullen we ons concentreren op zogenaamde **reële functies**: dat zijn die functies waarvan zowel de input als de output reële getallen zijn. Voor dergelijke reële functies bestaan er allerlei interessante begrippen en eigenschappen die niet zomaar van toepassing zijn op meer algemene functies, zoals nulpunten, minima en maxima, grafieken, afgeleiden, integralen,....

Een functie heeft meestal een **naam**. Meestal gebruiken we gewoon f van $f$unctie, maar ook h, g, f_1, f_2 komen dikwijls voor. Sommige functies hebben vaste standaardnamen of 'eigennamen', zoals de vierkantswortel, sinus, logaritme, ...

Als symbool voor een willekeurige **input** gebruiken we meestal de letter x, maar ook andere letters zoals t, n, x_1,x_2, y en y_1 komen voor. In plaats van een willekeurige x kan de input echter ook een concreet getal als 4 of zelfs een andere formule als $a+1$ zijn.



De **output** of het resultaat van de functie noteren we naargelang de keuzes voor de input en de functie met $f(x)$ of bijvoorbeeld $h(t)$. Uitzonderlijk laten we de haakjes weg en schrijven ook fx. Bij de sinusfunctie $\sin x$ is dat bijvoorbeeld de gewoonte. Soms geven we ook een generieke naam aan de output. De letter y is daarvoor een erg populaire keuze. We schrijven dan $y = f(x)$. We bedoelen daarmee dat f een functie is waar je x kan instoppen en wat er dan uitkomt noemen we y, of $f(x)$.

In de formule $y = f(x)$ staat x dus voor de input, f voor de functie (de *black-box*) en y voor de output. Pas op: die generieke naam y voor de output veroorzaakt dikwijls verwarring, want de letter y wordt bijvoorbeeld ook gebruikt voor de tweede coördinaat van een punt in het vlak en dat heeft weinig te maken met functiewaarden. Daarom vermijden we in deze cursus waar mogelijk om de output een naam te geven,

CC BY-NC-SA 4.0

8.1 Intuïtieve definitie van het begrip functie

en we noteren de functie die x afbeeldt op $f(x)$ liefst als

$$f : x \mapsto f(x) \quad \text{of} \quad x \mapsto f(x),$$

maar niet als $x \to f(x)$: let op het verschillende pijltje '$\mapsto$' versus '$\to$'.

We *lezen* de uitdrukking $f(x)$ als
$$\begin{cases} f \text{ van } x \\ \text{de } \textit{functiewaarde} \text{ van } f \textit{ in } x \\ \text{het } \textit{beeld} \text{ van } f \textit{ in } x \\ \text{het } \textit{beeld} \text{ van } x \textit{ onder } f \text{ (of } \textit{door } f\text{)} \end{cases}$$

We zeggen ook dat f het element x '*afbeeldt*' op $f(x)$, of dat 'f *toepassen* op x' het element $f(x)$ oplevert.

Voorbeeld 8.1.1.

1. Als we de 'kwadrateer'-functie k noemen schrijven we dus:

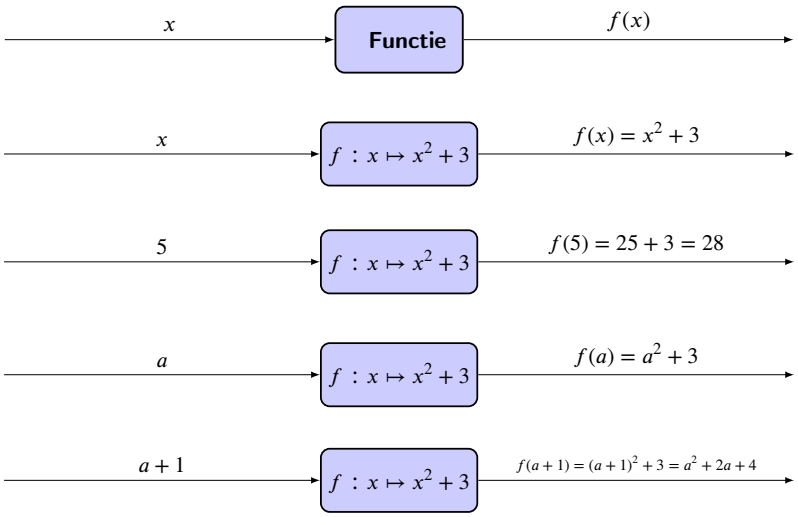
$$k : x \mapsto x^2 \quad \text{of} \quad k : x \mapsto k(x) = x^2$$

Voor deze functie k geldt dat $k(2) = 2^2 = 4$ en $k(4) = 4^2 = 16$.
We *moeten* de functie geen naam geven, en kunnen ook gewoon schrijven $x \mapsto x^2$.

2. Voor de functie $f : x \mapsto x^2 + 3$ hebben we bijvoorbeeld volgende *functiewaarden*:

$$f(0) = 0^2 + 3 = 3$$
$$f(5) = 5^2 + 3 = 28$$
$$f(-5) = (-5)^2 + 3 = 28 = f(5)$$

Functiewaarden worden ook weergegeven op de *black-box* diagrammen van hierboven. We kunnen bovendien ook *letters* gebruiken om de input van een functie voor te stellen, zoals hieronder weergegeven met de letter a. Dikwijls stellen deze letters dan een specifiek getal, een *vaste* waarde, voor. De letter x wordt meestal gebruikt om *eender welk* getal aan te tonen: we zeggen dat waarde van x *varieert*, of dat x een *variabele* is. Ook combinaties van letters en getallen zoals sommen, producten,... kunnen een input zijn van een functie.



CC BY-NC-SA 4.0

8.1 Intuïtieve definitie van het begrip functie

Opmerking 8.1.1.

Het is belangrijk dat bij elke inputwaarde precies één vaste outputwaarde hoort. Volgende constructies zijn dus *geen* functies:

- $f : x \mapsto$(de som van het aantal ogen van x worpen met een dobbelsteen): de outputwaarden liggen niet vast.
- $f : x \mapsto$(een getal a zodat $a^2 = x$): de outputwaarde ligt niet vast, want 4 heeft zowel 2 als -2 als mogelijke outputwaarde.

Merk op dat een functie dus *niet* zomaar hetzelfde is als 'een formule' of 'een grafiek'.

Functies waarvan zowel de input als de output reële getallen zijn, noemen we *reële functies*. Dergelijke functies kunnen bepaald worden met een *formule*, ook wel *functievoorschrift* genoemd.

Een *formule* is een reeks symbolen die aan bepaalde regels voldoet: $x^2 + a^2x + 7$ is een goede formule, maar $x - +8(a7)$ is dat niet.

Voorbeeld 8.1.2. Reële functies voorgesteld door *formules* die de functiewaarde $f(x)$ *berekenen*:

Functie	Formule	Functie	Formule
'plus 5'	$f(x) = x + 5$	'min 5'	$f(x) = x - 5$
'kwadrateer'	$f(x) = x^2$	'sinus van de dubbele hoek'	$f(x) = \sin(2x)$
'vierkantswortel'	$f(x) = \sqrt{x}$	'vierkantswortel plus acht'	$f(x) = \sqrt{x} + 8$

Verschillende voorschriften kunnen toch dezelfde functie bepalen. Zo zijn de functies $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2}$ en $f_2 : x \mapsto |x|$ aan elkaar gelijk.

Nog enkele voorbeelden van functievoorschriften van reële functies.

Voorbeeld 8.1.3 (*Reële* functies)**.**

De functie 'maal 6':	$f(x) = 6x$	
De functie '7':	$f(x) = 7$	(een *constante* functie)
De functie '0', of de *nulfunctie*:	$f(x) = 0$	(ook een *constante* functie)
De functie 'doe niets':	$f(x) = x$	(de *identieke* functie)
De functie 'tegengestelde':	$f(x) = -x$	
Eerstegraadsfuncties:	$f(x) = ax + b$	met zekere $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$
Goniometrische functies:	$f(x) = \sin(x)$	
	$f(x) = \cos(ax + b)$	met $a, b \in \mathbb{R}$

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Domein en codomein van een functie

Veronderstelde voorkennis: Verzamelingen en Bewerkingen met verzamelingen

Functies veranderen *inputs* in *outputs*. Het is belangrijk te bepalen welk type inputs en outputs kunnen of mogen voorkomen. Dat wordt beschreven met behulp van twee begrippen: het *domein* van een functie, dit is de verzameling van alle toegelaten inputs en het *codomein* van een functie, dit is de verzameling waartoe alle outputs moeten behoren.

Definitie 8.2.1 (Domein en codomein van een functie)**.**

Het **domein** van een functie f, genoteerd $\mathrm{dom}\, f$, is de verzameling van alle *toegelaten inputs* van de functie.

Het **codomein** van een functie f (ook **doel** van f genoemd), genoteerd $\mathrm{codom}\, f$, is de verzameling waarin alle *mogelijke outputs* van de functie liggen.

Het **beeld** van een functie f (ook **bereik** van f genoemd), genoteerd $\mathrm{bld}\, f$, is de verzameling van alle *effectieve outputs* van de functie.

Voor een functie f van een domein A naar een codomein B schrijven we:

$$f : A \to B : x \mapsto f(x)$$

waarbij $A = \mathrm{dom}(f)$ en $B = \mathrm{codom}(f)$. De uitdrukking wordt soms ook over twee regels gespreid:

$$\begin{aligned} f &: A \to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Deze uitdrukking lezen we als: f is een functie van A naar B die (een willekeurige) x afbeeldt op $f(x)$.

Voorbeeld 8.2.1 (Domein en codomein van functies)**.**

Functie	domein	codomein	beeld
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x+5$	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}$✓
$f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x+5$	$\mathbb{R}^+$✓	$\mathbb{R}$✓	$[5,+\infty[$✓
$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}^+$✓
$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}^+$✓	$\mathbb{R}^+$✓
$f_5 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto -\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$✓	$\mathbb{R}$✓	$\mathbb{R}^-$✓

Bij de notatie $f : A \to B$ kan je domein en codomein aflezen, maar het beeld moet je berekenen.

Opmerking 8.2.1.

- Niet elk element van het *codomein* moet ook effectief worden *bereikt* door de functie f. De elementen die effectief worden bereikt, vormen precies het *beeld* of *bereik* van f. Het beeld van f is dus een *deelverzameling* van het codomein van f. Het beeld (of bereik) kan eventueel *kleiner* zijn dan het codomein maar nooit groter. De functie

  $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$$

  heeft als *codomein* $\mathbb{R}$, maar het *beeld* is $\mathbb{R}^+$ omdat het kwadraat van een reëel getal altijd

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Domein en codomein van een functie

positief is.

- Reële functies zijn functies waarbij zowel domein als codomein deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ of $\mathbb{R}$ zelf zijn. Als voor reële functies geen expliciet domein is opgeven, nemen we per conventie als domein de grootst mogelijke deelverzameling van $\mathbb{R}$ waarop de functie kan gedefinieerd worden. Als codomein nemen we meestal $\mathbb{R}$ als het niet expliciet is opgegeven. Een willekeurige reële functie f wordt genoteerd als

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x).$$

- *Elk* element van het *domein* moet een (uniek) beeld hebben. De volgende uitdrukking is dus *fout*:

$$\cancel{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x},}$$

omdat de vierkanstwortel niet gedefinieerd is voor *negatieve* getallen.

We kunnen de vierkantswortelfunctie wel schrijven als

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}.$$

Let op: het domein *moet niet* de grootst mogelijke verzameling zijn waarop de functie gedefinieerd kan worden. Ook volgende uitdrukking definieert een functie:

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$$

Per afspraak zijn twee functies aan elkaar gelijk als ze hetzelfde domein hebben, hetzelfde codomein, en allebei een element van hun domein afbeelden op dezelfde waarde van het codomein. Bovenstaande functies f en g zijn dus strikt genomen *verschillende functies*. We zullen verder zien dat dat belangrijk kan zijn bij het bestuderen van grafieken en vooral inverse functies.

- Let op het verschil in het gebruik van de pijlen: we gebruiken $\to$ tussen het domein en het codomein, maar we gebruiken steeds $\mapsto$ om aan te geven waarop een element wordt afgebeeld. De pijl $\to$ duidt dus aan tussen welke verzamelingen de functie gedefinieerd is, en de pijl $\mapsto$ duidt aan waarop een element wordt afgebeeld.

Een functie wordt niet alleen bepaald door wat ze doet, maar ook door haar mogelijke (of 'toegelaten') input en output. Zo is de functie 'kwadrateer-natuurlijke-getallen'

$$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2$$

strikt gesproken een *andere* functie dan de functie 'kwadrateer-gehele-getallen'

$$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2$$

of de functie 'kwadrateer-reële-getallen'

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2.$$

Immers, twee functies zijn gelijk aan elkaar als en slechts als ze dezelfde inputverzameling en outputverzameling hebben en als ze aan elke inputwaarde dezelfde outputwaarde toekennen.

Zelfs als elke functie $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ en $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telkens elke x afbeeldt op x^2, dan zijn het strikt genomen toch nog steeds *verschillende* functies. In vele gevallen zullen we in de praktijk echter toch gewoon spreken over de functie 'kwadrateer' en het onderscheid in domein en codomein negeren. We noteren dan $f : x \mapsto x^2$.

Bij de bespreking van inverse functies zal dit onderscheid belangrijk worden.

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Domein en codomein van een functie

Voorbeeld 8.2.2 (Slecht gedefinieerde functies)**.**

- De uitdrukking ~~$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x - 5$~~ is *ongeldig* omdat voor $x < 5$ geldt dat $f(x) < 0$ en dus niet behoort tot het aangegeven codomein $\mathbb{R}^+$.
  $f : \mathbb{R}^+ \to [-5, \infty[: x \mapsto x - 5$ is wel een correct gedefinieerde functie, net zoals
  $f : [5, \infty[\to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x - 5$.
- De uitdrukking ~~$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$~~ is *ongeldig* omdat f niet gedefinieerd is voor $x = 0$, en 0 kan dus niet behoren tot het domein.
  $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ is wel een correct gedefinieerde functie, net zoals
  $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$
- De uitdrukking ~~$f : \mathbb{R} \to [0, 1] : x \mapsto \sin x$~~ is *ongeldig* omdat $\sin x$ ook negatief kan zijn.
  $f : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin x$ is wel een correct gedefinieerde functie.

Opmerking 8.2.2.

Voor het bepalen van het grootst mogelijke domein van een functie kan je gebruik maken van volgende vuistregels:

- Noemers mogen niet nul worden
- Bij n-de machtswortels met even n moet de uitdrukking onder de wortel groter dan of gelijk aan nul zijn.

Verder in de cursus komt bijvoorbeeld ook aan bod dat je een logaritmische functie enkel kan toepassen op een strikt positief argument.

Oefening 8.2.1. Bepaal het *grootst mogelijke domein* met *bijhorend beeld* van volgende functies:

1. $f : \ldots\ldots \to \ldots\ldots, x \mapsto x - 3$

2. $g : \ldots\ldots \to \ldots\ldots \; x \mapsto x^4$

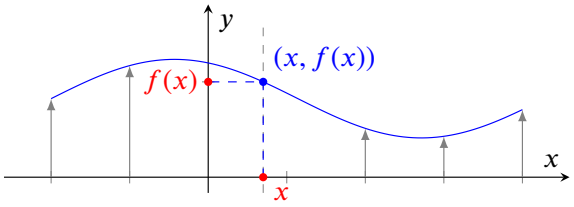
3. $h : \ldots\ldots \to \ldots\ldots, x \mapsto \sqrt{x - 5}$

CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Grafieken van reële functies

Een *reële functie* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, waarbij zowel de input als de output reële getallen zijn, kan worden voorgesteld door een *grafiek*, waarop een aantal belangrijke eigenschappen direct kunnen worden afgelezen.

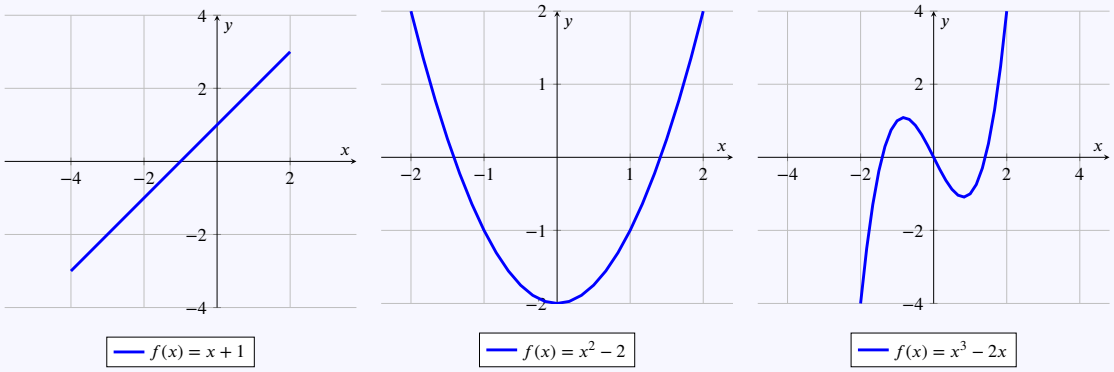
Definitie 8.3.1. De **grafiek van een reële functie** f is de kromme in het xy-vlak gevormd door de punten $(x, f(x))$ waarbij x loopt over alle waarden van het domein.



De grafiek van de functie f duidt dus boven elke x in het domein via het punt $(x, f(x))$ aan op welk getal $f(x)$ op de y-as deze x wordt afgebeeld. Als je de grafiek kent, *vind* je $f(x)$ als de *hoogte* van de grafiek in x, en als je de grafiek moet maken, *bepaalt* $f(x)$ de hoogte van die grafiek boven x. Daarbij ligt de grafiek *onder* de x-as als $f(x)$ negatief is.

Voorbeeld 8.3.1 (Grafieken)**.**

De **grafiek** van een functie $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bekomen we door in een vlak met x, y-coördinaten alle punten $(x, f(x))$ te tekenen.



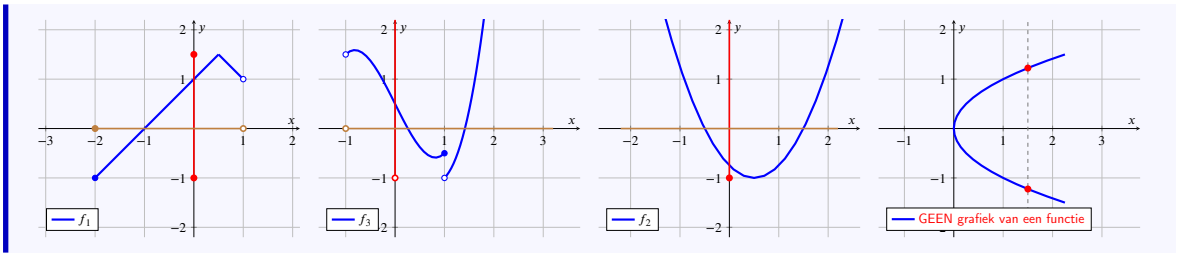
Voor de meeste reële functies is de grafiek een vloeiende kromme, die eventueel wel kniks en gaten kan hebben of sprongen kan maken. Per afspraak behoort een 'vol bolletje' tot de grafiek, terwijl een 'open bolletje' er geen deel van uitmaakt.

De grafiek voldoet wel altijd aan de **'verticale-snijlijn-test'**: elke verticale lijn snijdt de grafiek van een functie ten hoogste één keer, namelijk in het punt $(x, f(x))$ voor de verticale door $(x, 0)$. Dit volgt uit de voorwaarde dat bij elke x uit het domein van de functie f slechts één functiewaarde $f(x)$ hoort. Voor x *buiten* het domein snijdt de verticale door x de grafiek *niet*.

Voorbeeld 8.3.2 (Verticale-snijlijn-test)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Grafieken van reële functies



Er is volgend verband tussen enerzijds het domein en beeld van een functie en de projecties van haar grafiek op de horizontale en verticale assen:

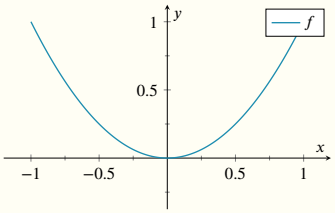
Eigenschap 8.3.1.

Het *domein* van een functie is de *verticale projectie* van haar grafiek op de *horizontale* x-as.
Het *beeld* van een functie is de *horizontale projectie* van haar grafiek op de *verticale* y-as.

Opmerking 8.3.1 (Zelf een grafiek schetsen)**.**

Om een duidelijke weergave van een functie te geven moet je volgende elementen aangeven op je schets van de grafiek:

- Assenstelsel
- Assen benoemen
- Assen ijken
- (Functie benoemen)



Een belangrijke eigenschap van reële functies zijn hun nulpunten.

Definitie 8.3.2. Een **nulpunt** van een reële functie f is een reëel getal a uit het domein van f waarvoor

$$f(a) = 0.$$

Een voorbeeld zijn de nulpunten van een kwadratische functie $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$.

Opmerking 8.3.2.

- Het bepalen van de nulpunten van f komt neer op het oplossen van de vergelijking $f(x) = 0$.
- Op de grafiek van een functie zijn de nulpunten de x-coördinaten van de punten waar de grafiek de x-as snijdt (of raakt).
- Een functie kan geen, één, meerdere of zelfs oneindig veel nulpunten hebben.

CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Grafieken van reële functies

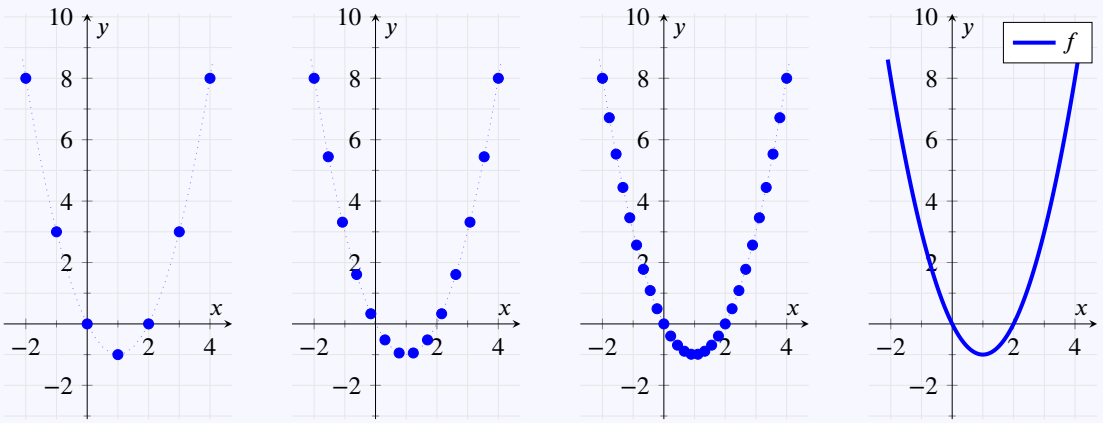
Voorbeeld 8.3.3 (grafiek van een functie)**.**

We onderzoeken de functie $f : x \mapsto x^2 - 2x$.

Als er geen expliciet domein is gegeven is, beschouwen we per afspraak het grootst mogelijke domein, in dit geval dus $\mathbb{R}$. We kunnen niet voor *alle* $x \in \mathbb{R}$ de bijhorende punten $(x, f(x))$ tekenen want dan krijgen we een oneindig grote figuur. We kiezen dus een relevant deel van het domein, hier bijvoorbeeld x tussen -2 en 4, zodat we een correct beeld krijgen van de functie.

Links zijn boven de punten $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ de functiewaarden $f(x) = 8, 3, 0, -1, 0, 3, 8$ aangeduid. Op de tekeningen rechts daarvan zijn telkens meer functiewaarden aangeduid. Voldoende punten verbonden door een vloeiende kromme geven een goede benadering van de grafiek.

We **lezen** die grafiek van links naar rechts, zoals een tekstregel. We zeggen dus dat de functie f (of de grafiek van de functie f) *daalt* tot aan $x = 1$ en vanaf daar verder *stijgt*. De functie (of de grafiek) heeft *nulpunten* in $x = 0$ en $x = 2$, en bereikt haar *minimum* $y = -1$ in het punt $x = 1$. De functie is *negatief* tussen de nulpunten, dus op het interval $]0, 2[$ en *positief* daarbuiten.

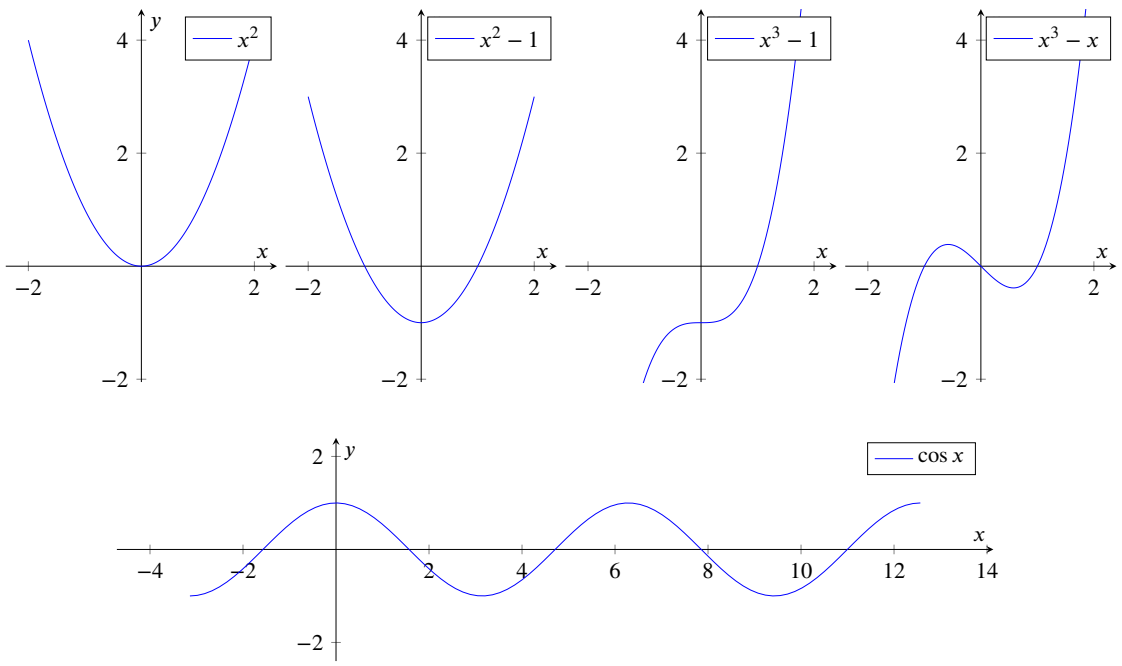


Oefening 8.3.1 (Enkele grafieken van reële functies)**.** Lees volgende eigenschappen af van de grafieken. Het is niet nodig berekeningen te maken om de exacte waarde te bekomen.

- Waar stijgt de functie?
- Waar daalt de functie?
- Waar is de functie positief?
- Waar is de functie negatief?
- Waar is de functie nul?
- Waar zijn de nulpunten van de functie?
- Waar zijn de functiewaarden gelijk aan 1?
- Waar heeft de functie een minimum?
- Waar heeft de functie een maximum?

CC BY-NC-SA 4.0

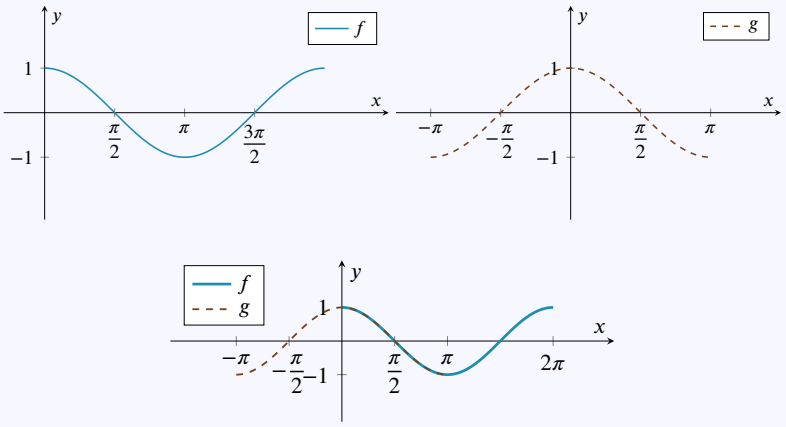
8.3 Grafieken van reële functies



Voorbeeld 8.3.4. De grafiek hangt af van het *domein* van de functie:

- De cosinusfunctie beperkt tot verschillende intervallen heeft verschillende grafieken:

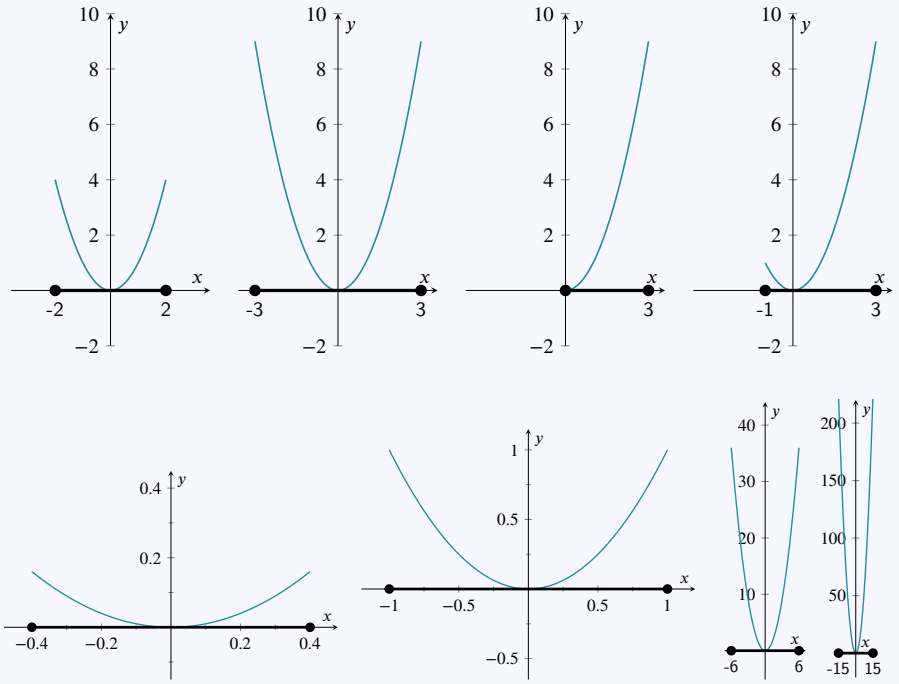
$$\begin{array}{rccccc} f: & [0,2\pi] & \to & [-1,1], & x \mapsto & \cos(x) \\ g: & [-\pi,\pi] & \to & [-1,1], & x \mapsto & \cos(x) \end{array}$$



- Soms kiezen we andere schalen op de x-as en de y-as. Samen met verschillende domeinen, leidt dat tot erg uiteenlopende grafieken voor 'dezelfde' functie. Dit zijn allemaal grafieken van functies $x \mapsto x^2$ op verschillende intervallen:

CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Grafieken van reële functies



CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Soorten functies

Er bestaan verschillende categorieën functies. We beschrijven hier enkele veelvoorkomende soorten.

Machtsfuncties

Een eerste soort functies maakt gebruik van machten.

Definitie 8.4.1.

Een **machtsfunctie** is een functie van de vorm

$$f : x \mapsto ax^r,$$

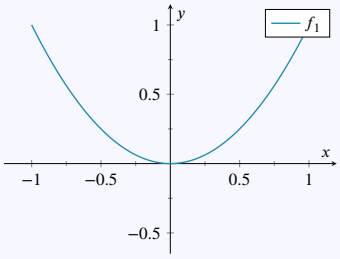
waarbij $a \in \mathbb{R}$ en $r \in \mathbb{R}$.

Het domein van een machtsfunctie hangt af van de exponent r.

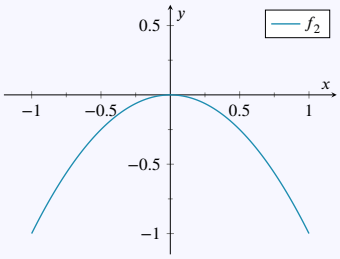
We geven enkele machtsfuncties waarvan het nuttig is om de grafiek te onthouden!

Voorbeeld 8.4.1. Belangrijke voorbeelden van machtsfuncties zijn:

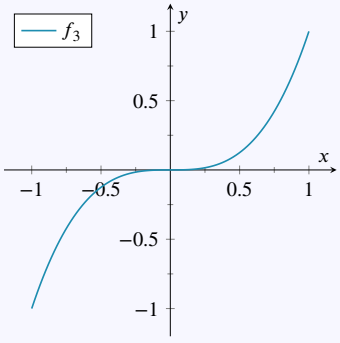
- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$



- $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x^2$

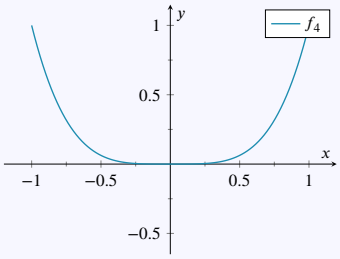


- $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$

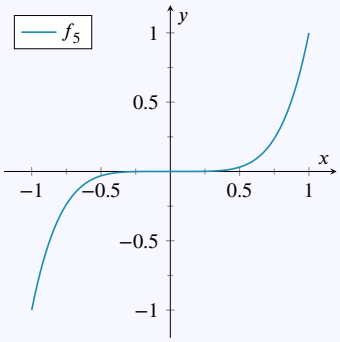


8.4 Soorten functies

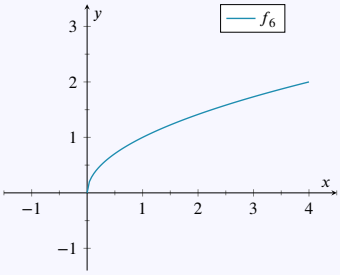
- $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4$



- $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^5$



- $f_6 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x} = x^{1/2}$



We bekijken nog twee belangrijke grafieken van machtsfuncties.

Voorbeeld 8.4.2. • $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$.

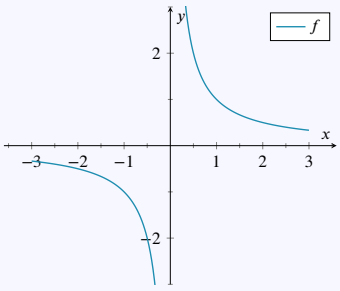
Om een idee te vormen van de grafiek van deze functie observeren we het volgende:
Wanneer we x positief nemen en steeds groter laten worden (bijvoorbeeld $1, 2, 3, \ldots$), dan zal $f(x) = \frac{1}{x}$ kleiner worden $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ en steeds dichter bij nul liggen. Ook geldt dat wanneer we x negatief nemen en steeds kleiner laten worden (bijvoorbeeld $-1, -2, -3, \ldots$), dan zal $f(x) = \frac{1}{x}$ steeds dichter bij nul liggen $(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots)$.

Wanneer we x positief nemen en steeds dichter naar nul laten gaan (bijvoorbeeld $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$), dan zal $f(x) = \frac{1}{x}$ steeds groter worden $(1, 2, 3, \ldots)$. Wanneer we x negatief nemen en steeds dichter naar nul laten gaan (bijvoorbeeld $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots$), dan zal $f(x) = \frac{1}{x}$ steeds meer

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Soorten functies

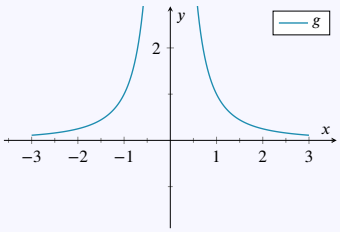
negatief worden $(-1,-2,-3,\ldots)$.



- $g : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.

  Een idee vormen van deze grafiek doen we op dezelfde manier als bij de functie f. Wanneer we x positief nemen en steeds groter laten worden (bijvoorbeeld 1,2,3,...), dan zal $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ kleiner worden $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots)$ en steeds dichter bij nul liggen. Wanneer we x negatief nemen en steeds kleiner laten worden (bijvoorbeeld $-1,-2,-3,\ldots$), dan zal $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ook kleiner worden $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots)$ en steeds dichter bij nul liggen.

  Wanneer we x positief nemen en steeds dichter naar nul laten gaan (bijvoorbeeld $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$), dan zal $g(x)$ steeds groter worden (1,4,9,...). Ook geldt dat wanneer we x negatief nemen en steeds dichter naar nul laten gaan (bijvoorbeeld $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots$), $g(x)$ steeds groter wordt (1,4,9,...).



Opmerking 8.4.1.

- Het domein van een machtsfunctie hangt af van de exponent r. Zo heeft $f : x \to x^2$ domein $\mathbb{R}$, terwijl $g : x \to \sqrt{x}$ enkel gedefinieerd is voor $x \geq 0$ en $h : x \to \dfrac{1}{x}$ enkel gedefinieerd is voor $x \neq 0$.
- Het beeld van een machtsfunctie hangt ook af van de exponent r. Zo heeft $f : x \to x^2$ beeld $\mathbb{R}^+$, terwijl $g : x \to x^3$ als beeld $\mathbb{R}$ heeft en $h : x \to \dfrac{1}{x}$ als beeld $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ heeft.

Veeltermfuncties

Een tweede soort maakt gebruik van veeltermen.

Definitie 8.4.2.

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Soorten functies

Een **veeltermfunctie** is een functie f van de vorm

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto p(x),$$

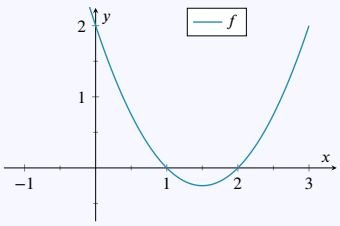
waarbij $p(x)$ een veelterm is.

Het domein van een veeltermfunctie is $\mathbb{R}$.

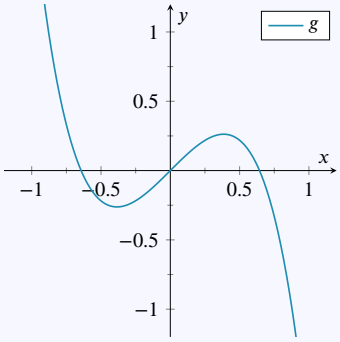
We gaan in volgend voorbeeld niet in op hoe je zelf een schets van de grafiek van een veeltermfunctie kan maken, maar voor eenvoudige voorbeelden lukt dit door de nulpunten te zoeken en het bijhorende tekenverloop op te stellen.

Voorbeeld 8.4.3. Voorbeelden van veeltermfuncties zijn:

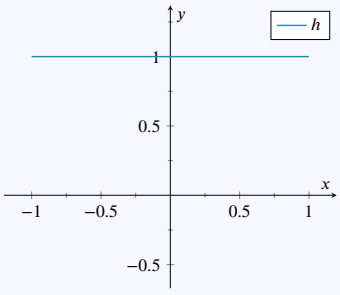
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 3x + 2$



- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x^5 - 2x^3 + x$



- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1$



Opmerking 8.4.2.

Elke machtsfunctie van de vorm $f : x \to ax^n$ met $n \in \mathbb{N}$ is een veeltermfunctie.

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Soorten functies

Rationale functies

Een ander soort functies wordt gedefinieerd aan de hand van veeltermbreuken.

Definitie 8.4.3.

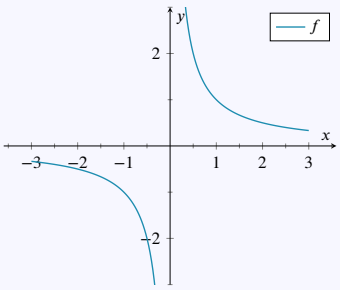
Een **rationale functie** is een functie van de vorm

$$f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)},$$

waarbij $p(x)$ en $q(x)$ veeltermen zijn en $q(x)$ niet de nulveelterm is.

Het domein van een rationale functie is $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\text{nulpunten van } q\}$.

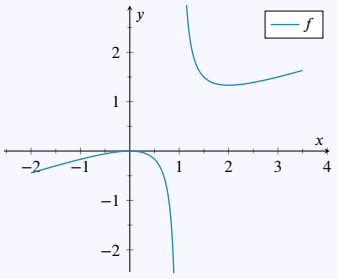
Voorbeeld 8.4.4. Een belangrijke rationale functie is $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$. Dit is tevens een machtsfunctie.



Ter illustratie geven we nog enkele voorbeelden van rationale functies.

Voorbeeld 8.4.5. Voorbeelden van rationale functies zijn:

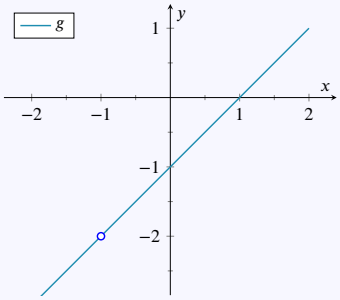
- $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2}{3(x-1)}$



- $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2-1}{x+1}$

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Soorten functies



Deze grafiek is gelijk aan de grafiek van de functie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x - 1$, behalve in het punt $x = -1$.

Opmerking 8.4.3.

Elke veeltermfunctie $f : x \mapsto p(x)$ is ook een rationale functie, want

$$p(x) = \frac{p(x)}{1}.$$

Een machtsfunctie $f : x \mapsto ax^r$ met $r \in \mathbb{Z}$ is ook een rationale functie.

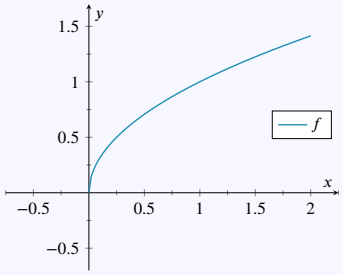
Irrationale functies

Definitie 8.4.4.

Een **irrationale functie** is een functie waarbij de onbekende x voorkomt onder een wortelteken.

Het domein van een irrationale functie hangt af van het voorschrift.

Voorbeeld 8.4.6. Een belangrijke irrationale functie is $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$. Dit is tevens een machtfunctie.



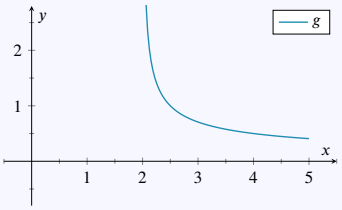
Ter illustratie geven we nog enkele voorbeelden van irrationale functies.

Voorbeeld 8.4.7. Voorbeelden van irrationale functies zijn:

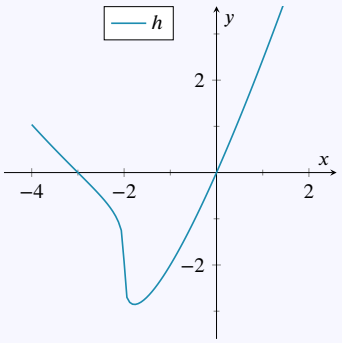
- $g :]2, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Soorten functies



- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x\sqrt[3]{x+2} + x$



Opmerking 8.4.4.

Als f een irrationale functie is, dan is het domein $\mathrm{dom}(f)$ afhankelijk van het voorschrift. Als een even wortel voorkomt, moet de uitdrukking onder het wortelteken groter dan of gelijk zijn aan nul. Net als bij rationale functies behoren nulpunten van de noemer niet tot het domein.

Stuksgewijs gedefinieerde functies

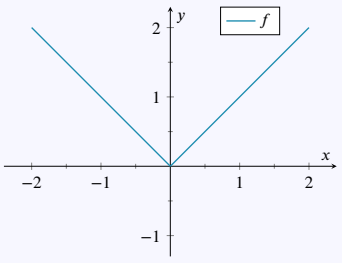
Definitie 8.4.5.

Een **stuksgewijs gedefinieerde functie** is een functie die door verschillende voorschriften wordt bepaald op verschillende deelverzamelingen van haar domein.

Voorbeeld 8.4.8. Voorbeelden van stuksgewijs gedefinieerde functies zijn:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x < 0 \end{cases}$

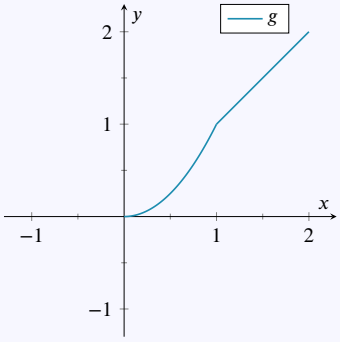
  Deze functie noemen we de absolutewaardefunctie.



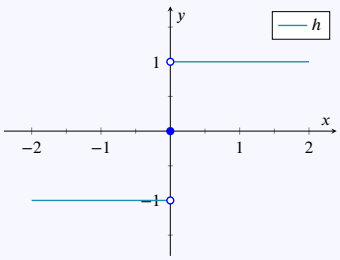
- $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{als } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{als } x \geq 1 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

8.4 Soorten functies



- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0, \\ 0 & \text{als } x = 0, \\ 1 & \text{als } x > 0. \end{cases}$



Opmerking 8.4.5.

- Het domein van een stuksgewijs gedefinieerde functie wordt bepaald door de intervallen waarop de verschillende voorschriften gedefinieerd zijn.
- Het beeld van een stuksgewijs gedefinieerde functie hangt af van de voorschriften op de verschillende deelverzamelingen van het domein. De absolutewaardefunctie $f : x \to |x|$ heeft beeld $\mathbb{R}^+$.

Andere belangrijke soorten functies zijn goniometrische, exponentiële en logaritmische functies. Deze komen later aan bod.

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.A Oefeningen domein functie

8.4.A.1 Niveau 2

Oefening 8.4.1. Geef telkens het grootst mogelijke domein voor de functie met volgend functievoorschrift:

1. $f(x) = \sqrt{x}$. Antwoord: dom f = | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}_0$ | $\mathbb{R}_0^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ |

| $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ | $\{0\}$ | $]-\infty, 1]$ | $[-1, +\infty[$ | $[-1, 1]$ |

2. $f(x) = \sqrt{1+x}$. Antwoord: dom f = | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}_0$ | $\mathbb{R}_0^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ |

| $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ | $\{0\}$ | $]-\infty, 1]$ | $[-1, +\infty[$ | $[-1, 1]$ |

3. $f(x) = \sqrt{1-x}$. Antwoord: dom f = | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}_0$ | $\mathbb{R}_0^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ |

| $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ | $\{0\}$ | $]-\infty, 1]$ | $[-1, +\infty[$ | $[-1, 1]$ |

4. $f(x) = |x|$. Antwoord: dom f = | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}_0$ | $\mathbb{R}_0^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ |

| $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ | $\{0\}$ | $]-\infty, 1]$ | $[-1, +\infty[$ | $[-1, 1]$ |

5. $f(x) = 1 - |x|$. Antwoord: dom f = | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}_0$ | $\mathbb{R}_0^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ |

| $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ | $\{0\}$ | $]-\infty, 1]$ | $[-1, +\infty[$ | $[-1, 1]$ |

6. $f(x) = \sqrt{1-|x|}$. Antwoord: dom f = | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}_0$ | $\mathbb{R}_0^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ |

| $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ | $\{0\}$ | $]-\infty, 1]$ | $[-1, +\infty[$ | $[-1, 1]$ |

7. $f(x) = \sqrt{-|x|}$. Antwoord: dom f = | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}_0$ | $\mathbb{R}_0^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ |

| $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ | $\{0\}$ | $]-\infty, 1]$ | $[-1, +\infty[$ | $[-1, 1]$ |

8. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Antwoord: dom f = | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}_0$ | $\mathbb{R}_0^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ |

| $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ | $\{0\}$ | $]-\infty, 1]$ | $[-1, +\infty[$ | $[-1, 1]$ |

9. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Antwoord: dom f = | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}_0$ | $\mathbb{R}_0^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ |

| $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ | $\{0\}$ | $]-\infty, 1]$ | $[-1, +\infty[$ | $[-1, 1]$ |

10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Antwoord: dom f = | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}_0$ | $\mathbb{R}_0^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ |

| $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ | $\{0\}$ | $]-\infty, 1]$ | $[-1, +\infty[$ | $[-1, 1]$ |

11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$. Antwoord: dom f = | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}_0$ | $\mathbb{R}_0^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ |

| $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ | $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ | $\{0\}$ | $]-\infty, 1]$ | $[-1, +\infty[$ | $[-1, 1]$ |

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.A Oefeningen domein functie

12. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Antwoord: dom f =

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	$\{0\}$	$]-\infty, 1]$	$[-1, +\infty[$	$[-1, 1]$

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$. Antwoord: dom f =

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	$\{0\}$	$]-\infty, 1]$	$[-1, +\infty[$	$[-1, 1]$

14. $f(x) = ax^n$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$. Antwoord: dom f =

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	$\{0\}$	$]-\infty, 1]$	$[-1, +\infty[$	$[-1, 1]$

15. $f(x) = ax^{-n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$. Antwoord: dom f =

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	$\{0\}$	$]-\infty, 1]$	$[-1, +\infty[$	$[-1, 1]$

16. $f(x) = -4x^4 + x^3 - 2x + 1$. Antwoord: dom f =

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$	$\{0\}$	$]-\infty, 1]$	$[-1, +\infty[$	$[-1, 1]$

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.B Oefeningen beeld functie

8.4.B.2 Niveau 2

Oefening 8.4.2. Geef telkens het *beeld* van volgende functies.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Antwoord: bld $f =$

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$[-1,8]$	$[-1,2]$	$[0,1]$	$[a,+\infty[$	$]-\infty,a]$	$]-\infty,-a]$	$\{0,1\}$

2. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Antwoord: bld $f =$

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$[-1,8]$	$[-1,2]$	$[0,1]$	$[a,+\infty[$	$]-\infty,a]$	$]-\infty,-a]$	$\{0,1\}$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Antwoord: bld $f =$

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$[-1,8]$	$[-1,2]$	$[0,1]$	$[a,+\infty[$	$]-\infty,a]$	$]-\infty,-a]$	$\{0,1\}$

4. $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Antwoord: bld $f =$

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$[-1,8]$	$[-1,2]$	$[0,1]$	$[a,+\infty[$	$]-\infty,a]$	$]-\infty,-a]$	$\{0,1\}$

5. $f : [-1,2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Antwoord: bld $f =$

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$[-1,8]$	$[-1,2]$	$[0,1]$	$[a,+\infty[$	$]-\infty,a]$	$]-\infty,-a]$	$\{0,1\}$

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$. Antwoord: bld $f =$

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$[-1,8]$	$[-1,2]$	$[0,1]$	$[a,+\infty[$	$]-\infty,a]$	$]-\infty,-a]$	$\{0,1\}$

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto cx^2 + a$ voor een $a \in \mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}_0^+$. Antwoord: bld $f =$

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$[-1,8]$	$[-1,2]$	$[0,1]$	$[a,+\infty[$	$]-\infty,a]$	$]-\infty,-a]$	$\{0,1\}$

8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -cx^2 - a$ voor een $a \in \mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}_0^+$. Antwoord: bld $f =$

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$[-1,8]$	$[-1,2]$	$[0,1]$	$[a,+\infty[$	$]-\infty,a]$	$]-\infty,-a]$	$\{0,1\}$

9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^n$ voor een $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $n \in \mathbb{N}_0$ even. Antwoord: bld $f =$

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$[-1,8]$	$[-1,2]$	$[0,1]$	$[a,+\infty[$	$]-\infty,a]$	$]-\infty,-a]$	$\{0,1\}$

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.B Oefeningen beeld functie

10. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax^n$ voor een $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $n \in \mathbb{N}_0$ oneven. Antwoord: bld $f =$

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$[-1,8]$	$[-1,2]$	$[0,1]$	$[a,+\infty[$	$]-\infty,a]$	$]-\infty,-a]$	$\{0,1\}$

11. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{als } x \leq 0 \\ x & \text{als } x > 0 \end{cases}$. Antwoord: bld $f =$

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^-$	$[-1,8]$	$[-1,2]$	$[0,1]$	$[a,+\infty[$	$]-\infty,a]$	$]-\infty,-a]$	$\{0,1\}$

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.C Oefeningen grafieken van functies

8.4.C.3 Niveau 2

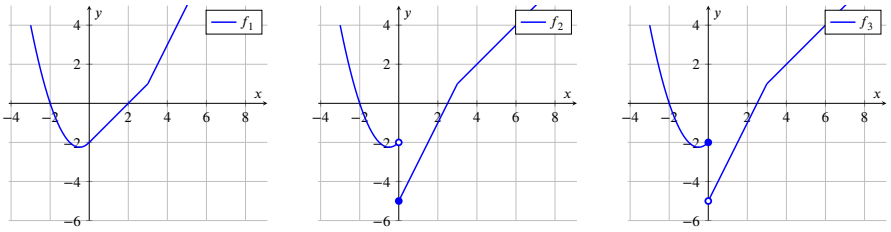
Oefening 8.4.3. Teken (zonder een grafisch rekenmachine te gebruiken) de grafiek van de functies met volgende voorschriften.

1. $f(x) = |x|$
2. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$
3. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{x-|x|}{2}$
5. $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$

Oefening 8.4.4. Schets de grafieken van volgende stuksgewijs gedefinieerde functies:

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \neq 1 \\ 0 & \text{als } x = 1 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{als } x < 0 \\ x & \text{als } x \geq 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{als } x \leq 1 \\ x-1 & \text{als } x > 1 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{als } x < 0 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} & \text{als } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{als } 2 < x \end{cases}$

Oefening 8.4.5. Welk functievoorschrift hoort bij welke grafiek ?



1. $\boxed{f_1}\boxed{f_2}\boxed{f_3} = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x \leq 0 \\ 2x-5 & \text{als } 0 < x < 3 \\ x-2 & \text{als } x \geq 3 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

8.4.C Oefeningen grafieken van functies

2. $\boxed{f_1}\boxed{f_2}\boxed{f_3} = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x<0 \\ x-2 & \text{als } 0\le x<3 \\ 2x-5 & \text{als } x\ge 3 \end{cases}$

3. $\boxed{f_1}\boxed{f_2}\boxed{f_3} = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x<0 \\ 2x-5 & \text{als } 0\le x<3 \\ x-2 & \text{als } x\ge 3 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

8.5 Functies in fysica en chemie

Functies kom je niet alleen in de wiskunde tegen, maar ook in bijvoorbeeld fysica en chemie. We geven een voorbeeld dat je zowel bij fysica als chemie tegenkomt.

Voorbeeld 8.5.1 (Massadichtheid)**.** De massadichtheid ρ is gegeven door de formule

$$\rho = \frac{m}{V}$$

waarbij m de massa is en V het volume. Dit is een gelijkheid die het verband geeft tussen 3 grootheden.

- Stel dat het volume constant gehouden wordt, dan is $\rho = \frac{m}{V}$ het functievoorschrift voor de massadichtheid in functie van de massa. Je kan hieruit besluiten dat de massadichtheid stijgt wanneer de massa stijgt (bij constant volume).
- Stel dat de massa constant gehouden wordt, dan is $\rho = \frac{m}{V}$ het functievoorschrift voor de massadichtheid in functie van het volume. Je kan hieruit besluiten dat de massadichtheid daalt wanneer het volume stijgt (bij constante massa).

We kunnen deze formule ook omvormen om de massa te berekenen in functie van de massadichtheid en het volume:

$$m = \rho V$$

Analoog kunnen we de formule omvormen om het volume te berekenen in functie van de massadichtheid en de massa:

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Oefening 8.5.1.

1. De ideale gaswet geeft een verband tussen de druk p (in hectopascale, hPa), het volume V (in m^3) en de temperatuur T (in Kelvin, K), en wordt gegeven door

$$pV = CT$$

met C een strikt positieve constante. Veronderstel dat bij een experiment het volume constant gehouden wordt op $2\,m^3$, teken de grafiek van de druk in functie van de temperatuur.

2. De formule van Langmuir geeft de bezettingsgraad θ van bindingsplaatsen in functie van de evenwichtsconstante K en de concentratie $[L]$ van het ligand en wordt gegeven door

$$\theta = \frac{K[L]}{1 + K[L]}$$

Zowel K als $[L]$ zijn strikt positief, en we veronderstellen dat $\theta \neq 1$. Druk K uit in functie van θ en $[L]$.

3. Een deeltje bevindt zich op een afstand r van een vast punt. Op het deeltje werken:

- een aantrekkende gravitatiekracht met grootte $\frac{GMm}{r^2}$,
- een afstotende veerkracht met grootte $k(r - r_0)$,

waarbij G, M, m, k en r_0 strikt positieve constanten zijn. In evenwicht is de resulterende kracht gelijk aan nul, zodat

$$\frac{GMm}{r^2} = k(r - r_0)$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.5 Functies in fysica en chemie

(a) Toon aan dat r aan een derdegraadsvergelijking voldoet.

(b) Toon aan dat er geen oplossing is met $r \leq r_0$.

CC BY-NC-SA 4.0

8.6 Som en verschil van functies

Bij 'rekenen' denken we in eerste instantie aan 'rekenen met getallen', maar je kan echter ook 'rekenen met functies'. We beschouwen hier eerst de som en het verschil van *functies*, later volgen product en quotiënt. Er bestaan ook complexe operaties die geen veralgemeningen meer zijn voor operaties op getallen, zoals functies samenstellen, inverteren, afleiden en integreren.

We bestuderen in wat volgt reële functies $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, waarbij we meestal de korte schrijfwijze $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ gebruiken voor de functie $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ met het grootst mogelijke domein.

Definitie 8.6.1 (Som, verschil en tegengestelde van reële functies)**.**

Voor reële functies f en g geldt:

$$\begin{aligned} f+g &: x \mapsto (f+g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)+g(x) \\ f-g &: x \mapsto (f-g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)-g(x) \\ -f &: x \mapsto (-f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} -f(x) \end{aligned}$$

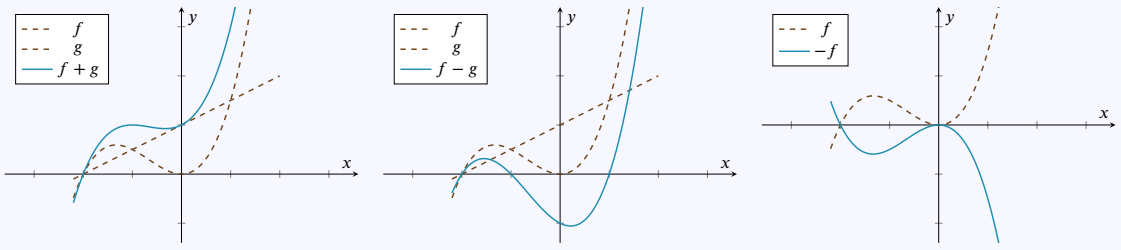
De som en het verschil van twee functies zijn enkel gedefinieerd waar *beide functies* gedefinieerd zijn.

De	**som**	$f+g$	beeldt x af op de	som	$f(x)+g(x)$.
Het	**verschil**	$f-g$	beeldt x af op het	verschil	$f(x)-g(x)$.
De	**tegengestelde**	$-f$	beeldt x af op het	tegengestelde	$-f(x)$.

Voorbeeld 8.6.1.

Voor de functies $f : x \mapsto x^3+2x^2$ en $g : x \mapsto x+2$ is

- de som $f+g$ gelijk aan de functie $f+g : x \mapsto x^3+2x^2+x+2$
- het verschil $f-g$ gelijk aan de functie $f-g : x \mapsto x^3+2x^2-x-2$
- de tegengestelde $-f$ gelijk aan de functie $-f : x \mapsto -x^3-2x^2$



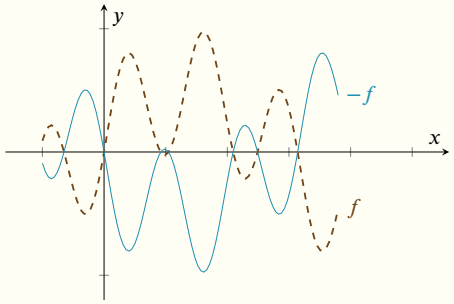
Opmerking 8.6.1.

(a) De functies $f+g$ en $f-g$ zijn enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd is. Dit betekent dat het domein van de som (en van het verschil) gelijk is aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g.

(b) De grafiek van $-f$ is de spiegeling van de grafiek van f over de x-as.

CC BY-NC-SA 4.0

8.6 Som en verschil van functies



(c) De *nulpunten* van $f - g$ zijn precies de snijpunten van de grafieken van f en g.

Voorbeeld 8.6.2 (Som van veeltermfuncties)**.**

Als f een veeltermfunctie is van graad n, en g een veeltermfunctie is van graad m, dan is $f+g$ opnieuw een veeltermfunctie. In het algemeen geldt dat de graad van $f+g$ gelijk is aan het maximum van de getallen m en n, tenzij $m = n$ en de leidende coëfficiënten van f en g tegengesteld zijn. In dat geval is de graad van $f+g$ strikt kleiner dan n.

We noteren het maximum van m en n met $\max(m, n)$.

- Beschouw de volgende veeltermfuncties:

$$f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 1 \text{ van graad } 3$$

$$g : x \mapsto 2x^4 - x^3 + x - 3 \text{ van graad } 4$$

De som is gelijk aan de veeltermfunctie

$$f + g : x \mapsto 2x^4 - 2x^2 + x - 2$$

De graad van $f+g$ is inderdaad gelijk aan $\max(3, 4)$.

- Beschouw de volgende veeltermfuncties, beide van graad 4:

$$f : x \mapsto x^4 + x^2 - 1$$

$$g : x \mapsto -x^4 + 2x^2 + x - 1$$

De som is gelijk aan de veeltermfunctie

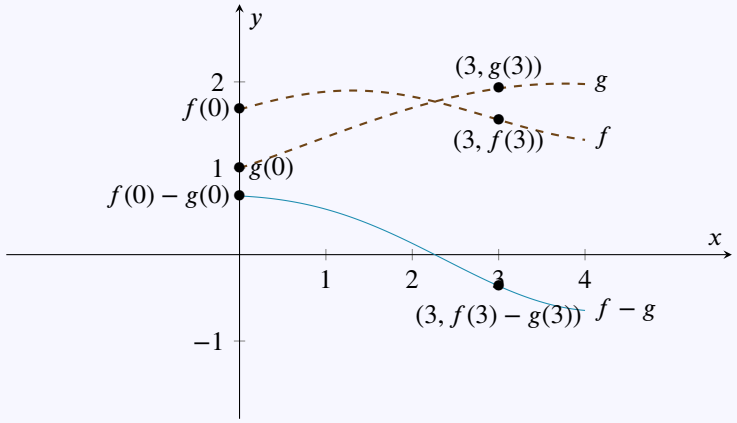
$$f + g : x \mapsto 3x^2 + x - 2$$

De graad van f en g is beide gelijk aan 4, maar de leidende coëfficiënten zijn tegengesteld, dus de graad van $f+g$ is strikt kleiner dan 4. In dit voorbeeld is de graad van $f+g$ gelijk aan 2.

Voorbeeld 8.6.3 (Grafiek van een verschil)**.** De volgende figuur toont de grafiek van twee functies f en g en hun verschil. Voor elke waarde van x vinden we de functiewaarden $f(x)$ en $g(x)$ terug op de grafieken van f en g en het verschil van deze functiewaarden $f(x) - g(x)$ op de grafiek van $f - g$.

CC BY-NC-SA 4.0

8.6 Som en verschil van functies



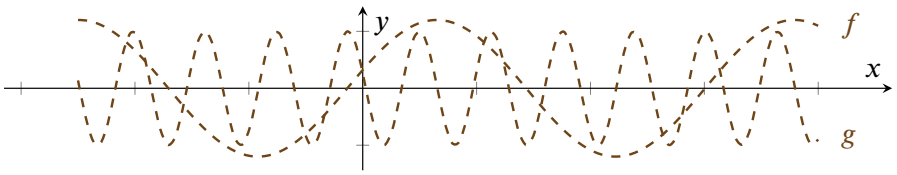
Merk op dat de grafieken van f en g elkaar snijden boven de punten waar de grafiek van $f - g$ de x-as snijdt: in die punten is inderdaad $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

8.6.A Oefeningen som van functies

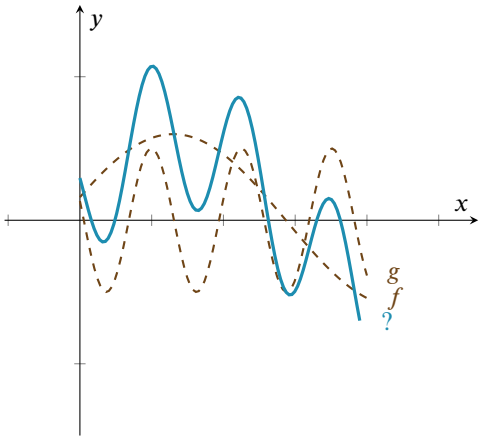
8.6.A.1 Niveau 1

Oefening 8.6.1. De volgende figuur toont de grafiek van twee functies f en g. Bepaal op elk van onderstaande figuren welke grafiek wordt getoond.



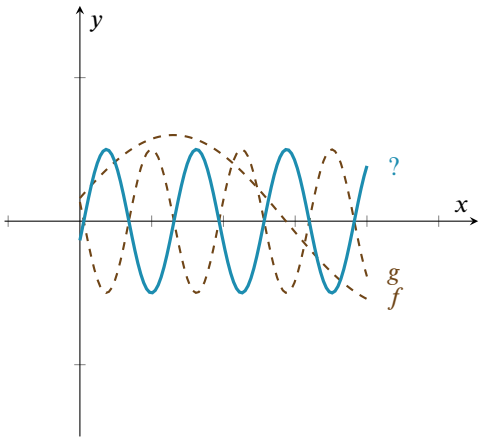
1.

$f+g$	$f-g$	$g-f$	$-g$	$f+2$



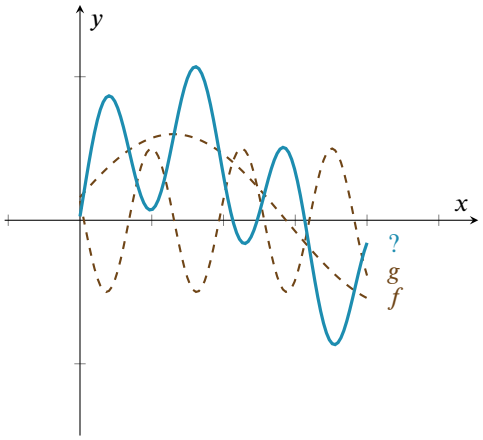
2.

$f+g$	$f-g$	$g-f$	$-g$	$f+2$



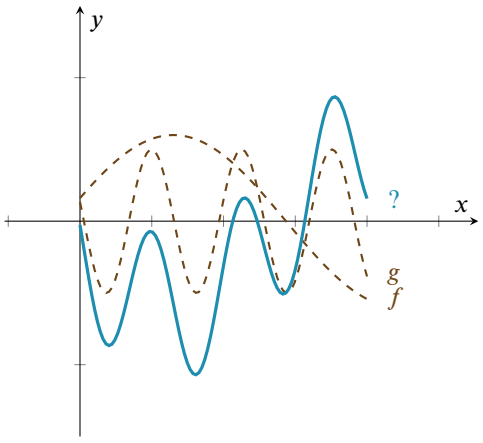
3.

$f+g$	$f-g$	$g-f$	$-g$	$f+2$



4.

$f+g$	$f-g$	$g-f$	$-g$	$f+2$



CC BY-NC-SA 4.0

8.7 Product en quotiënt van functies

Definitie 8.7.1 (Product, quotiënt en omgekeerde van reële functies)**.**

Voor reële functies f en g geldt:

$$\begin{array}{rcccc} f\cdot g & : & x\mapsto & (f\cdot g)(x) & \overset{\text{def}}{=} & f(x)\cdot g(x) \\ \frac{f}{g} & : & x\mapsto & \left(\frac{f}{g}\right)(x) & \overset{\text{def}}{=} & \frac{f(x)}{g(x)} \\ \frac{1}{f} & : & x\mapsto & \frac{1}{f}(x) & \overset{\text{def}}{=} & \frac{1}{f(x)}. \end{array}$$

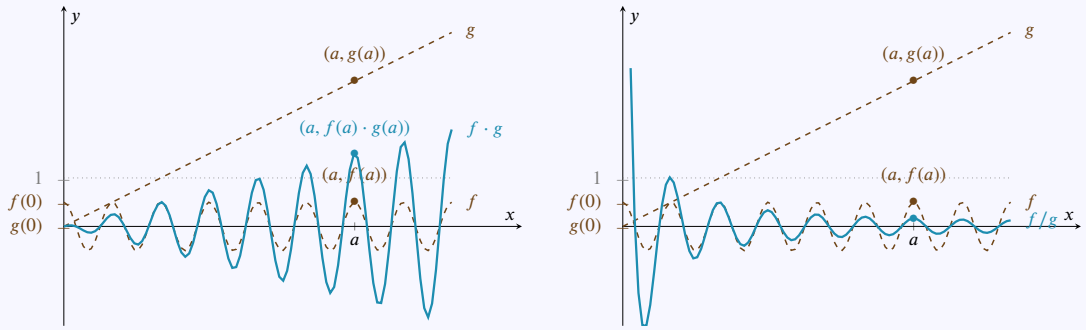
Merk op dat $\frac{f}{g}$ en $\frac{1}{f}$ niet gedefinieerd zijn in de punten waar de noemer nul wordt.

Het **product** $f\cdot g$ beeldt x af op het product $f(x)\cdot g(x)$.

Het **quotiënt** $\frac{f}{g}$ beeldt x af op het quotiënt $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Het **omgekeerde** $\frac{1}{f}$ beeldt x af op het omgekeerde $\frac{1}{f(x)}$.

Voorbeeld 8.7.1. De grafiek van twee functies f en g en hun product $f\cdot g$ en quotiënt $\frac{f}{g}$:



Opmerking 8.7.1.

(a) Net als bij de functies $f+g$ en $f-g$ is de functie $f\cdot g$ enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd is. Het domein is dus gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g.

(b) Het quotiënt $\frac{f}{g}$ is enkel gedefinieerd voor x-waarden waarvoor zowel f als g gedefinieerd zijn en $g(x)\neq 0$. Het domein van het quotiënt is dus gelijk aan de doorsnede van het domein van f en het domein van g zonder de x-waarden waarbij $g(x)=0$.

(c) Op haar domein wordt de functie $f\cdot g$ nul in de nulpunten van f *en* in de nulpunten van g. Inderdaad, $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$ en dit product is enkel nul als $f(x)=0$ of $g(x)=0$.

(d) De nulpunten van de functie $\frac{f}{g}$ zijn iets lastiger. Voor een nulpunt van f waar de functie g niet nul is, is er geen probleem: dat nulpunt van f is ook een nulpunt van $\frac{f}{g}$. Neem bijvoorbeeld

CC BY-NC-SA 4.0

8.7 Product en quotiënt van functies

$f : x \mapsto x-1$ en $g : x \mapsto 2x$, dan hebben zowel f als $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x-1}{2x}$ een nulpunt in $x = 1$.

Maar voor $f : x \mapsto x-1$ en $g : x \mapsto (x-1)^2$ is $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{1}{x-1}$, en deze functie is niet gedefinieerd in $x = 1$, en $x = 1$ is dus zeker geen nulpunt.

Ook de functies $f : x \mapsto x^2 - 1$ en $g : x \mapsto x - 1$ zijn beiden nul in het punt $x = 1$, maar hun quotiënt $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$ heeft waarde 2 voor $x = 1$, en $x = 1$ is dus *geen nulpunt* van $\frac{f}{g}$.

Waarschuwing 8.7.1 (Veelgemaakte fout)**.**

We gebruiken NIET de notatie f^{-1} voor de omgekeerde functie, want die notatie is voorbehouden voor de *inverse* functie die we verder zullen bespreken. De *omgekeerde* functie en de *inverse* functie zijn twee *verschillende* begrippen!

Voorbeeld 8.7.2 (Product van veeltermfuncties)**.**

Als f een veeltermfunctie is van graad n, en g een veeltermfunctie is van graad m met $f \neq 0$ en $g \neq 0$, dan is het product $f \cdot g$ een veeltermfunctie van graad $m+n$.

Beschouw bijvoorbeeld de volgende veeltermfuncties:

$$f : x \mapsto x^3 - 1 \text{ van graad } 3$$

$$g : x \mapsto x^2 + 2x \text{ van graad } 2$$

Het product is gelijk aan de veeltermfunctie

$$f \cdot g : x \mapsto x^5 + 2x^4 - x^2 - 2x$$

De graad van $f \cdot g$ is inderdaad gelijk aan $5 = 2 + 3$.

CC BY-NC-SA 4.0

8.8 Samenstellen van functies

Bewerkingen zoals $a+b$, $a-b$ en $a\cdot b$ met twee reële getallen a en b kan je makkelijk uitbreiden tot bewerkingen met reële functies f en g, en dat levert dan de *functies* $f+g$, $f-g$ en $f\cdot g$ op. Je kan deze operaties voor functies dus beschouwen als veralgemeningen van die voor getallen. Er is echter ook een fundamenteel andere manier om een nieuwe functie te maken van twee bestaande functies, die geen analoog heeft voor reële getallen. Je kan sommige functies namelijk *samenstellen*, dat betekent ze *na elkaar* toepassen: *eerst* neem je $g(x)$, en dan pas je f toe *op het resultaat* $g(x)$ van g. Dat geeft als eindresultaat $f(g(x))$.

Definitie 8.8.1 (Samenstelling van twee functies)**.**

De **samengestelde functie** van twee reële functies f en g, genoteerd met $f\circ g$ en gelezen als 'f *na* g' (of soms ook 'f van g'), is per definitie de functie die *eerst* g toepast, en dan f, dus

$$f\circ g : x \mapsto (f\circ g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(g(x)).$$

De samengestelde functie $f\circ g$ is enkel gedefinieerd waar de uitdrukking $f(g(x))$ betekenis heeft. Dat is voor die x waarvoor $g(x)$ bestaat en bovendien ook $f(g(x))$ bestaat.

Voorbeeld 8.8.1.

Beschouw de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto x+2$. Dan is

1. $f(g(3)) = 25$
2. $g(f(3)) = 11$
3. $f(f(3)) = 81$
4. $g(g(3)) = 7$
5. $g(g(g(3))) = 9$
6. $f(g(3)-5) = 0$
7. $f(g(3))-5 = 20$
8. $f(g(3)+g(2)) = 81$
9. $f(g(3+2)) = 49$

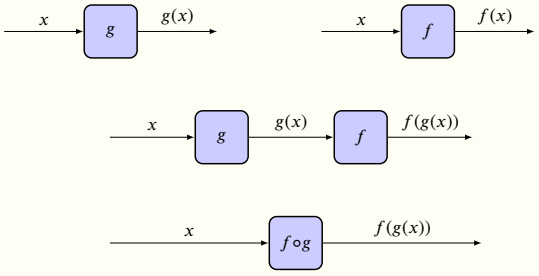
Oefening 8.8.1.

Beschouw de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto x+2$. Dan is

1. $f\circ g : x \mapsto$ x^2+2 | $(x+2)^2$ | x^2+2^2 | $2x^2$
2. $g\circ f : x \mapsto$ x^2+2 | $(x+2)^2$ | x^2+2^2 | $2x^2$
3. $g\circ g : x \mapsto$ x^2+2 | $2(x+2)$ | $x+4$ | 4
4. $f\circ f : x \mapsto$ x^2 | x^4 | $4x$ | $2x^2$

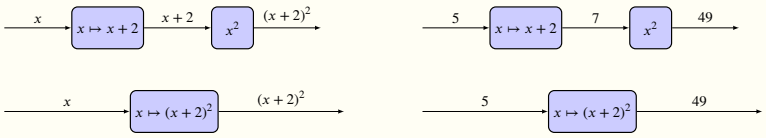
Opmerking 8.8.1.

- In de machine-voorstelling van functies is *samenstellen* de machines *achter elkaar plaatsen*:



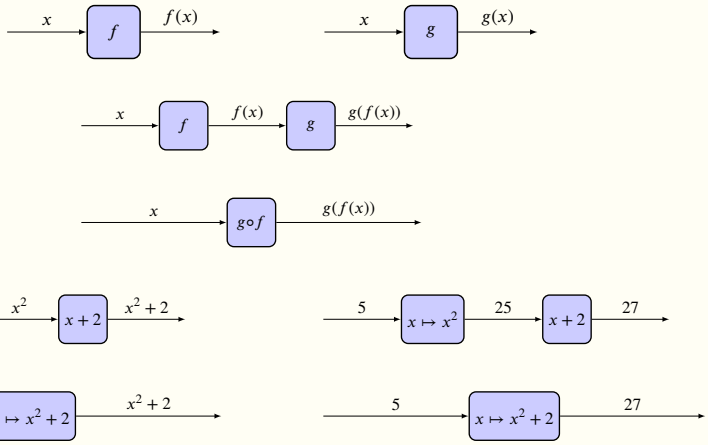
CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/23H.2)

8.8 Samenstellen van functies



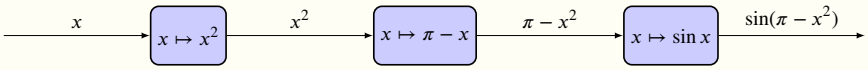
Let op de volgorde van de functies in de samenstelling. Om $(f \circ g)(x)$ (f *na* g van x) te vinden, moeten we *eerst* g toepassen op x en *daarna* f toepassen op het resultaat $g(x)$. Maar in de machinevoorstelling betekent dit dat de functie g links staat en f rechts: g is immers de functie die we eerst gebruiken en daarna de functie f.

- We kunnen ook $g \circ f$ bekijken, dus de functie $g \circ f : x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.



Uit het voorbeeld blijkt al dat $f \circ g$ en $g \circ f$ verschillende functies zijn. De uitdrukking 'de samenstelling van f en g' kan dus dubbelzinnig zijn: wordt $f \circ g$ bedoeld, of $g \circ f$?

- De samengestelde functie $f \circ g$ is enkel gedefinieerd in x als x tot het domein van g behoort en $g(x)$ tot het domein van f. In de andere volgorde is de samengestelde functie $g \circ f$ enkel gedefinieerd in x als x tot het domein van f behoort en $f(x)$ tot het domein van g.
- Samengestelde functies komen erg veel voor, want heel veel functies kunnen worden gelezen als een samenstelling van eenvoudigere functies. Zo is de functie $x \mapsto \sin(\pi - x^2)$ de samengestelde functie van eerst $x \mapsto x^2$ gevolgd door $x \mapsto \pi - x$ en ten slotte $x \mapsto \sin(x)$.



Voorbeeld 8.8.2 (Samenstellen van veeltermfuncties)**.**

Als f een veeltermfunctie is van graad n, en g een veeltermfunctie is van graad m, dan is $f \circ g$ een veeltermfunctie van graad $m \cdot n$.

Beschouw bijvoorbeeld de volgende veeltermfuncties:

$$f : x \mapsto x^2 - 1 \text{ van graad } 2$$

$$g : x \mapsto 2x^2 \text{ van graad } 2$$

De samengestelde functies zijn

$$f \circ g : x \mapsto 4x^4 - 1$$

$$g \circ f : x \mapsto 2x^4 - 4x^2 + 2$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.8 Samenstellen van functies

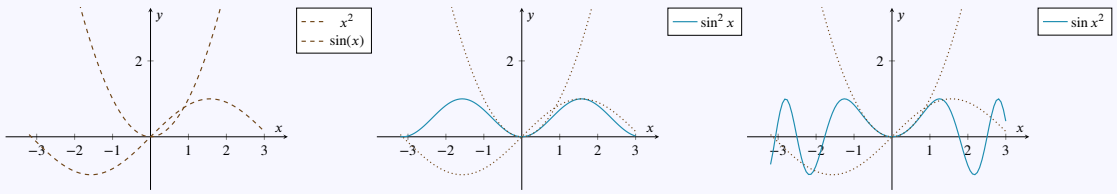
Dit zijn inderdaad veeltermfuncties van graad $4 = 2 \cdot 2$.

Voorbeeld 8.8.3. Bepaal de samenstellingen van volgende reële functies

f	g	$f \circ g$	$g \circ f$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x-3$	$x \mapsto (x-3)^2$	$x \mapsto x^2-3$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^4$	$x \mapsto x^4$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2$	$x \mapsto 4$	$x \mapsto 2$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto -x$	$x \mapsto x^2$	$x \mapsto -x^2$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto 2x$	$x \mapsto \sin(2x)$	$x \mapsto 2\sin(x)$

In het algemeen kan het verband tussen f en g enerzijds, en $f \circ g$ anderzijds erg complex zijn. Enkel in eenvoudige gevallen kan je het verband gemakkelijk zien.

Voorbeeld 8.8.4 (Voorbeeld grafiek)**.** Er is niet onmiddellijk een duidelijk verband tussen de grafieken van de functies $f : x \mapsto x^2$ en $g : x \mapsto \sin x$ en die van hun samengestelde functies $f \circ g$ en $g \circ f$, zoals onderstaande grafieken aantonen. Let op: voor de goniometrische functies noteren we vaak $(\sin x)^2$ als $\sin^2 x$:



Oefening 8.8.2. Zij f en g twee functies die samenstelbaar zijn. Zijn volgende beweringen waar of fout?

1. Elk nulpunt van f is ook een nulpunt van $g \circ f$ | Waar | Niet waar |.

2. Elk nulpunt van $g \circ f$ is ook een nulpunt van f | Waar | Niet waar |

3. De grafiek van $g \circ f$ ligt altijd boven de grafiek van f | Waar | Niet waar |

8.8.1 Domein van samengestelde functies

Stel dat twee functies $g : A \to B$ en $f : C \to D$ gegeven zijn, met A, B, C, D deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Onder welke voorwaarden kunnen we dan f en g samenstellen, en wat is het domein en codomein van $f \circ g$?

Om het beeld $f(g(x))$ van een getal x onder $f \circ g$ te bepalen, moeten we eerst $g(x)$ bepalen, en dus moet zeker $x \in A$. Vervolgens moet f worden toegepast op $g(x)$, en dat kan alleen als $g(x) \in C$. Het domein van $f \circ g$ is dus de deelverzameling van A die wordt afgebeeld in C:

$$f \circ g : \{x \in A \mid g(x) \in C\} \to D : x \mapsto f(g(x))$$

Als $B \subseteq C$ (en dus in het bijzonder als $B = C$) is de voorwaarde $g(x) \in C$ automatisch voldaan, en geldt de eenvoudigere formule

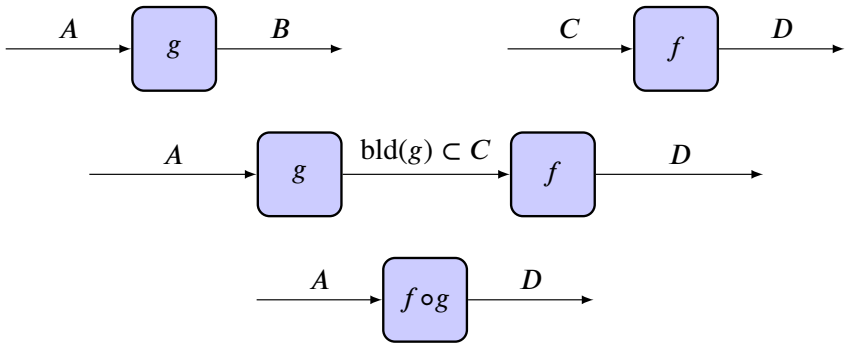
CC BY-NC-SA 4.0

8.8 Samenstellen van functies

$$f \circ g : A \to D : x \mapsto f(g(x))$$

In het algemeen is het domein van $f \circ g$ (als deze samenstelling bestaat) dus een *deelverzameling* van A, het codomein is *gelijk* aan D en het beeld is een *deelverzameling* van D.

In de machinevoorstelling ziet de samenstelling er **in het geval** $\text{bld}(g) \subset C$ als volgt uit:



Een voorbeeld van twee functies waarvoor de samenstelling niet bestaat omdat ze nergens gedefinieerd is:

Voorbeeld 8.8.5. Beschouw

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$$

en

$$g : \mathbb{R}^+ \to]-\infty, -1] : x \mapsto -x - 1.$$

Je kan zelf nagaan dat in dit voorbeeld de codomeinen van f en g ook de beelden van f en g zijn. De functie $f \circ g$ is nergens gedefinieerd: voor elke $x \in \mathbb{R}^+$ geldt dat $g(x) \in]-\infty, -1]$, zodat $g(x)$ niet tot het domein van de functie f behoort. Dus kunnen we op geen enkele $g(x)$ uit het beeld van g de functie f toepassen. Inderdaad: voor elke x in het domein van g is $g(x)$ een strikt negatief getal, en hiervan kunnen we onmogelijk de vierkantswortel nemen.

Een voorbeeld van twee functies waarvoor de samenstelling wel bestaat maar niet overal gedefinieerd is:

Voorbeeld 8.8.6. Beschouw

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$$

en

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x.$$

Dan is $f \circ g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{-x}$. De samenstelling is niet voor alle x in het domein van de functie g gedefinieerd: voor strikt positieve x is immers $-x$ strikt kleiner dan nul en van dit getal kunnen we geen vierkantswortel nemen. Voor $x \in \mathbb{R}^-$, een deelverzameling van het domein van g, is de samenstelling wel goed gedefinieerd. Ga zelf na dat de beelden van f en g telkens hun codomein zijn, en dat het beeld van de samenstelling $f \circ g$ hier gelijk is aan het beeld van f, namelijk $\mathbb{R}^+$.

CC BY-NC-SA 4.0

8.8.A Oefeningen samenstellen van functies

8.8.A.1 Niveau 2

Oefening 8.8.3. Bepaal de samenstellingen van volgende reële functies.

1. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto 7$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
2. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto 7$, dan is $g \circ f : x \mapsto \ldots\ldots$
3. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
4. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $g \circ f : x \mapsto \ldots\ldots$
5. Als $f : x \mapsto \cos(x)$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
6. Als $f : x \mapsto \cos(x)$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $g \circ f : x \mapsto \ldots\ldots$

Oefening 8.8.4.

1. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x + 2$, dan is $h \circ (f \circ g) : x \mapsto \ldots\ldots$
2. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x + 2$, dan is $(h \circ f) \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
3. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x + 2$, dan is $(f \circ g) \circ h : x \mapsto \ldots\ldots$
4. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x + 2$, dan is $f \circ (g \circ h) : x \mapsto \ldots\ldots$

Oefening 8.8.5.

1. Als $f : x \mapsto \sin(x + 2)$ en $g : x \mapsto x + 1$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
2. Als $g : x \mapsto \sin(x + 2)$ en $f : x \mapsto x + 1$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
3. Als $f : x \mapsto x + e^x$ en $g : x \mapsto 2x + 1$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
4. Als $f : x \mapsto x + e^x$ en $g : x \mapsto 2x + 1$, dan is $g \circ f : x \mapsto \ldots\ldots$
5. Als $f : x \mapsto x^2 + x$ en $g : x \mapsto e^x + \cos(x^2)$, dan is $f \circ g : x \mapsto \ldots\ldots$
6. Als $f : x \mapsto x^2 + x$ en $g : x \mapsto e^x + \cos(x^2)$, dan is $g \circ f : x \mapsto \ldots\ldots$

Oefening 8.8.6 (Samenstellingen van functies herkennen)**.**
Schrijf volgende uitdrukkingen als samenstellingen van twee functies:

1. $\sin x^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}$ $\boxed{\cos x}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{2x}$ $\boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}$ $\boxed{\cos x}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{2x}$ $\boxed{x+2}$
2. $\sin^2 x = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}$ $\boxed{\cos x}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{2x}$ $\boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}$ $\boxed{\cos x}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{2x}$ $\boxed{x+2}$
3. $(x+2)^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}$ $\boxed{\cos x}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{2x}$ $\boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}$ $\boxed{\cos x}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{2x}$ $\boxed{x+2}$
4. $x^2 + 2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}$ $\boxed{\cos x}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{2x}$ $\boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}$ $\boxed{\cos x}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{2x}$ $\boxed{x+2}$
5. $x^4 = f(g(x))$ met $f(x) =$ $\boxed{\sin x}$ $\boxed{\cos x}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{2x}$ $\boxed{x+2}$ en $g(x) =$ $\boxed{\sin x}$ $\boxed{\cos x}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{2x}$ $\boxed{x+2}$

CC BY-NC-SA 4.0

8.8.A Oefeningen samenstellen van functies

6. $2x^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ | $\sin x$ | $\cos x$ | x^2 | $2x$ | $x+2$ | en $g(x) =$ | $\sin x$ | $\cos x$ | x^2 | $2x$ | $x+2$ |

7. $4x^2 = f(g(x))$ met $f(x) =$ | $\sin x$ | $\cos x$ | x^2 | $2x$ | $x+2$ | en $g(x) =$ | $\sin x$ | $\cos x$ | x^2 | $2x$ | $x+2$ |

Merk op: volgende functies zijn niet als echte samenstellingen te schrijven (want het zijn telkens sommen of producten):

(a) $\sin x \cos x$
(b) $x^2 \sin x$
(c) $\sin x + \cos x$
(d) $\cos^2 x + \sin^2 x$

8.8.A.2 Niveau 3

Oefening 8.8.7. Bepaal, indien mogelijk, de samengestelde functies $g \circ f$ en $f \circ g$, samen met hun domein. Als codomein nemen we telkens $\mathbb{R}$.

1. Voor de functies $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x-1}$ en $g : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$
is $f \circ g$: ... ...
en $g \circ f$: ... .

2. Voor de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x + 3$
is $f \circ g$: ... ...
en $g \circ f$: ... .

3. Voor de functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 3x$ en $g : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{-x}$
is $f \circ g$: ... ...
en $g \circ f$: ... .

Oefening 8.8.8. Gegeven zijn de functies $f : [0, 1] : x \mapsto x^2$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x$.

1. $\operatorname{dom} f \circ g =$ ... .

2. $\operatorname{dom} g \circ f =$ ... .

Oefening 8.8.9. Gegeven zijn de volgende twee functievoorschriften voor f en g:

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto \sqrt{-x}$$

1. $\operatorname{dom} f =$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R}_0$ | en $\operatorname{dom} g =$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R}_0$ |.
$\operatorname{bld} f =$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R}_0$ | en $\operatorname{bld} g =$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R}_0$ |.

2. Waar of niet waar: de functie $f \circ g$ bestaat: | Juist | Fout | . Zo ja, bepaal ook het domein, beeld en functievoorschrift van deze functie.

3. Waar of niet waar: de functie $g \circ f$ bestaat: | Juist | Fout | . Zo ja, bepaal ook het domein, beeld en functievoorschrift van deze functie.

CC BY-NC-SA 4.0

8.8.A Oefeningen samenstellen van functies

Oefening 8.8.10. Gegeven zijn de volgende twee functievoorschriften voor f en g:

$$f : x \mapsto \sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}$$
$$g : x \mapsto \sqrt{x}$$

1. $\operatorname{dom} f =$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R}_0$ | $[0,1]$ | $]0,1]$ | $[2,+\infty[$ | $]2,+\infty[$ |.

2. $\operatorname{dom} g =$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}^-$ | $\mathbb{R}_0$ | $[0,1]$ | $]0,1]$ | $[2,+\infty[$ | $]2,+\infty[$ |.

3. Waar of niet waar: de functie $f \circ g$ bestaat: | Juist | Fout | . Zo ja, bepaal ook het domein en functievoorschrift van deze functie.

4. Waar of niet waar: de functie $g \circ f$ bestaat: | Juist | Fout | . Zo ja, bepaal ook het domein en functievoorschrift van deze functie.

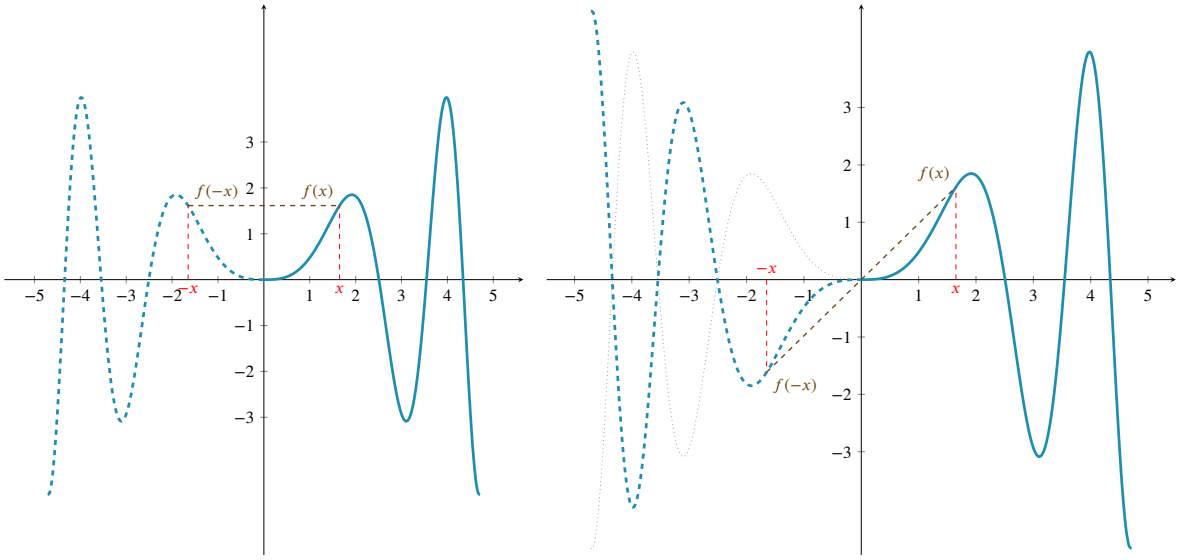
CC BY-NC-SA 4.0

8.9 Even en oneven functies

Definitie 8.9.1 (Even en oneven functies).

Een reële functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is **even** als voor elke getal $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(x) = f(-x)$

Een reële functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is **oneven** als voor elke getal $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f(x) = -f(-x)$



Opmerking 8.9.1.

- De grafiek van een even functie f wordt bij spiegeling over de y-as op zichzelf afgebeeld.
- De grafiek van een oneven functie f wordt bij spiegeling over de y-as en daarna over de x-as op zichzelf afgebeeld. Eerst spiegelen over de y-as en daarna over de x-as komt neer op spiegelen tegenover de oorsprong.
- Een functie hoeft niet even of oneven te zijn.

Oefening 8.9.1. Welke van de volgende functies zijn even/oneven of geen van beide?

1.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto x^2$
2.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto x^3$
3.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto x$
4.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto x + 1$
5.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto x^2 + 1$
6.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto x^2 + x$
7.	Even	Oneven	Geen van beiden	$x \mapsto x^3 + 7$

CC BY-NC-SA 4.0

8.9 Even en oneven functies

8. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto x^3 - x$

9. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ als f, g even zijn

10. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ als f, g oneven zijn

11. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ als f even en g oneven is

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 9
Ongelijkheden

(Versie 2026/11/23H.2)

9.1 Ongelijkheden in 1 onbekende

Een belangrijke eigenschap van reële getallen is dat we ze kunnen ordenen: voor twee getallen $x, y \in \mathbb{R}$ geldt altijd $x \leq y$ of $y \leq x$. We kunnen dus niet alleen vergelijkingen bestuderen en oplossen, maar ook zogenaamde on*gelijk*heden. Daarbij zoeken we niet naar de waarden van een onbekende die een *gelijkheid* oplost, maar naar de waarden van een onbekende die een *ongelijkheid* oplost.

Er zijn 4 mogelijke ongelijkheidstekens: $<, \leq, >$ en $\geq$.

Definitie 9.1.1.

- Een **ongelijkheid** is een uitdrukking die precies één ongelijkheidsteken ($<, \leq, >$ of $\geq$) bevat.
- Een **ongelijkheid in één onbekende** is een ongelijkheid waarin één onbekende voorkomt.
- Een **oplossing** van een ongelijkheid in een onbekende is een waarde van de onbekende waarvoor de ongelijkheid waar is. De **oplossingsverzameling** van een ongelijkheid in een onbekende is de verzameling van *alle* oplossingen.
- We noemen twee ongelijkheden in een onbekende **equivalent** als ze dezelfde oplossingsverzameling hebben.

Voorbeeld 9.1.1 (Voorbeelden van ongelijkheden in onbekende x)**.**

- $x^2 > 2x - 1$
- $\sin(x) \geq 0.5$

Opmerking 9.1.1.

- Ongelijkheden kunnen aan elkaar worden gekoppeld:

$$a < b < c \iff a < b \text{ en } b < c.$$

  Merk op dat uit beide uitdrukkingen telkens ook volgt dat $a < c$.
- Uitdrukkingen van de vorm $a < b > c$ worden *nooit* gebruikt: je schrijft bv. $a < b$ en $c < b$, of korter $a, c < b$

Bij het oplossen van een ongelijkheid mag men enkel bewerkingen uitvoeren die de ongelijkheid vervangt door een equivalente ongelijkheid. Ongelijkheden oplossen is in het algemeen *moeilijker* dan het oplossen van vergelijkingen, onder meer omwille van de extra complicatie dat twee leden van een ongelijkheid vermenigvuldigen met een *negatief* getal de ongelijkheid *omdraait*. Een ongelijkheid vervangen door een (eenvoudigere) equivalente ongelijkheid kan met volgende eigenschappen van ongelijkheden.

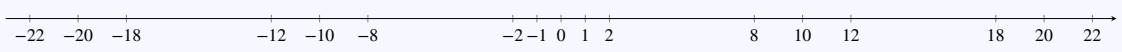
Eigenschap 9.1.1. Voor elke $a, b, r \in \mathbb{R}$ geldt

	$a < b$	$\iff$	$a + r < b + r$		(plus getal)
Geval $0 < r$:	$a < b$	$\iff$	$r \cdot a < r \cdot b$		(maal positief getal)
Geval $r < 0$:	$a < b$	$\iff$	$r \cdot a > r \cdot b$	(of $r \cdot b < r \cdot a$)	(maal negatief getal)

Voorbeeld 9.1.2. We hebben $10 < 20$, en dus ook $10 + 2 < 20 + 2$, $10 - 2 < 20 - 2$ en $2 \cdot 10 < 2 \cdot 20$, maar $(-2) \cdot 10 > (-2) \cdot 20$. Ook is $1 < 2$, maar $-1 > -2$. Deze ongelijkheden zie je ook op de getallenrechte:

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Ongelijkheden in 1 onbekende



Opmerking 9.1.2.

- De eerste eigenschap zegt dat je bij beide leden van een ongelijkheid eenzelfde getal mag optellen
$$a < b \Rightarrow\ a + r < b + r$$
of aftrekken
$$a + r < b + r \Rightarrow\ a < b.$$
Als we bij de ongelijkheid $x < y$ van beide leden y aftrekken krijgen we $x - y < 0$, wat neerkomt op de term y naar het andere lid brengen.
$$x < y \iff\ x - y < 0$$

- De tweede eigenschap zegt dat je beide leden van een ongelijkheid mag vermenigvuldigen
$$a < b \Rightarrow\ r \cdot a < r \cdot b$$
of delen
$$r \cdot a < r \cdot b \Rightarrow\ a < b$$
met eenzelfde strikt positief getal r. De ongelijkheid blijft hierbij behouden.
Als we bij de ongelijkheid $x < y$, met $y > 0$, beide leden delen door y krijgen we $\frac{x}{y} < 1$, wat neerkomt op de factor y naar het andere lid brengen.
$$x < y \iff\ \frac{x}{y} < 1 \text{ indien } y > 0$$

- De derde eigenschap zegt dat je beide leden van een ongelijkheid mag vermenigvuldigen
$$a < b \Rightarrow\ r \cdot a > r \cdot b$$
of delen
$$r \cdot a > r \cdot b \Rightarrow\ a < b$$
met eenzelfde strikt negatief getal r. De ongelijkheid draait hierbij om.

Met deze eigenschappen van ongelijkheden kunnen we de oplossingsverzameling zoeken van ongelijkheden, namelijk de verzameling van alle getallen die voldoen aan de ongelijkheid. We noteren deze oplossingsverzameling met V.

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Tekenverloop

Veronderstelde voorkennis: Het tekenverloop van eerstegraadsveeltermen en tweedegraadsveeltermen, Verzamelingen, Bewerkingen met verzamelingen en Veeltermfuncties en Rationale functies

We bespreken hier het tekenverloop van veeltermfuncties en rationale functies. Het tekenverloop beschrijft voor welke waarden uit het domein de functie positief, negatief of nul is. Met behulp van het tekenverloop van een functie f kan je ongelijkheden van de vorm $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) > 0$ en $f(x) \geq 0$ oplossen.

Je kan het tekenverloop van een **veeltermfunctie** bepalen door de veelterm eerst te ontbinden in eerste- en tweedegraadsveeltermen, en daarna de tekenverlopen van die factoren te combineren. We illustreren dit met een voorbeeld.

Voorbeeld 9.2.1 (Tekenverloop van een veeltermfunctie)**.**

Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $(1-x)(3x^2-3)(-x^2+x+2) > 0$.

Uitwerking: We maken voor elk van de factoren een apart tekenverloop en brengen dit samen in één tabel.

- $(1-x)$ heeft één nulpunt: 1.
- $(3x^2-3)$ heeft twee nulpunten: -1 en 1.
- $(-x^2+x+2)$ heeft twee nulpunten: -1 en 2.

Dit geeft volgende samenvattende tabel (met de nulpunten steeds geordend van klein naar groot):

x		-1		1		2	
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$3x^2-3$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-x^2+x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(1-x)(3x^2-3)(-x^2+x+2)$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

We bekomen de onderste rij door de tekens van de eerste- en tweedegraadsfactoren te vermenigvuldigen. Zo bepalen we het teken van de getallen in de kolom die staat voor $x \in]-\infty,-1[$ als volgt: twee plustekens (dus positieve factoren) vermenigvuldigen geeft iets positief, en dat vermenigvuldigen met iets negatief geeft iets negatief, wat ons het minteken in de onderste rij geeft. Als één van de factoren nul wordt, dan wordt de veeltermfunctie ook nul. In de onderste rij lezen we af dat $(1-x)(3x^2-3)(-x^2+x+2) > 0$ voor $x \in]2,\infty[$.

De oplossingsverzameling van de ongelijkheid is dus $V =]2,\infty[$.

Ook van **rationale functies** kan je het tekenverloop bepalen door eerst teller en noemer te ontbinden in eerste- en tweedegraadsveeltermen, en daarna de tekenverlopen van die factoren te combineren. We illustreren de werkwijze met een voorbeeld.

Voorbeeld 9.2.2 (Tekenverloop van een rationale functie)**.**

Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $\dfrac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4} \leqslant 0$.

Uitwerking: We maken voor elk van de factoren van teller en noemer een apart tekenverloop en brengen dit samen in één tabel.

- $(4-x^2)$ heeft twee nulpunten: 2 en -2.
- $(3x^2-9x+6)$ heeft twee nulpunten: 1 en 2.
- $(2x+4)$ heeft één nulpunt: -2.

CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Tekenverloop

Dit geeft volgende samenvattende tabel (met de nulpunten steeds geordend van klein naar groot):

x		-2		1		2	
$4-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$3x^2-9x+6$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4}$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$-$

De verticale streep bij het nulpunt van de noemer duidt aan dat de breuk er niet gedefinieerd is. Met behulp van deze verticale streep wordt dus eigenlijk de bestaansvoorwaarde genoteerd.
We bekomen de onderste rij door de tekens van de eerste- en tweedegraadsfactoren te vermenigvuldigen. Zo bepalen we het teken van de getallen in de kolom die staat voor $x \in]-\infty, 2[$ als volgt: twee mintekens (dus negatieve factoren) vermenigvuldigen geeft iets positief, en dat vermenigvuldigen met de derde positieve factor geeft dan iets positief, wat ons het plusteken in de onderste rij geeft. Als we een nul tegenkomen moeten we opletten:

- Zijn er enkel factoren in de teller die nul worden, dan wordt de rationale functie ook nul.
- Is er een factor in de noemer nul, dan is de rationale functie niet gedefinieerd in dat punt, en zetten we een $\vert$.

In de onderste rij lezen we af dat $\frac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4} \leqslant 0$ voor $x \in [1, +\infty[$.

De oplossingsverzameling van de ongelijkheid is dus $V = [1, +\infty[$.

CC BY-NC-SA 4.0

9.2.A Oefeningen tekenverloop

9.2.A.1 Niveau 1

Oefening 9.2.1. Onderzoek achtereenvolgens voor welke $x \in \mathbb{R}$ volgende ongelijkheden gelden.

1. $x^2 - 4 < 0 \iff \ldots\ldots$
2. $\dfrac{1}{x^2-4} < 0 \iff \ldots\ldots$
3. $\dfrac{1}{4-x^2} > 0 \iff \ldots\ldots$
4. $100 - x < 0 \iff \ldots\ldots$
5. $\dfrac{100-x}{x^2-4} < 0 \iff \ldots\ldots$
6. $\dfrac{100+x}{x^2-4} < 0 \iff \ldots\ldots$
7. $-x < 0 \iff \ldots\ldots$
8. $\dfrac{-x}{x^2-4} < 0 \iff \ldots\ldots$

9.2.A.2 Niveau 2

Oefening 9.2.2. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ volgende ongelijkheden gelden.

1. $\dfrac{-3x+6}{x^2-2} < 0 \iff \ldots\ldots$
2. $\dfrac{x^2+5x+6}{8-4x} < 0 \iff \ldots\ldots$
3. $\dfrac{2-x^2}{5(x^2+3)} > 0 \iff \ldots\ldots$
4. $\dfrac{(2x-3)(x^2-5x+4)}{x^2(-x^2+2x-1)} \leqslant 0 \iff \ldots\ldots$

Oefening 9.2.3. Welke van de onderstaande grafieken is die van de functie met als voorschrift

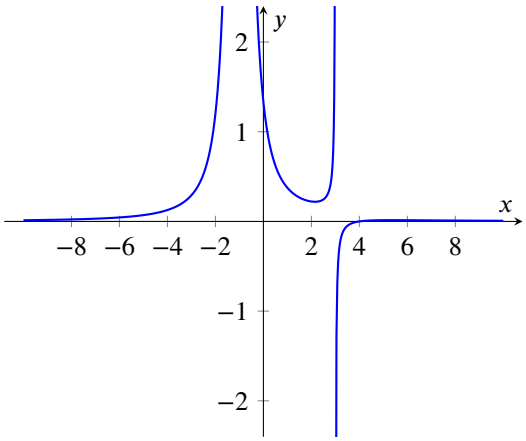
$$f(x) = \frac{x-4}{x^2-2x-3}$$

Meerkeuze:

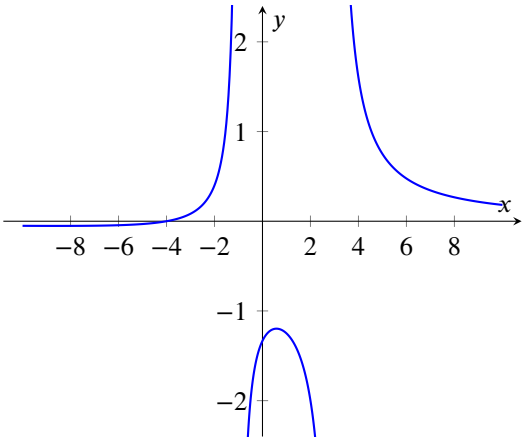
CC BY-NC-SA 4.0

9.2.A Oefeningen tekenverloop

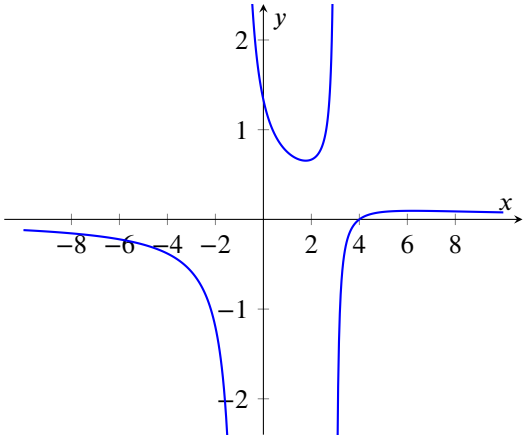
(a)



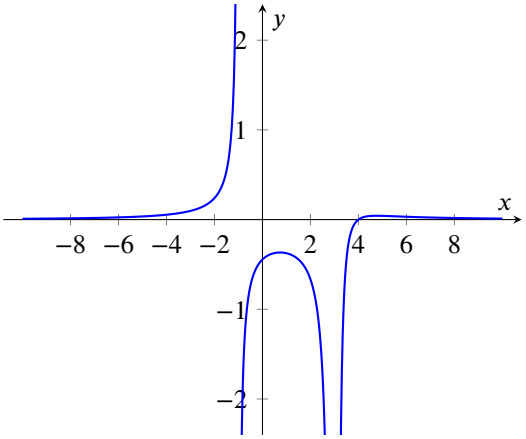
(c)



(b)



(d)



CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Ongelijkheden met veeltermen

We geven eerst een voorbeeld van het oplossen van een ongelijkheid met een **eerstegraadsveelterm**.

Voorbeeld 9.3.1 (Ongelijkheid eerstegraadsveelterm)**.**

1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $2x+3<5$.

$$\begin{array}{rcll} 2x+3 & < & 5 & \\ & \Updownarrow & & (\ -3 \text{ optellen}) \\ 2x & < & 2 & \\ & \Updownarrow & & (\ \text{delen door } 2) \\ x & < & 1 & (x \text{ is kleiner dan } 1) \end{array}$$

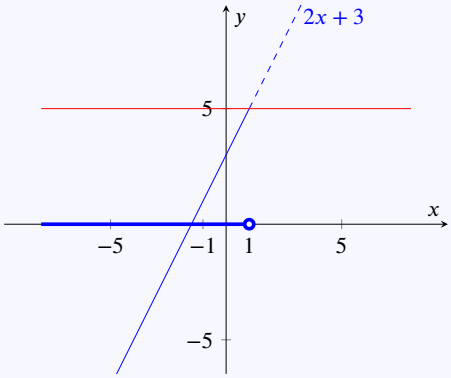
Dus is de oplossingsverzameling $V =]-\infty, 1\,[$.

Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -5 op te tellen

$$2x-2<0$$

en dan het tekenverloop van de eerstegraadsfunctie $x \mapsto 2x-2$ te gebruiken:

x		1	
$2x-2$	$-$	0	$+$



2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $-2x+3<5$.

$$\begin{array}{rcll} -2x+3 & < & 5 & \\ & \Updownarrow & & (\ -3 \text{ optellen}) \\ -2x & < & 2 & \\ & \Updownarrow & & (\ \text{delen door } -2, \text{ ongelijkheid omkeren}) \\ x & > & -1 & (x \text{ is groter dan } -1) \end{array}$$

Dus is de oplossingsverzameling $V =]-1, +\infty[$.

Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -5 op te tellen

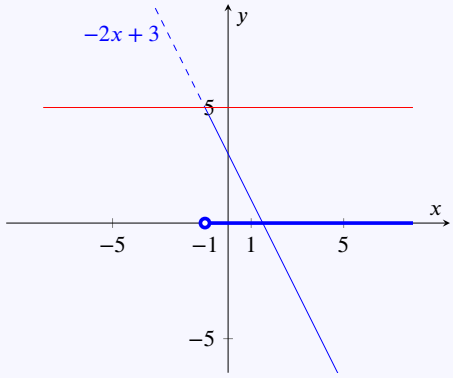
$$-2x-2<0$$

en dan het tekenverloop van de eerstegraadsfunctie $x \mapsto -2x-2$ te gebruiken:

x		-1	
$-2x-2$	$+$	0	$-$

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Ongelijkheden met veeltermen



Het oplossen van ongelijkheden met **hogere graadsveeltermen** kan door alle termen naar één lid te brengen en van de verkregen veeltermfunctie het tekenverloop op te stellen. We geven een voorbeeld met een derdegraadsveelterm.

Voorbeeld 9.3.2 (Ongelijkheid derdegraadsveelterm)**.**

Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $2x^3 + 2x^2 + 2 < x^3 + 5x + 8$.

We lossen deze ongelijkheid op door eerst bij beide leden $-x^3 - 5x - 8$ op te tellen, zodat we een ongelijkheid van de vorm $p(x) < 0$ verkrijgen:

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 < 0$$

Dan gebruiken we het tekenverloop van de derdegraadsfunctie $x \mapsto x^3 + 2x^2 - 5x - 6$. Hiervoor ontbinden we de veelterm $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ in factoren. We zoeken een nulpunt van de gegeven veelterm. We gaan na of $p(x)$ een geheel nulpunt a heeft. Hiervoor moet a een deler zijn van de constante term. De mogelijkheden zijn dus $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$. We berekenen $p(1) = 1 + 2 - 5 - 6 \neq 0$, maar $p(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$.

Er bestaat dus zeker een veelterm $q(x)$ zodat $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1)q(x)$. Deze veelterm $q(x)$ kan je berekenen met de Euclidische deling:

$$\begin{array}{rcrcrcr|l}
1x^3 & + & 2x^2 & - & 5x & - & 6 & x+1 \\
\cline{8-8}
1x^3 & + & x^2 & & & & & x^2+x-6 \\
\cline{1-3}
 & & x^2 & - & 5x & - & 6 & \\
 & & x^2 & + & x & & & \\
\cline{3-5}
 & & & & -6x & - & 6 & \\
 & & & & -6x & - & 6 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Hieruit volgt dat $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x^2 + x - 6)$.

De veelterm $q(x)$ kan ook gevonden worden door het rekenschema van Horner te gebruiken:

$$\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & 2 & -5 & -6 \\
-1 & & -1 & -1 & 6 \\
\hline
 & 1 & 1 & -6 & 0
\end{array}$$

Nu stellen we het tekenverloop op van deze veelterm, analoog aan het voorbeeld.

- $(x + 1)$ heeft één nulpunt: -1.
- $(x^2 + x - 6)$ heeft twee nulpunten: 2 en -3.

CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Ongelijkheden met veeltermen

Dit geeft het volgende tekenverloop:

x		-3		-1		2	
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2+x-6	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^3+2x^2-5x-6	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hieruit kunnen we aflezen wanneer $x^3+2x^2-5x-6<0$. De oplossingsverzameling van deze ongelijkheid is dus $V=]-\infty,-3[\cup]-1,2[$.

CC BY-NC-SA 4.0

9.4 Ongelijkheden met veeltermbreuken

Veronderstelde voorkennis: rationale vergelijkingen en unie van verzamelingen

Voorbeeld 9.4.1 (Ongelijkheid met veeltermbreuk).

Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$.

Bestaansvoorwaarde: $x \neq 3$

Deze ongelijkheid kan het eenvoudigst opgelost worden door de term 2 uit het rechterlid naar het linkerlid te brengen zodat we vergelijken met nul

$$\frac{x+4}{x-3} - 2 < 0,$$

dan het linkerlid op gelijke noemer te brengen

$$\frac{x+4-2(x-3)}{x-3} < 0 \Leftrightarrow \frac{-x+10}{x-3} < 0,$$

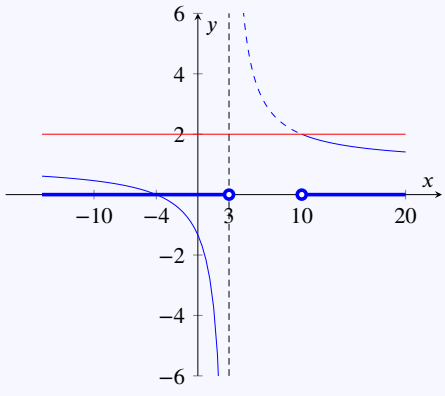
en dan het tekenverloop van de rationale functie $\dfrac{-x+10}{x-3}$ te onderzoeken.

x		3		10	
$-x+10$	+	+	+	0	−
$x-3$	−	0	+	+	+
$\dfrac{-x+10}{x-3}$	−	|	+	0	−

Uit het tekenverloop volgt dat de oplossingsverzameling $V =]-\infty, 3[\cup]10, +\infty[$ is.

We kunnen dus ook zeggen: $\dfrac{x+4}{x-3} < 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3[\cup]10, +\infty[$.

Dit kunnen we ook zien op de grafiek van $\dfrac{x+4}{x-3}$:



Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst beide leden te vermenigvuldigen met $x-3$. We mogen echter *niet* zomaar linker- en rechterlid vermenigvuldigen met $x-3$, want we kennen het teken niet van $x-3$. We maken dus een *gevalsonderscheid*:

- Bestaansvoorwaarde: $x \neq 3$

9.4 Ongelijkheden met veeltermbreuken

- $x-3>0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$. De ongelijkheid blijft behouden omdat $x-3$ positief is.

$$\begin{array}{rcll} x+4 & < & 2x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen}) \\ 4 & < & x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen}) \\ 10 & < & x & (x \text{ is groter dan } 10) \end{array}$$

- $x-3<0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$. De ongelijkheid keert om omdat $x-3$ negatief is.

$$\begin{array}{rcll} x+4 & > & 2x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen}) \\ 4 & > & x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen}) \\ 10 & > & x & (x \text{ is kleiner dan } 10) \end{array}$$

Dus

- in het geval dat $x-3>0$ (of $x>3$), dan wordt de ongelijkheid $x>10$.
- in het geval dat $x-3<0$ (of $x<3$), dan wordt de ongelijkheid $x<10$. Dat is natuurlijk automatisch het geval: Als $x<3$ dan is ook $x<10$. Dus, als $x<3$ dan is automatisch $\dfrac{x+4}{x-3}<2$.

Samengevat: $\dfrac{x+4}{x-3}<2$ als $x<3$ of $x>10$.

De oplossingsverzameling is $V=]-\infty,3[\cup]10,+\infty[$.

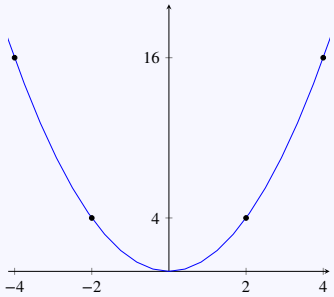
CC BY-NC-SA 4.0

9.5 Functies toepassen op ongelijkheden

Zij $x, y \in \mathbb{R}$ en f een reële functie. We kunnen ons het volgende afvragen:

als $x < y$, kunnen we dan iets zinnigs zeggen over $f(x)$ en $f(y)$?

Voorbeeld 9.5.1. We onderzoeken bij wijze van voorbeeld het verband voor de functie $f(x) = x^2$.



Er geldt dan:

$$\begin{array}{rcl} 2 < 4 & \text{en} & 2^2 < 4^2 \\ -4 < -2 & \text{en} & (-4)^2 > (-2)^2 \\ -2 < 4 & \text{en} & (-2)^2 < 4^2 \\ -4 < 2 & \text{en} & (-4)^2 > 2^2 \\ -2 < 2 & \text{en} & (-2)^2 = 2^2 \end{array}$$

Als x en y beide positief zijn, wordt de orde behouden. Als x en y beide negatief zijn, draait de orde om. Als x en y een verschillend teken hebben, kunnen we niets zeggen over de relatie tussen x^2 en y^2: zowel $x^2 < y^2$, $x^2 > y^2$ als $x^2 = y^2$ zijn mogelijk. In dit geval mogen we dus niet kwadrateren.

We kunnen de verschillende gevallen samenvatten als:

Als $x, y \geq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$.

Als $x, y \leq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 > y^2$.

Als $x < 0 < y$ zijn zowel $x^2 \leq y^2$ als $x^2 \geq y^2$ mogelijk.

Dit voorbeeld toont aan dat je erg moet opletten bij het al dan niet behouden blijven van ongelijkheden.

Definitie 9.5.1. Zij f een reële functie op een interval $I \subset \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$\begin{array}{rcl} f \text{ is strikt stijgend op } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) < f(y)) \\ f \text{ is strikt dalend op } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) > f(y)) \end{array}$$

Dus, als je *weet* dat een bepaalde functie stijgt (omdat je de grafiek kent), dan weet je ook dat $f(x) < f(y)$ van zodra $x < y$.

Voorbeeld 9.5.2.

1. De functie $f : x \mapsto 2x + 3$ is stijgend, en dus is $f(2) < f(4)$.
2. De functie $f : x \mapsto -2x + 3$ is dalend, en dus is $f(2) > f(4)$.
3. De functie $f : x \mapsto x^2$ is stijgend op het interval $[0, 10]$, en dus is $f(2) < f(4)$.
4. De functie $f : x \mapsto x^2$ is dalend op het interval $[-10, 0]$, en dus is $f(-4) > f(-2)$.
5. De functie $f : x \mapsto \sqrt{x}$ is stijgend op het interval $[0, +\infty[$ en dus is $f(2) < f(4)$.

CC BY-NC-SA 4.0

9.5 Functies toepassen op ongelijkheden

Oefening 9.5.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid

1. $2 < \sqrt{x} \iff x \in$ | $]4,+\infty[$ | $]-4,+\infty[$ | $[0,+\infty[$ | $[0,4[$ | geen oplossingen |

2. $-2 < \sqrt{x} \iff x \in$ | $]4,+\infty[$ | $]-4,+\infty[$ | $[0,+\infty[$ | $[0,4[$ | geen oplossingen |

3. $2 < -\sqrt{x} \iff x \in$ | $]4,+\infty[$ | $]-4,+\infty[$ | $[0,+\infty[$ | $[0,4[$ | geen oplossingen |

4. $-2 < -\sqrt{x} \iff x \in$ | $]4,+\infty[$ | $]-4,+\infty[$ | $[0,+\infty[$ | $[0,4[$ | geen oplossingen |

Voorbeeld 9.5.3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x-1} > 3$.

De uitdrukking onder het wortelteken moet positief zijn, anders heeft de opgave geen betekenis. Dit is de bestaansvoorwaarde:

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1\,.$$

We mogen kwadrateren omdat beide leden van de ongelijkheid positief zijn en de orde blijft bewaard. We krijgen dan $x - 1 > 9$.

Omdat $x - 1 > 9$ overeenstemt met $x > 10$, is aan de bestaansvoorwaarde ($x \geq 1$) zeker voldaan.

De oplossingsverzameling is dus $V =]10,+\infty[$.

In volgende voorbeelden geven we enkel de methode, niet de gehele uitwerking.

Voorbeeld 9.5.4. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \leq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, geen oplossing

Voorbeeld 9.5.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \geq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, ongelijkheid steeds voldaan

CC BY-NC-SA 4.0

9.5.A Oefeningen ongelijkheden

9.5.A.1 Niveau 1

Oefening 9.5.2. Los volgende ongelijkheden op:

1. Welke reële getallen x voldoen aan $x+5<7$.

Meerkeuze:

(a) $[0,2[$

(b) $]-\infty,2[$

(c) $]-\infty,2]$

(d) $]-2,7[$

2. Welke reële getallen x voldoen aan $2x+5\geq 4x+3$. Antwoord: ... ...

3. Welke reële getallen x voldoen aan $-2x\leq -4$. Antwoord: ... ...

9.5.A.2 Niveau 2

Oefening 9.5.3. Onderzoek welke $x\in\mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid.

1. $2(x^2+1)\leqslant 5x \iff$ ... ...

2. $x^2(x^2+3)<(x+6)(x^2+3) \iff$ ... ...

3. $x^3+2x^2-1>3x^2+4x-5 \iff$ ... ...

4. $\dfrac{1}{x}<3 \iff$ ... ...

5. $\dfrac{x}{x+1}\geq -2 \iff$ ... ...

6. $\dfrac{(x-5)^2}{x-4}<\dfrac{x-5}{x-4} \iff$ ... ...

7. $\dfrac{2x}{x-1}\leqslant\dfrac{x}{x-2} \iff$ ... ...

9.5.A.3 Niveau 3

Oefening 9.5.4. Onderzoek welke $x\in\mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid.

1. $\sqrt[3]{4x}\leq x \iff$ ... ...

2. $(x+1)^3<27 \iff$ ... ...

3. $\sqrt{x+3}<x-2 \iff$ ... ...

4. $\dfrac{x-2}{\sqrt{x+1}}<2 \iff$ ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

9.6 Absolute waarde en ongelijkheden

Voor de absolute waarde worden volgende eigenschappen afgelezen op de reële rechte:

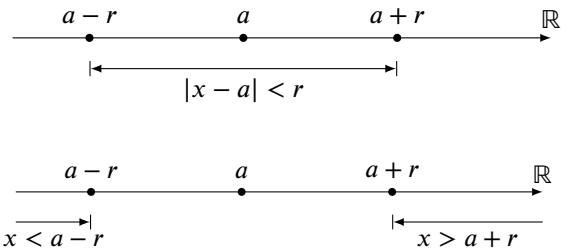
Eigenschap 9.6.1 (Basiseigenschappen absolute waarde)**.** Als $x, a \in \mathbb{R}$ en $r \in \mathbb{R}_0^+$, dan is

1) $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r \Leftrightarrow x \in]-r, r[$
$\Leftrightarrow$ x ligt dichter bij 0 dan r

2) $|x| > r \Leftrightarrow x < -r$ **of** $r < x \Leftrightarrow x \notin [-r, r]$
$\Leftrightarrow$ x ligt verder van 0 dan r

3) $|x-a| < r \Leftrightarrow -r < x-a < r \Leftrightarrow x \in]a-r, a+r[$
$\Leftrightarrow a-r < x < a+r \Leftrightarrow$ x ligt dichter bij a dan r

4) $|x-a| > r \Leftrightarrow x-a < -r$ **of** $r < x-a \Leftrightarrow x \notin [a-r, a+r]$
$\Leftrightarrow x < a-r$ **of** $a+r < x \Leftrightarrow$ x ligt verder van a dan r



Opmerking 9.6.1.

- Met deze eigenschappen kan je dus één ongelijkheid *met* een absolute waarde omzetten in een *dubbele* ongelijkheid *zonder* absolute waarde.
- Deze eigenschappen kunnen ook met $\leq$ geformuleerd worden, bijvoorbeeld

$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r \Leftrightarrow x \in [-r, r]$$

Voorbeeld 9.6.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\left|\frac{2x}{3}\right| < 1$.

Oplossingsverzameling: $V = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$

9.6 Absolute waarde en ongelijkheden

Uitwerking:

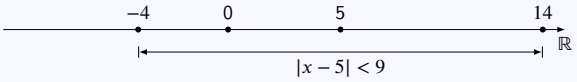
$$\begin{array}{rcll} \left|\frac{2x}{3}\right| & < & 1 & \\ & \Updownarrow & & \textit{(absolute waarde doorschuiven)} \\ \frac{|2||x|}{|3|} & < & 1 & \\ & \Updownarrow & & (|2|=2, |3|=3) \\ \frac{2|x|}{3} & < & 1 & \\ & \Updownarrow & & \textit{maal } \frac{3}{2} > 0 \\ |x| & < & \frac{3}{2} & \\ & \Updownarrow & & \\ -\frac{3}{2} < & x & < \frac{3}{2} & \end{array}$$

De oplossingsverzameling is dus $V = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

Voorbeeld 9.6.2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x-5| < 9$.

$$\begin{array}{rcll} |x-5| & < & 9 & \text{(de afstand tussen } x \text{ en 5 is kleiner dan 9)} \\ & \Updownarrow & & (|x-a| < r \iff -r < x-a < r) \\ -9 < & x-5 & < 9 & (x-5 \text{ ligt tussen } -9 \text{ en } 9) \\ & \Updownarrow & & (+5 \text{ optellen}) \\ -4 < & x & < 14 & (x \text{ ligt tussen } -4 \text{ en } 14) \end{array}$$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-4, 14[$.



Oefening 9.6.1.

1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|2x-5| < 9$. Oplossingsverzameling: ... ...

2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|3-2x| < 1$. Oplossingsverzameling: ... ...

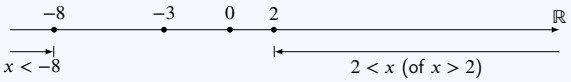
Voorbeeld 9.6.3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x+3| > 5$

$$\begin{array}{rcll} |x+3| & > & 5 & \text{(de afstand tussen } x \text{ en } -3 \text{ is groter dan 5)} \\ & \Updownarrow & & (|x-a| > r \iff x-a < -r \text{ of } r < x-a) \\ x+3 < -5 & \text{of} & 5 < x+3 & \\ & \Updownarrow & & (-3 \text{ optellen}) \\ x < -8 & \text{of} & 2 < x & \end{array}$$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-\infty, -8[\cup]2, +\infty[$.

CC BY-NC-SA 4.0

9.6 Absolute waarde en ongelijkheden



Voorbeeld 9.6.4. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x^2 - 3| < 9$.

Oplossingsverzameling: $V = \left]-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right[$

Uitwerking:

$$
\begin{array}{rcll}
|x^2-3| & < & 9 & \text{de afstand tussen } x^2 \text{ en } 3 \text{ is kleiner dan } 9 \\
 & \Updownarrow & & (|x-a|<r \iff -r<x-a<r) \\
-9< & x^2-3 & <9 & \\
 & \Updownarrow & & (+3 \text{ optellen}) \\
-6< & x^2 & <12 & \\
 & \Updownarrow & & -6<x^2 \text{ is automatisch voldaan en is dus geen voorwaarde} \\
x^2 & < & 12 & \\
 & \Updownarrow & & \text{beide leden pos., worteltrekken mag} \\
\sqrt{x^2} & < & \sqrt{12} & (\sqrt{12}=2\sqrt{3}) \\
 & \Updownarrow & & (\sqrt{x^2}=|x|) \\
|x| & < & 2\sqrt{3} & \\
 & \Updownarrow & & (|x|<r \iff -r<x<r) \\
-2\sqrt{3}< & x & <2\sqrt{3}. &
\end{array}
$$

De oplossingsverzameling is dus $V = \left]-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right[$.

Ter referentie vermelden we hier nog enkele ongelijkheden met absolute waardes die behoren tot de vlakke meetkunde:

Eigenschap 9.6.2. Als $x, y, z \in \mathbb{R}$, dan is

(a) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (**eerste driehoeksongelijkheid**)

(b) $|x-y| \leqslant |x-z| + |z-y|$ (**eerste driehoeksongelijkheid; *equivalente vorm***)

(c) $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leqslant |x-y|$ (**tweede driehoeksongelijkheid**)

Opmerking 9.6.2.

Uit (a) volgt ook onmiddellijk dat $|x-y| \leq |x| + |y|$ (want $x - y = x + (-y)$ en $|y| = |-y|$), maar natuurlijk geldt NIET dat ~~$|x-y| \leq |x| - |y|$~~.

CC BY-NC-SA 4.0

9.6.A Oefeningen absolute waarde en ongelijkheden

9.6.A.1 Niveau 2

Oefening 9.6.2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|x-4| < 2$. …
2. $|4-x| \leq 2$. …
3. $|3x| < 6$. …
4. $|3x-4| < 5$. …
5. $|3(x-1)| < 2$. …
6. $\left|\frac{1}{3}(1-x)\right| < 1$. …
7. $|11-2x| < 5$. …

Oefening 9.6.3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|\sqrt{x}+3| < 9$. …
2. $|3-\sqrt{x}| < 1$. …
3. $\left|\frac{1-\sqrt{4x+1}}{4}\right| < 1$. …
4. $\left|\frac{3+\sqrt{1-x}}{2}\right| < 1$ …

Oefening 9.6.4. Onderzoek welke $p > 0$ voldoen aan $\left|\frac{1}{12}\left(7-\sqrt{1+48p}\right)\right| < 1$. …

9.6.A.2 Niveau 3

Oefening 9.6.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $\left|5-\frac{2}{x}\right| \leq 1$. …
2. $\left|\frac{2}{\sqrt{x}-2}\right| < 2$? …

Oefening 9.6.6. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|x^2-2| < 1$. …
2. $|x^2-3| < 2x$. …

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 10
Exponentiele en logaritmische functies

(Versie 2026/11/23H.2)

10.1 Groeimodellen

Wetenschappers bestuderen grootheden die veranderen in de tijd zoals temperatuur, snelheid, winst, consumptieprijzen en bevolkingsaantallen. We gebruiken hier de term **groeimodel** voor twee types erg regelmatig groeiende grootheden. Het woord 'groeien' moet niet te letterlijk worden genomen: het kan ook 'krimpen' of 'afnemen' betekenen: dan spreken we van *negatieve groei* of *verval*. In de praktijk groeien grootheden ook veel onregelmatiger en dat kan met behulp van de wiskundige techniek van afgeleiden van functies worden bestudeerd.

In het **lineaire groeimodel** wordt per tijdseenheid een constante term *opgeteld* bij de grootheid, in het **exponentieel groeimodel** wordt de grootheid per tijdseenheid telkens met een constante factor *vermenigvuldigd* (de zogenaamde *groeifactor*).

Definitie 10.1.1 (Pseudo-definitie van lineaire en exponentiële groei)**.**

Een grootheid groeit **lineair** als er na elke tijdseenheid een vaste waarde wordt *bijgeteld*. Deze waarde noemen we de **groeisnelheid**.

Een grootheid groeit **exponentieel** als ze na elke tijdseenheid met een vaste waarde wordt *vermenigvuldigd*. Deze waarde noemen we de **groeifactor**.

Merk alvast op dat de waarde die telkens wordt opgeteld ook negatief kan zijn, en de waarde waarmee wordt vermenigvuldigd kleiner kan zijn dan 1. In beide gevallen spreken we over **negatieve groei**.

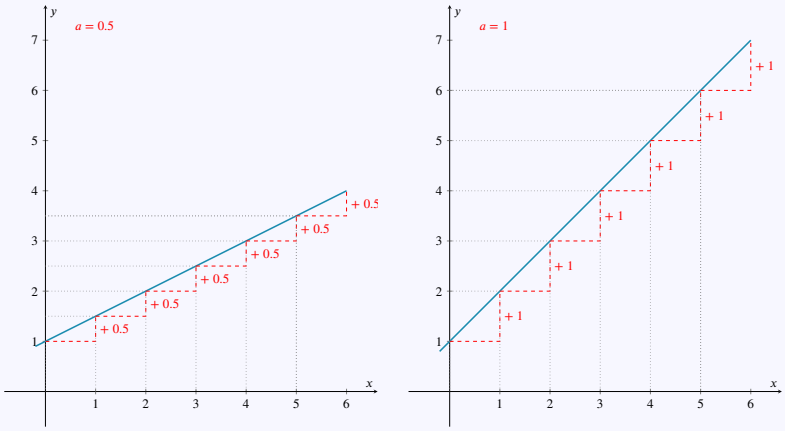
We onderzoeken eerst wat lineaire en exponentiële groei betekenen voor *reële functies*.

Voorbeeld 10.1.1 (Lineaire groei)**.**

Voor een reële functie $f : x \mapsto f(x)$ betekent lineaire groei volgens de definitie dat telkens wanneer x met 1 toeneemt, de functiewaarde $f(x)$ ook met een vaste waarde moet toenemen. Als we die waarde a noemen, betekent dat dus dat $f(x+1) = f(x) + a$. Als we de functiewaarde voor $x = 0$ bijvoorbeeld b noemen, dan weten we dat $f(0) = b$, en dus

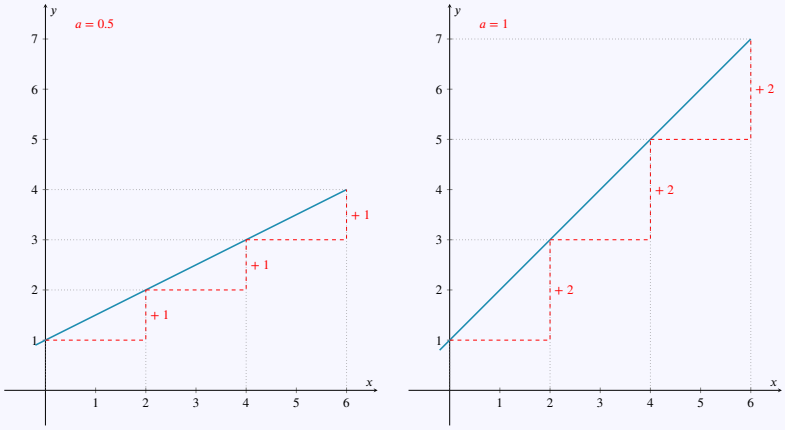
$$\begin{aligned} f(1) &= f(0+1) = f(0) + a = b + a \\ f(2) &= f(1+1) = f(1) + a = (b+a) + a = b + 2a \\ f(3) &= f(2+1) = f(2) + a = (b+2a) + a = b + 3a \\ f(4) &= f(3+1) = f(3) + a = (b+3a) + a = b + 4a. \end{aligned}$$

Op de grafiek van f ziet dit er als volgt uit:



Merk op dat ook steeds $f(x+2) = f((x+1)+1) = f(x+1) + a = f(x) + a + a = f(x) + 2a$:

10.1 Groeimodellen

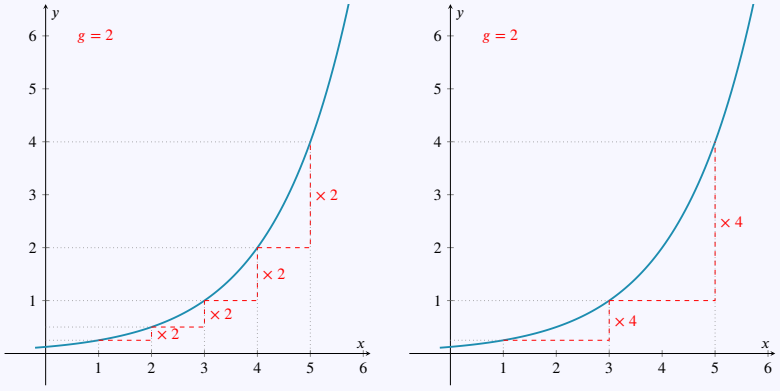


Voorbeeld 10.1.2 (Exponentiële groei)**.**

Voor een reële functie $f : x \mapsto f(x)$ betekent exponentiële groei volgens de definitie dat telkens wanneer x met 1 toeneemt, de functiewaarde $f(x)$ met een vaste waarde moet vermenigvuldigd worden. Als we die waarde g noemen, betekent dat dus dat $f(x+1) = gf(x)$. Als we de functiewaarde voor $x = 0$ bijvoorbeeld b noemen, dan weten we dat $f(0) = b$, en dus

$$f(1) = f(0+1) = f(0) \cdot g = b \cdot g$$
$$f(2) = f(1+1) = f(1) \cdot g = (b \cdot g) \cdot g = b \cdot g^2$$
$$f(3) = f(2+1) = f(2) \cdot g = (b \cdot g^2) \cdot g = b \cdot g^3$$
$$f(4) = f(3+1) = f(3) \cdot g = (b \cdot g^3) \cdot g = b \cdot g^4.$$

Op de grafiek van f ziet dit er als volgt uit:



Merk op dat dus ook geldt dat $f(x+2) = f((x+1)+1) = gf(x+1) = g^2 f(x)$.

We gebruiken de letter a voor de groeisnelheid bij lineaire groei en de letter g voor de groeifactor bij exponentiële groei.

Eigenschap 10.1.1.

Het functievoorschrift van een reële functie met *lineaire groei* met **beginwaarde** b en **groeisnelheid** a is

$$f(t) = at + b.$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.1 Groeimodellen

Het functievoorschrift van een reële functie met *exponentiële groei* met **beginwaarde** b en **groeifactor** g is

$$f(t) = b \cdot g^t.$$

Hierbij veronderstellen we $a \neq 0$, $g > 0$ en $g \neq 1$.

Opmerking 10.1.1.

- De groeifactor wordt soms ook met de letter a genoteerd, of de variabele van de functie met de letter x. Dan krijg je als functievoorschrift

$$f(t) = b \cdot a^t \text{ of } f(x) = b \cdot a^x.$$

- Zowel voor lineaire als voor exponentiële groei is b de *begin*waarde: voor $t = 0$ is telkens $f(0) = b$.

Oefening 10.1.1.

1. Maak de grafiek van een functie met lineaire groei met beginwaarde 4 waarbij de groeisnelheid 0 zou zijn.

Maak de grafiek van een functie met exponentiële groei met beginwaarde 4 waarbij de groeifactor 1 zou zijn.

Besluit: De groeisnelheid a bij lineaire groei moet verschillend zijn van 0, en de groeifactor g bij exponentiële groei moet verschillend zijn van 1, want anders krijgen we *constante* functies. Een constante functie noemen we *geen* lineaire of exponentiële groei.

Eigenschap 10.1.2.

- Als bij lineaire groei een functie over één tijdseenheid groeit met a, dan groeit ze met $n \cdot a$ over n tijdseenheden, want

$$f(t+n) = a(t+n) + b = at + an + b = f(t) + an$$

- Als bij exponentiële groei een functie over één tijdseenheid groeit met een groeifactor g, dan groeit ze met een factor g^n over n tijdseenheden, want

$$f(t+n) = b \cdot g^{t+n} = b \cdot g^t \cdot g^n = g^n \cdot f(t).$$

- Een lineaire groeifunctie stijgt als $a > 0$ en daalt als $a < 0$.
- Een exponentiële groeifunctie stijgt als $g > 1$ en daalt als $g < 1$.

Oefening 10.1.2 (Lineaire groei: constante toevoer van zand)**.**

Een zandhoop in een groeve groeit aan doordat er bovenaan zand wordt aangevoerd via een lopende band. De aanvoer van de band verloopt aan een constant debiet van 3/5 ton per kwartier. Stel dat men om 8 uur 's morgens begint een bestaande zandhoop van 2 ton zand aan te vullen volgens dit proces, dan kunnen we berekenen om hoe laat de zandhoop 10 ton zand zal bevatten.

We vertalen deze gegevens wiskundig als volgt: we meten de tijd t in eenheden van één kwartier en laten $t = 0$ overeenkomen met 8 uur 's morgens. De hoeveelheid zand op de hoop (in ton) op het ogenblik t geven we aan met $f(t)$.

CC BY-NC-SA 4.0

10.1 Groeimodellen

Voor elk natuurlijk getal n geldt

$$f(n) = \frac{3}{5}\, n + 2.$$

Omdat de tijd niet in sprongen van een kwartier verloopt, maar alle tussenwaarden aanneemt, kunnen we aannemen dat ook voor elk reëel getal t zal gelden dat

$$f(t) = \frac{3}{5}\, t + 2.$$

1. Teken de grafiek van deze functie f en geef de betekenis van de grootheden 2 en $\frac{3}{5}$ in de grafiek aan.

2. Verklaar de uitdrukking "lineaire groei".

3. Bereken hoe laat de zandhoop 10 ton zal bevatten.

Oefening 10.1.3 (Exponentiële groei: bacteriën)**.**

Een populatie bacteriën ontwikkelt zich in een kweekschaal. Stel dat het aantal bacteriën in het schaaltje elke 25 minuten verdubbelt en stel dat er in de beginsituatie vierduizend bacteriën aanwezig zijn. Hoe verloopt de groei van deze populatie bacteriën?

Om deze gegevens wiskundig te vertalen maken we volgende afspraken:

- We meten de tijd t in eenheden van 25 minuten.
- $t = 0$ komt overeen met het begin van onze observaties.
- De hoeveelheid bacteriën op het ogenblik t drukken we uit in duizendtallen en geven we aan met $f(t)$.

Voor elk natuurlijk getal n geldt

$$f(n) = 4 \cdot 2^n.$$

Hierin is $4 = f(0)$ de beginwaarde en de groeifactor (over 25 minuten) is in dit geval $g = 2$.

Omdat niet alle bacteriën gelijktijdig splitsen, is het aan te nemen dat de groei niet enkel gebeurt op de tijdstippen $0, 1, 2, 3 \ldots$ maar ook op elk moment tussen die tijdstippen. We kunnen bijvoorbeeld op zoek gaan naar het aantal bacteriën na 5 minuten ($\frac{1}{5}$ van de splitsingstijd) of na 50 minuten (het dubbele van de splitsingstijd).

1. Met welke factor groeit de functie over $\frac{1}{5}$ van een tijdseenheid? $\boxed{\frac{2}{5}}$ $\boxed{\sqrt[5]{2}}$ $\boxed{\sqrt{2}}$ $\boxed{\log_5 2}$.

2. Met welke factor groeit de functie over 2 tijdseenheden? ... .

3. Met welke factor groeit de functie over een uur, dus over $\frac{12}{5}$ tijdseenheden? ... ...

4. Schets de grafiek van deze functie.

Oefening 10.1.4. Elk schooljaar daalt de prijswaarde van een handboek wiskunde. Concreet verkoopt een leerling zijn handboek aan een leerling van een lager jaar voor $\frac{2}{3}$ van de prijs die hijzelf een jaar voordien voor het boek heeft betaald. Met andere woorden, de prijs daalt per jaar met $\frac{1}{3}$. Stel dat het handboek wiskunde oorspronkelijk voor 16 euro aangekocht werd in de boekhandel.

CC BY-NC-SA 4.0

10.1 Groeimodellen

1. De groeifactor per tijdseenheid van een jaar = … …

2. Het functievoorschrift voor de prijs p van het handboek in functie van de tijd t in jaren is

$$p(t) = \ldots\ldots$$

.

3. Het handboek wordt na 5 jaar verkocht aan … … euro.

4. Maak een grafiek van deze functie voor de 5 eerst jaren.

Oefening 10.1.5. Men maakt een studie over de bevolking van de stad Oostende. Het stadsbestuur neemt aan dat de bevolking exponentieel groeit. De tellingen zijn begonnen in 1995, maar deze resultaten zijn verloren gegaan. In 1997 waren er ongeveer 68000 inwoners; in 2001 is dit gegroeid tot 73000. Hoeveel mensen waren er, op basis van de gegevens, vermoedelijk in 1995? … …

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Exponentiële functies

Met twee positieve getallen a en r kunnen we altijd een derde getal a^r construeren. We noemen a het grondtal, r de exponent en a^r de macht (die gelezen wordt als *a tot de r-de macht*). Door nu één van beide getallen constant te houden en het andere in waarde te laten variëren kunnen we twee soorten *functies* definiëren.

- We kunnen een vaste waarde geven aan de exponent, bv. $r = 2$, en het *grondtal laten variëren*. Het is in de wiskunde de gewoonte om variërende grootheden (ook 'variabelen' genoemd) aan te duiden met de letter x. Op deze manier bekomen we de functie

$$f : x \mapsto x^2 \quad (a^r \text{ met } r = 2).$$

  Op dezelfde manier bekomen we ook de functies

$$f : x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x} \quad (a^r \text{ met } r = -1)$$

  of

$$f : x \mapsto x^{1/2} = \sqrt{x} \quad (a^r \text{ met } r = 1/2)$$

  of

$$f : x \mapsto x^r \quad (a^r \text{ met r vast gekozen}).$$

- Als we een vaste waarde geven aan het grondtal, bv. $a = 2$, kunnen we de *exponent laten variëren*. We kiezen weer voor de traditionele letter x voor de variërende grootheid (de 'variabele') en bekomen de functie

$$f : x \mapsto 2^x \quad (a^r \text{ met } a = 2).$$

  Deze functie noemen we een *exponentiële functie*, en we noteren ze ook als $\exp_2$:

$$\exp_2 : x \mapsto 2^x \quad (a^r \text{ met } a = 2).$$

  Op dezelfde manier bekomen we bijvoorbeeld ook de functies

$$\exp_{10} : x \mapsto 10^x \quad (a^r \text{ met } a = 10)$$

  of

$$\exp_a : x \mapsto a^x \quad (a^r \text{ met } a > 0 \text{ en } a \neq 1).$$

Definitie 10.2.1 (Exponentiële functie)**.**

De **exponentiële functie met grondtal** a (met $a > 0$ en $a \neq 1$), genoteerd als $\exp_a$, is de reële functie

$$\exp_a : x \mapsto a^x$$

waarbij x alle reële waarden mag aannemen.

Opmerking 10.2.1.

- In de praktijk worden zowel de notaties a^x als $\exp_a(x)$ gebruikt voor exponentiële functies.
- Er moeten beperkingen worden opgelegd aan mogelijke grondtallen a van een exponentiële functie:
  - a mag niet negatief zijn, want dat geeft problemen voor niet-gehele waarden van de exponent x (bv. $(-3)^{\frac{1}{2}}$)
  - a mag niet gelijk zijn aan 0, want dat geeft problemen voor negatieve exponenten x (bv. $0^{-1} = 1/0$)

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Exponentiële functies

– a mag niet gelijk zijn aan 1, want $1^x = 1$ voor alle x, en de functie $f : x \mapsto 1^x = 1$ is een *constante functie* met waarde 1. Om technische redenen is het beter die functie niet te beschouwen als een exponentiële functie.

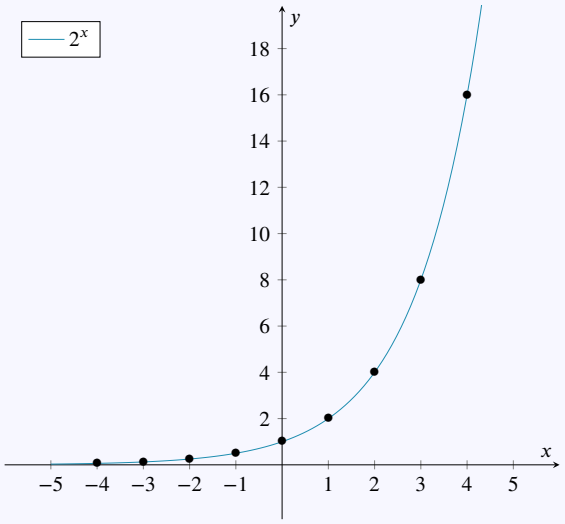
We bestuderen nu de *grafiek* van een exponentiële functie $\exp_a$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen a groter dan 1 en a tussen 0 en 1.

Voorbeeld 10.2.1 (Het geval $a > 1$: grafiek van de exponentiële functie $\exp_2$)**.**

We nemen als voorbeeld $a = 2$. We schetsen de grafiek van de exponentiële functie $\exp_2 : x \mapsto 2^x$ met grondtal 2 door een aantal punten van de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16

Dit levert een aantal punten op op de gezochte grafiek (zie de bolletjes op de figuur). Met een rekentoestel kunnen we ook functiewaarden berekenen voor niet-gehele waarden van x, bv. $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.4142$. Op die manier krijgen we een vrij precies beeld van de grafiek:



Voorbeeld 10.2.2 (Het geval $0 < a < 1$: grafiek van de exponentiële functie $\exp_{\frac{1}{2}}$)**.**

We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$. We schetsen de grafiek van de exponentiële functie $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten op de grafiek te bepalen.
In onderstaande tabel staan de functiewaarden voor $x = -4, -3, \ldots, 3, 4$:

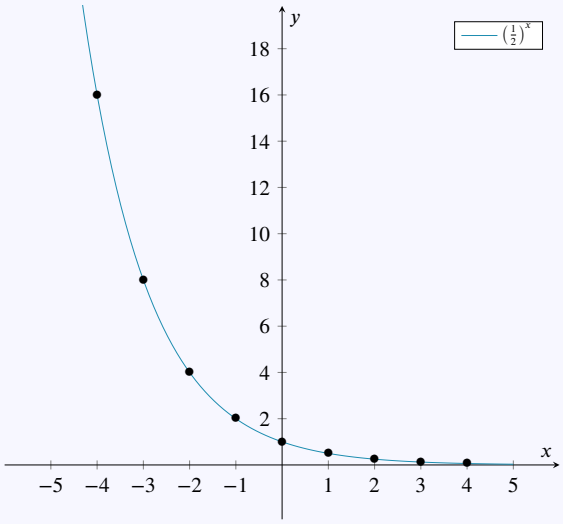
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125	0.0625

Dit levert weer een aantal punten op op de grafiek. Met een rekentoestel kunnen we opnieuw functiewaarden voor niet-gehele waarden van x berekenen, bv. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.7071$. Op die

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Exponentiële functies

manier krijgen we weer een vrij precies beeld van de grafiek:



Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = \frac{1}{2}$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* exponentiële functies:

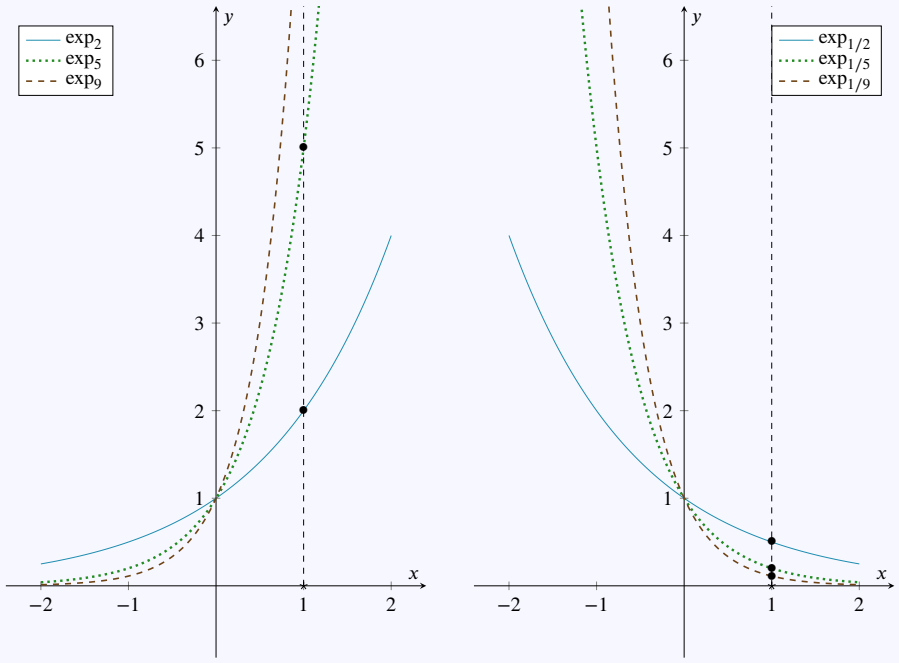
Eigenschap 10.2.1 (Exponentiële functies)**.**

- Als $a > 1$ dan is de functie $\exp_a$ *strikt stijgend*: $x < y \iff a^x < a^y$
- Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\exp_a$ *strikt dalend*: $x < y \iff a^x > a^y$
- De functie $\exp_a$ is gedefinieerd voor alle reële getallen x, dus het domein van $\exp_a$ is $\mathbb{R}$.
- De functiewaarden $\exp_a(x)$ zijn strikt positief, het beeld van $\exp_a$ is $\mathbb{R}_0^+$.
- De grafiek van $\exp_a$ snijdt de y-as steeds in het punt $(0, 1)$ (want $a^0 = 1$).
- De grafiek van $\exp_a$ snijdt de x-as niet ($\exp_a$ heeft geen nulpunten).
- De grafiek van $\exp_a$ snijdt de rechte $x = 1$ in het punt $(1, a)$ (want $a^1 = a$).

Voorbeeld 10.2.3.

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Exponentiële functies



Opmerking 10.2.2.

Het domein van $\exp_a$ is $\mathbb{R}$ en het beeld is $\mathbb{R}_0^+$.

Met de uitgebreidere notatie voor functies kunnen we dus ook schrijven

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto a^x.$$

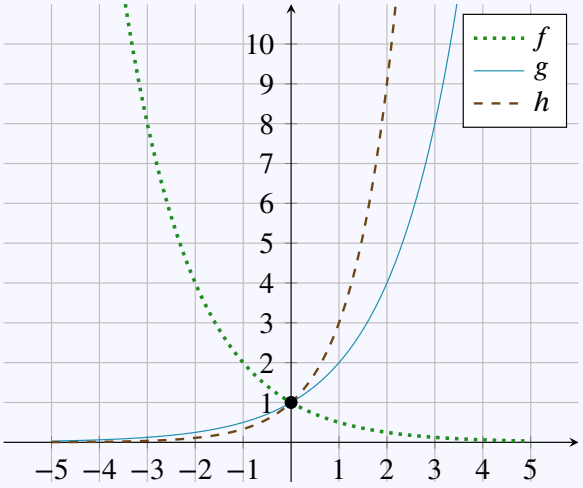
- We weten nu voor een gegeven *grondtal* a hoe de *grafiek* van $\exp_a$ er uit ziet. Dat hangt erg af van de waarde van het grondtal a, namelijk of $0 < a < 1$ dan wel $a > 1$. Het geval $a = 1$ is een constante functie $x \mapsto 1$. Dit is het grensgeval tussen dalende functies voor $a < 1$ en stijgende functies voor $a > 1$.
- Stel nu omgekeerd dat we de *grafiek* krijgen van een exponentiële functie en dat we het *grondtal* willen kennen. Op basis van de vorm van de grafiek kunnen we onmiddellijk bepalen of het grondtal tussen 0 en 1 ligt dan wel groter is dan 1. Maar er is meer: **het grondtal a is de y-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de verticale rechte door** $(1, 0)$. Inderdaad, dat snijpunt heeft een y-waarde gelijk aan de functiewaarde voor $x = 1$ en die is $\exp_a(1) = a^1 = a$. Zelfs als we de *exacte* waarde niet kunnen aflezen op de grafiek, is minstens een goede schatting meestal wel mogelijk.

Voorbeeld 10.2.4 (Onderscheiden van exponentiële functies)**.**

Hieronder worden de grafieken geschetst van drie functies $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \mapsto 2^x$ en $x \mapsto 3^x$. We vragen ons af welke grafiek bij welke functie hoort.

CC BY-NC-SA 4.0

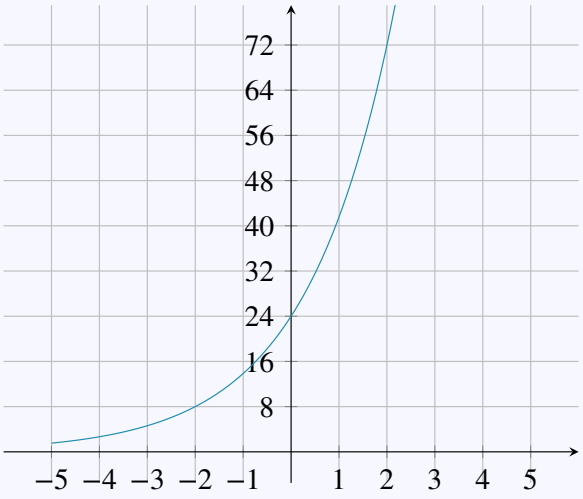
10.2 Exponentiële functies



We kunnen eerst de grafieken onderscheiden op grond van hun vorm. De grafieken van g en h zijn stijgend, hun grondtal is dus groter dan 1. De grafiek van f is dalend, dus is dat grondtal kleiner dan 1. Daarmee is het functievoorschrift van f gevonden, want er is maar één keuzemogelijkheid met $a < 1$, namelijk $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
Om de grafieken van g en h te onderscheiden, kijken we naar de y-waarde voor $x = 1$: $g(1) = 2$ en $h(1) = 3$. h is dus de functie $x \mapsto 3^x$ en g is de functie $x \mapsto 2^x$.
Je kan ook redeneren dat 3 groter is dan 2 waardoor de functie $x \mapsto 3^x$ sneller stijgt dan de functie $x \mapsto 2^x$ en dat daarom h bij $x \mapsto 3^x$ moet horen.

Voorbeeld 10.2.5 (Bepalen functievoorschrift)**.**

Stel dat we weten dat onderstaande tekening de grafiek is van een functie $f(x) = ba^x$, met a, b reële getallen. De punten $(-2, 8)$ en $(0, 24)$ behoren tot de grafiek. We willen het functievoorschrift bepalen, dus a en b vinden.



We weten dat $f(0) = 24$ en dat $f(-2) = 8$. Uit $24 = f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1$ volgt dat $b = 24$. Hiermee vinden we dan dat $f(-2) = 24 \cdot a^{-2} = 8$, dus dat $a^2 = 3$ of $a = \sqrt{3}$.

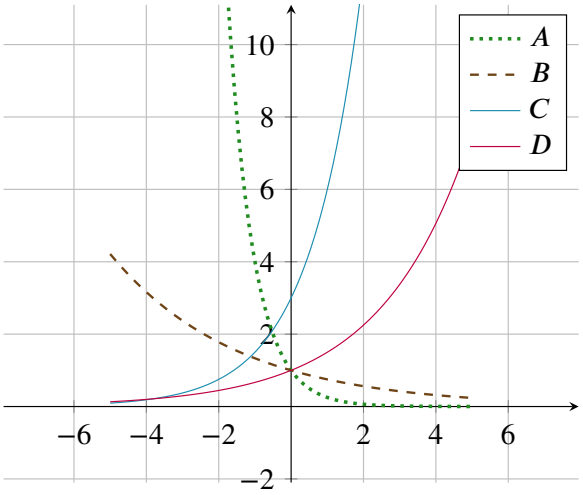
Merk op dat $a = -\sqrt{3}$ onmogelijk is, want bij een exponentiële functie moet het grondtal a positief

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Exponentiële functies

zijn.

Oefening 10.2.1. Met welke grafieken komen volgende functies overeen ?



1. $x \mapsto \left(\frac{3}{2}\right)^x$: | A | B | C | D |

2. $x \mapsto \left(\frac{3}{4}\right)^x$: | A | B | C | D |

3. $x \mapsto 3 \cdot 2^x$: | A | B | C | D |

4. $x \mapsto \left(\frac{1}{4}\right)^x$: | A | B | C | D |

Oefening 10.2.2.

1. Als $a > 1$, dan is $\exp_a$ een | stijgende | dalende | niet (altijd) gedefinieerde | functie.

2. Als $0 < a < 1$, dan is $\exp_a$ een | stijgende | dalende | niet (altijd) gedefinieerde | functie.

3. Als $\exp_a$ een dalende functie is, dan is | $a > 1$ | $0 < a < 1$ | $a = 1$ |.

4. Als $\exp_a$ een stijgende functie is, dan is | $a > 1$ | $0 < a < 1$ | $a = 1$ |.

5. Als $\exp_a$ een constante functie is, dan is | $a > 1$ | $0 < a < 1$ | $a = 1$ |.

Wanneer we als grondtal a de specifieke waarde $e = 2,7182818\ldots$ kiezen, dan verkrijgen we een veel voorkomende exponentiële functie $x \mapsto e^x$, die we meestal *de* exponentiële functie noemen. We noteren deze functie niet met $\exp_e$ maar met exp.

Definitie 10.2.2 (*De* exponentiële functie)**.** De functie

$$\exp : x \mapsto e^x$$

noemen we *de* exponentiële functie en wordt genoteerd zonder subscript e.

Als we in de gelijkheid

$$x = e^{\ln x}$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Exponentiële functies

x vervangen door a^x dan bekomen we

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$$

Hiermee kunnen we een *willekeurige* exponentiële functie $x \mapsto a^x$ herschrijven in termen van *de* exponentiële functie $x \mapsto e^x$.

Voorbeeld 10.2.6. De functie $x \mapsto 3^x$ kunnen we ook noteren als de functie $x \mapsto e^{\ln 3\, x}$.

CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Logaritmische functies

Door in de uitdrukking voor de logaritme $\log_a b$ het grondtal a constant te houden en het getal b te laten variëren, bekomen we een *functie*, namelijk een zogenaamde *logaritmische functie*:

Definitie 10.3.1 (Logaritmische functie)**.** De **logaritmische functie met grondtal** a ($a > 0$ en $a \neq 1$), genoteerd als $\log_a$, is de reële functie

$$\log_a : x \mapsto \log_a x$$

waarbij x enkel *strikt positieve waarden* mag aannemen.

Opmerking 10.3.1. Bij de invoering van de logaritme $\log_a b$ hebben we de noodzaak besproken om beperkingen op te leggen aan het grondtal a en het argument b.

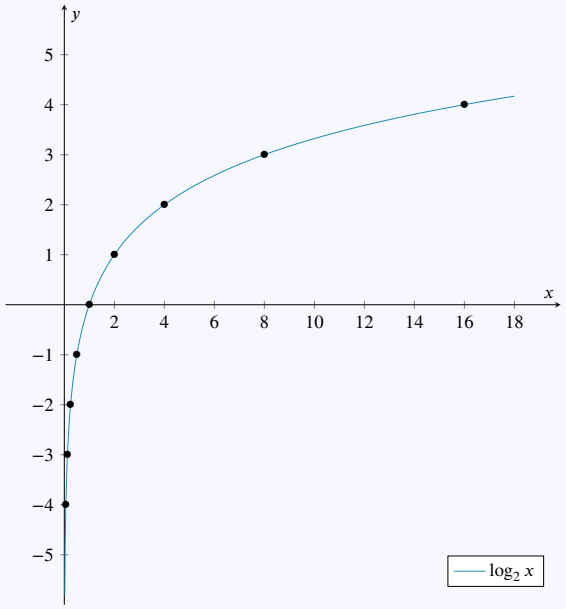
We bestuderen nu de *grafiek* van een logaritmische functie $\log_a$. Het zal blijken dat er een belangrijk onderscheid is tussen de gevallen a groter dan 1 en a tussen 0 en 1.

Voorbeeld 10.3.1 (Het geval $a > 1$: grafiek van de logaritmische functie $\log_2$)**.**

We nemen als voorbeeld $a = 2$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $\log_2 : x \mapsto \log_2(x)$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. Het ligt voor de hand om voor de x-waarden machten van 2 te kiezen, omdat daarvoor de 2-logaritme gemakkelijk te bepalen is.

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_2(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Dit levert voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:



Voorbeeld 10.3.2 (Het geval $0 < a < 1$: grafiek van de logaritmische functie $\log_{1/2}$)**.**

We nemen als voorbeeld $a = \frac{1}{2} = 0.5$. We schetsen de grafiek van de logaritmische functie $\log_{1/2}$:

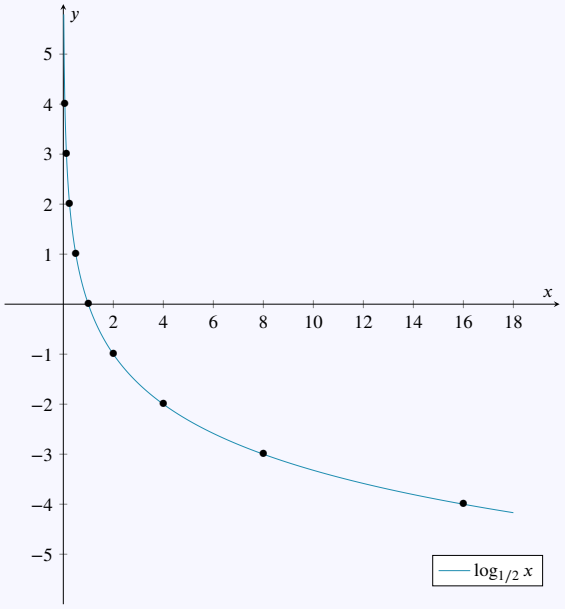
CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Logaritmische functies

$x \mapsto \log_{1/2}(x)$ met grondtal $\frac{1}{2}$ door een aantal punten van de grafiek te bepalen. We kunnen dezelfde tabel hergebruiken:

x	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_{1/2}(x)$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Dit levert opnieuw voldoende punten op om de grafiek betrouwbaar te schetsen:



Deze voorbeelden bestudeerden de specifieke grondtallen $a = 2$ en $a = 1/2$, maar ze vertonen een aantal eigenschappen die gelden voor *alle* logaritmische functies:

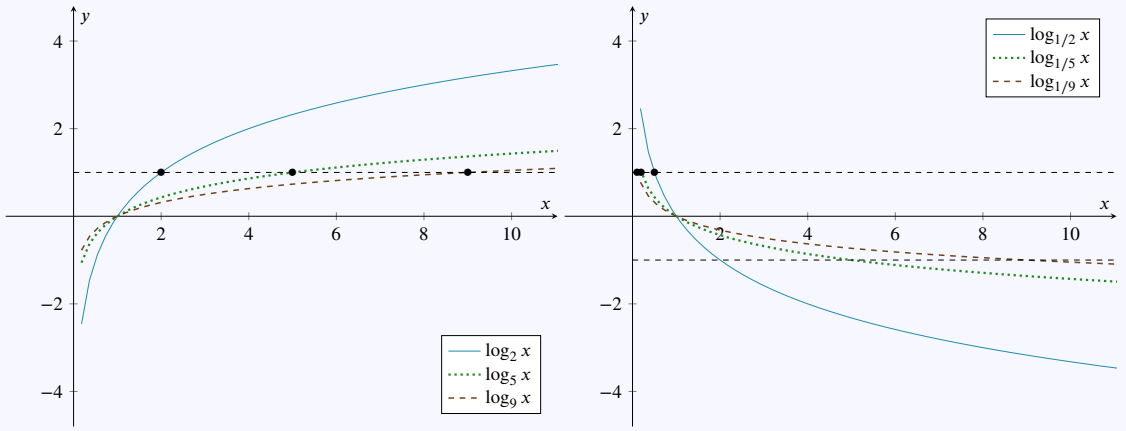
Eigenschap 10.3.1 (Logaritmische functies)**.**

- Als $a > 1$ dan is de functie $\log_a$ *strikt stijgend*: $x < y \iff \log_a(x) < \log_a(y)$
- Als $0 < a < 1$ dan is de functie $\log_a$ *strikt dalend*: $x < y \iff \log_a(x) > \log_a(y)$
- De functie $\log_a$ is enkel gedefinieerd voor $x > 0$, dus het domein van $\log_a$ is $\mathbb{R}_0^+$.
- De functiewaarden $\log_a(x)$ kunnen alle reële waarden aannemen, het beeld van $\log_a$ is dus $\mathbb{R}$.
- De grafiek van $\log_a$ snijdt de x-as steeds in het punt $(1, 0)$ (want $\log_a 1 = 0$)
- De grafiek van $\log_a$ snijdt de y-as niet ($\log_a$ is niet gedefinieerd in 0)
- De grafiek van $\log_a$ snijdt de rechte $y = 1$ in het punt $(a, 1)$ (want $\log_a(a) = 1$)
- De functies $\log_a$ en $\log_{1/a}$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de x-as.
- De functies $\log_a$ en $\exp_a$ zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de eerste bissectrice.

Voorbeeld 10.3.3.

CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Logaritmische functies



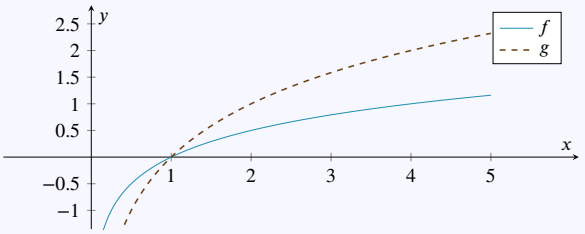
Opmerking 10.3.2.

- Als het grondtal a de waarde $e = 2.71\ldots$ heeft, dan schrijven we de functie als ln in plaats van $\log_e$.
- Het domein van $\log_a$ is $\mathbb{R}_0^+$ en het beeld is $\mathbb{R}$.
  Met de uitgebreidere notatie voor functies kunnen we dus ook schrijven
  $$\log_a : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_a(x)$$
- $\exp_a$ en $\log_a$ zijn inverse functies.

- We weten nu voor een gegeven *grondtal* a hoe de *grafiek* van een logaritmische functie $\log_a$ er uit ziet. Dat hangt erg af van de waarde van het grondtal a, namelijk of $0 < a < 1$ dan wel $a > 1$.
- Stel nu omgekeerd dat we de *grafiek* hebben van een logaritmische functie en dat we het grondtal willen kennen. Op basis van de vorm kunnen we onmiddellijk bepalen of het grondtal tussen 0 en 1 ligt dan wel groter is dan 1. Om de precieze waarde van a te vinden volstaat het te zoeken naar **de waarde van x die een functiewaarde 1 geeft:** immers, als $\log_a x = 1$, dan $x = a^1 = a$. We zoeken dus de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek met de horizontale rechte $y = 1$. Ook als de grafiek niet gedetailleerd genoeg is om de exacte waarde van a terug te vinden, blijft een goede schatting wel mogelijk op deze manier.

Voorbeeld 10.3.4 (Aflezen grondtal van grafiek)**.**

Hieronder worden de grafieken geschetst van de twee functies $x \mapsto \log_4(x)$ en $x \mapsto \log_2(x)$. We vragen ons af welke grafiek bij welke functie hoort.



Omdat beide grondtallen groter zijn dan 1, kunnen we beide grafieken niet onderscheiden op grond van hun vorm. We weten echter dat het grondtal terug te vinden is als de x-waarde waarvoor de functiewaarde gelijk is aan 1. We tekenen daarom de horizontale rechte $y = 1$ en kijken waar deze de

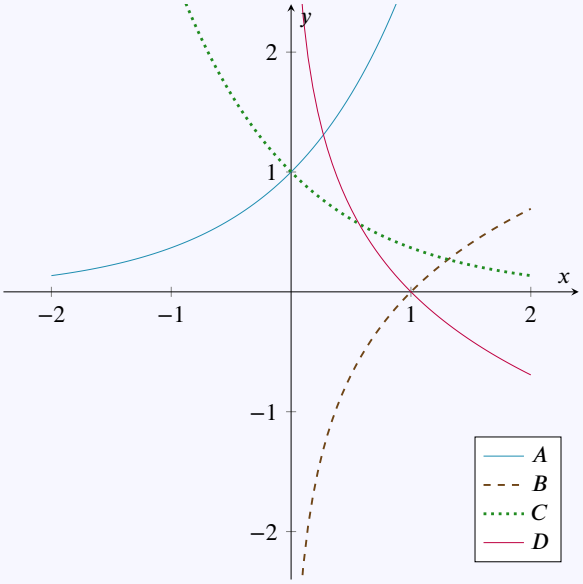
CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Logaritmische functies

twee grafieken snijdt. De x-coördinaat van het snijpunt komt overeen met het grondtal. Het blijkt dat f de grafiek is van $x \mapsto \log_4(x)$ en g de grafiek van $x \mapsto \log_2(x)$.

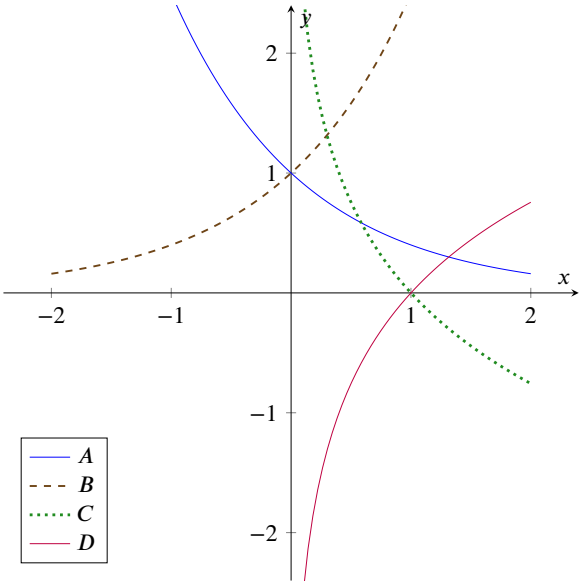
Voorbeeld 10.3.5 (Grafiek van $\ln x$)**.**

Welk van onderstaande grafieken is van de functie $x \mapsto \ln(x)$?



Deze vraag kunnen we beantwoorden louter op basis van de vorm van de grafieken. Omdat $x \mapsto \ln(x)$ een logaritmische functie is, is deze enkel gedefinieerd voor strikt positieve waarden van x. Omdat het grondtal $e > 1$, moet de grafiek stijgend zijn. Enkel grafiek B voldoet hieraan.

Oefening 10.3.1. Met welke grafieken komen volgende functies overeen ?



CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Logaritmische functies

1. $x \mapsto \left(\frac{2}{5}\right)^x$: A B C D

2. $x \mapsto \log_{2/5}(x)$: A B C D

3. $x \mapsto \log_{5/2}(x)$: A B C D

4. $x \mapsto \left(\frac{5}{2}\right)^x$: A B C D

Opmerking 10.3.3 (Eigenschappen logaritmische functies)**.**

Je kan soms extra eigenschappen van logaritmische functies terugvinden op basis van de rekenregels voor logaritmen. Zo kan je de op het eerste zicht tamelijk ingewikkelde functie $x \mapsto \log_4(2^x)$ herschrijven als

$$\log_4(2^x) = x \cdot \log_4(2) = x \cdot \log_4(4^{\frac{1}{2}}) = x/2.$$

en vaststellen dat $\log_4(2^x)$ gewoon de lineaire functie $x \mapsto \frac{1}{2}x$ is.

Oefening 10.3.2. Herschrijf volgende uitdrukkingen zonder exponentiële of logaritmische functies:

1. $4^{\log_2(x)} = \ldots\ldots$

2. $27^{\log_3(x)} = \ldots\ldots$

Voorbeeld 10.3.6 (Domein logaritmische functie)**.**

Bepaal het domein van de functie $x \mapsto \log_3\left(\frac{3}{4-x}\right)$. Bepaal dus alle mogelijke reële waarden van x waarvoor het functievoorschrift geldig is.

- De noemer van de breuk binnen de logaritme mag niet nul zijn: $4 - x \neq 0$ en dus $x \neq 4$.
- Een logaritme kan enkel berekend worden voor een strikt positief getal. Dus moet $\frac{3}{4-x} > 0$. Omdat de teller van deze breuk strikt positief is, moet ook de noemer dat zijn: $4 - x > 0$ of $x < 4$.

Alleen als aan deze twee voorwaarden voldaan is, kan de functiewaarde bepaald worden.

Het domein van deze functie is dus het (oneindige) interval $]-\infty, 4[$.

Oefening 10.3.3. Bepaal het domein van de functie $y = \ln(\sqrt{2x} - 4)$: $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Exponentiële vergelijkingen

Een **exponentiële vergelijking** is een vergelijking waarbij de onbekende minstens één keer voorkomt in de *exponent* van een uitdrukking.
Voorbeelden van dergelijke vergelijkingen zijn $3^x - 81 = 0$, $3^x = 81x$ en $2^x = 4 \cdot 3^{x-1}$.

Niet alle exponentiële vergelijkingen kunnen exact opgelost worden. Voor de oplossing van $3^x = 81x$ bestaat bijvoorbeeld geen exacte formule. Als een exponentiële vergelijking *wel* exact kan worden opgelost, wordt ergens in de berekening de *logaritme* gebruikt om *de onbekende uit de exponent te verdrijven*. We illustreren enkele oplossingsmethoden aan de hand van onderstaande voorbeelden.

Voorbeeld 10.4.1. Los op naar x: $3^x - 81 = 0$.

In deze vergelijking komt de onbekende x slechts één keer voor, en wel als exponent. Dergelijke vergelijkingen zijn eenvoudig op te lossen door de macht waarbij x in de exponent voorkomt te isoleren en dan een gepaste logaritme te nemen:

$$\begin{aligned} 3^x - 81 &= 0 && \\ 3^x &= 81 && \text{(breng naar het andere lid)} \\ \log_3(3^x) &= \log_3 81 && \text{(neem links en rechts } \log_3\text{)} \\ x &= \log_3 3^4 = 4 && \text{(want } \log_3 3^x = x, \text{ en } 81 = 9^2 = 3^4\text{)} \end{aligned}$$

Omdat x voorkomt als exponent met grondtal 3 werd hier de logaritme met grondtal 3 toegepast op linker- en rechterlid. Maar omdat *elke* logaritme exponenten voorop brengt, kan je het grondtal van de logaritme eigenlijk kiezen. Hieronder is dezelfde vergelijking opgelost met de logaritme log met grondtal 10 en met de natuurlijk logaritme ln:

$$\begin{aligned} 3^x &= 81 \\ \log(3^x) &= \log 81 \\ x \cdot \log 3 &= \log 81 \\ x &= \frac{\log 81}{\log 3} \end{aligned} \qquad \text{of ook} \qquad \begin{aligned} 3^x &= 81 \\ \ln(3^x) &= \ln 81 \\ x \cdot \ln 3 &= \ln 81 \\ x &= \frac{\ln 81}{\ln 3} \end{aligned}$$

Het resultaat ziet er telkens anders uit, maar het is wel degelijk steeds dezelfde oplossing $x = 4$, want uit de formule voor verandering van grondtal bij logaritmen volgt dat

$$\frac{\ln 81}{\ln 3} = \frac{\log 81}{\log 3} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4.$$

Voorbeeld 10.4.2. Los op naar x: $3^x = 81x$.

In deze vergelijking komt de onbekende x twee keer voor: eenmaal in de exponent van een macht met grondtal 3 in het linkerlid en eenmaal als lineaire term in het rechterlid. Dergelijke vergelijking is in het algemeen niet exact op te lossen. Uit het vorige voorbeeld blijkt dat de onbekende x uit de exponent kan gehaald worden door een logaritme toe te passen. Laat ons dat doen in dit geval:

$$\begin{aligned} 3^x &= 81x && \\ \log_3(3^x) &= \log_3(81x) && \text{(neem links en rechts } \log_3\text{)} \\ x &= \log_3 81 + \log_3 x && (\log_3 3^x = x, \log ab = \log a + \log b) \\ x &= 4 + \log_3 x && (81 = 3^4) \end{aligned}$$

De onbekende is nu uit de exponent verdwenen, maar er is een nieuwe complicatie: de onbekende komt nu voor binnen de logaritme. Je zou de onbekende x uit de logaritme kunnen krijgen door een exponentiële functie te gebruiken. Maar dan wordt de x in het linkerlid terug een exponent. Een exacte oplossing is op deze manier niet mogelijk. Er bestaan wel technieken om de vergelijking *benaderend* op te lossen, maar deze behoren niet tot de leerstof van deze cursus. Men kan aantonen

CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Exponentiële vergelijkingen

dat er een unieke oplossing is: $x \approx 0.0125\ldots$

Voorbeeld 10.4.3. Los op naar x: $2^x = 4 \cdot 3^{x-1}$.

In deze vergelijking komt de onbekende twee keer voor, telkens in de exponent van een macht, maar voor twee verschillende grondtallen. Dergelijk vergelijking kan op twee manieren worden opgelost.

De eerste oplossingsmethode herschrijft de vergelijking zodanig dat er maar één macht meer voorkomt. We kunnen dan, zoals in het eerste voorbeeld, eenvoudigweg de logaritme nemen om de vergelijking op te lossen.

$$\begin{aligned} 2^x &= 4 \cdot 3^{x-1} = 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = \frac{4}{3} \cdot 3^x && \text{(rechterlid herschrijven)} \\ \frac{2^x}{3^x} &= \frac{4}{3} && \text{(breng onbekenden naar linkerlid)} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x &= \frac{4}{3} && \left(\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x\right) \\ x &= \log_{2/3}\left(\frac{4}{3}\right) \approx -0.7095\ldots && \text{(bereken met een rekentoestel)} \end{aligned}$$

Een tweede oplossingsmethode bestaat erin de logaritme te nemen van linker- en rechterlid met de bedoeling van de onbekende x uit de exponenten te halen. Uit het eerste voorbeeld weten we dat het grondtal van de logaritme geen belang heeft. We gebruiken hier de logaritme met grondtal 10. We krijgen in dit geval een *lineaire* vergelijking in x die we zonder problemen kunnen oplossen.

$$\begin{aligned} 2^x &= 4 \cdot 3^{x-1} \\ \log(2^x) &= \log(4 \cdot 3^{x-1}) = \log 4 + \log(3^{x-1}) \\ x \cdot \log 2 &= \log 4 + (x-1) \cdot \log 3 = x \cdot \log 3 + (\log 4 - \log 3) \\ x \cdot \log 2 - x \cdot \log 3 &= \log 4 - \log 3 \\ x \cdot (\log 2 - \log 3) &= \log 4 - \log 3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\log 4 - \log 3}{\log 2 - \log 3}.$$

Opnieuw ziet de gevonden oplossing er helemaal anders uit dan wat we met de eerste oplossingsmethode hebben gevonden. Met behulp van de rekenregels voor logaritmen kan je echter zien dat beide oplossingen gelijk zijn.

Oefening 10.4.1. Los op naar x:

1. $3 \cdot 2^{x/2} - 7 = 14$. Oplossing: $x \approx \ldots\ldots$

2. $2 \cdot 0.99^x = 0.5 \cdot 1.05^x$. Oplossing: $x \approx \ldots\ldots$

3. $2^{3x-5} = 5^x$. Oplossing: $x \approx \ldots\ldots$

Oefening 10.4.2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ $\quad x = \ldots\ldots$

2. $e^x - 4e^{-x} = 3$ $\quad x = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

10.5 Logaritmische vergelijkingen

We noemen een vergelijking een *logaritmische vergelijking* als de onbekende x minstens één keer voorkomt binnen een logaritmische functie.

Voorbeelden van dergelijke vergelijkingen zijn: $\log_3(x) = -2$, $\log_3(x) = -2x$ en $\log_2(x) = 5 + \log_2(1/x)$.

Net zoals bij exponentiële vergelijkingen kunnen logaritmische vergelijkingen niet altijd exact worden opgelost. Voor de oplossing van $\log_3(x) = -2x$ bestaat bijvoorbeeld geen exacte formule. Als een exacte oplossing wel mogelijk is, moet de onbekende uit de logaritme gehaald worden door gebruik te maken van een exponentiële functie of van de definitie van de logaritme.

Bij het oplossen van logaritmische vergelijkingen begin je met de *bestaansvoorwaarden* te noteren: de uitdrukking binnen de logaritme moet immers steeds strikt positief zijn en het grondtal van de logaritme is steeds een strikt positief getal, verschillend van 1. We illustreren enkele oplossingsmethoden aan de hand van onderstaande voorbeelden.

Voorbeeld 10.5.1. Los op naar x: $\log_3(x) = -2$.

Bestaansvoorwaarde: $x > 0$

Om de vergelijking $\log_3(x) = -2$ op te lossen willen we de onbekende x uit de logaritme halen. Dat kan op twee manieren:

- met behulp van de definitie van de logaritme:

  In woorden: '$\log_3(x)$ = de exponent waartoe men het grondtal 3 moet verheffen om x te bekomen'. De vergelijking zegt dus dat de exponent waartoe men het grondtal 3 moet verheffen om x te bekomen is gelijk aan -2, dus $x = 3^{-2} = 1/9$.

  In symbolen: $\log_3(x) = -2 \iff 3^{-2} = x$

  Hiermee is de logaritmische vergelijking opgelost.

- met behulp van een gepaste exponentiële functie: We passen de functie $f(x) = 3^x$ toe op beide leden van de gelijkheid en gebruiken de eigenschap $a^{\log_a x} = x$, dan krijgen we

$$3^{\log_3(x)} = 3^{-2} \iff x = 1/9.$$

Voorbeeld 10.5.2. Los op naar x: $\log_3(x) = -2x$

Bestaansvoorwaarde: $x > 0$

De vergelijking $\log_3(x) = -2x$ is niet exact op te lossen. We kunnen ze met behulp van de definitie van de logaritme wel herformuleren als $x = 3^{-2x}$. We hebben daarmee de onbekende x uit de logaritme gehaald, maar nu komt ze in het rechterlid voor in de exponent van een macht. We hebben eerder al gezien dat we de nieuwe vergelijking niet kunnen oplossen. Een benaderende oplossing is wel mogelijk: $x \approx 0.4080$ is de unieke oplossing.

Voorbeeld 10.5.3. Los op naar x: $\log_2(x) = 5 + \log_2(1/x)$

Bestaansvoorwaarde: $x > 0$ en $\dfrac{1}{x} > 0$

In deze vergelijking komt de onbekende x tweemaal voor binnen de logaritme, met hetzelfde grondtal 2. Dit nodigt uit om eerst gebruik te maken van eigenschappen van logaritmische functies vooraleer we op beide leden de exponentiële functie $f(x) = 2^x$ toepassen.

$$\log_2(x) = 5 + \log_2(1/x) \Leftrightarrow \log_2(x) = 5 + \log_2\left(x^{-1}\right) \Leftrightarrow \log_2(x) = 5 - \log_2(x)$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot \log_2(x) = 5 \Leftrightarrow \log_2(x) = 5/2 \Leftrightarrow x = 2^{5/2} = 4\sqrt{2}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.5 Logaritmische vergelijkingen

Oefening 10.5.1. Los op naar x: $\dfrac{50}{\log(x)} = 100$

CC BY-NC-SA 4.0

10.5.A Toepassingen exponentiële en logaritmische functies

10.5.A.1 Niveau 2

Oefening 10.5.2. Jodium 131 heeft een halveringstijd van 8 dagen d.w.z. dat de hoeveelheid radioactieve massa jodium 131 na 8 dagen slechts de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid bedraagt.

1. De groeifactor per tijdseenheid van een dag = … …

2. Geef het functievoorschrift dat deze groeifunctie beschrijft in de vorm $f(t) = b_0 \cdot g^t$, waarbij t gemeten wordt in dagen en we de beginwaarde van de radioactieve massa noteren we met b_0.

$f(t) =$ … …

3. Geef het functievoorschrift dat deze groeifunctie beschrijft in de vorm $f(t) = b_0 \cdot e^{-\lambda t}$ met $\lambda > 0$, waarbij t gemeten wordt in dagen en we de beginwaarde van de radioactieve massa noteren we met b_0.

$f(t) =$ … …

4. Wanneer is de hoeveelheid jodium 131 gedaald tot $1/20$ van de oorspronkelijke hoeveelheid?

Na … … dagen.

Oefening 10.5.3. Het CO_2 dat in de atmosfeer voorkomt, bevat het stabiele ^{12}C en de radioactieve isotoop ^{14}C die een halveringstijd van 5730 jaar heeft. Wetenschappers nemen aan dat de verhouding van de hoeveelheden ^{14}C en ^{12}C in de CO_2 van de atmosfeer nagenoeg constant is. Noem die verhouding R_0. Levende planten absorberen CO_2 uit de lucht en daarom is de verhouding tussen ^{14}C en ^{12}C in een levende plant hetzelfde als in de lucht, nl. R_0. Wanneer een plant afsterft, stopt de absorptie van CO_2. Het stabiele ^{12}C blijft in de plant, terwijl het radioactieve ^{14}C exponentieel vervalt.

1. Geef het functievoorschrift van de grootheid $R(t)$ die de verhouding is van de hoeveelheid ^{14}C t.o.v. ^{12}C in de plantenresten t jaar na het afsterven van de plant.

$R(t) =$ … …

2. Een archeoloog vindt een fossiel waarvan de verhouding van de hoeveelheid ^{14}C t.o.v. ^{12}C 1/5 is van die in de atmosfeer. Hoe oud is dat fossiel?

… … jaar.

Oefening 10.5.4. Een geluid, geproduceerd met een intensiteit van I watt/m^2, levert volgend geluidsniveau

$$\text{dB-niveau} = 10 \log_{10}(10^{12} I) \text{ dB}.$$

1. Toon aan dat als je de intensiteit van je stereo verdubbelt, het geluidsniveau slechts met ongeveer 3 dB verhoogt.

2. Met welke factor moet je de intensiteit vermenigvuldigen opdat het geluidsniveau met 10 dB vermeerdert.

I moet met een factor … … vermenigvuldigd worden.

CC BY-NC-SA 4.0

10.5.A Toepassingen exponentiële en logaritmische functies

10.5.A.2 Niveau 3

Oefening 10.5.5. Je maakt een avontuurlijke reis door Afrika, in een zone met hoog risico voor malaria-besmetting en slikt daarom regelmatig pilletjes met antistoffen. Op een dag word je echter bestolen; niet alleen ben je al je geld kwijt, maar bovendien ook je hele voorraad pilletjes. Toevallig had je nog één dosis (500 mg) antistoffen in je broekzak zitten. Je hebt op dat ogenblik, als gevolg van wekenlange inname, 1000 mg antistoffen in je bloed. Laten we veronderstellen dat je pas gevaar loopt besmet te raken wanneer de hoeveelheid antistoffen in het bloed kleiner wordt dan 750 mg. Voorlopig is er dus niets aan de hand. Je lichaam verwijdert deze vreemde stoffen echter geleidelijk — met een halveringstijd van 3 weken — dus vroeg of laat onstaat er een reële kans op besmetting. Beschouw de volgende twee mogelijkheden:

(a) Je neemt onmiddellijk die laatste dosis in.

1. De totale hoeveelheid antistoffen komt daarmee op ..... mg.

2. Hiermee kan je nog gedurende ..... dagen boven de kritische drempel van 750 mg kan blijven.

(b) Je stelt de inname van die laatste dosis nog even uit: je wacht namelijk tot je de kritische waarde een eerste maal bereikt, en slikt pas dan je laatste pilletje.

3. Je bereikt de drempel van 750 mg na ongeveer ..... dagen.

4. Daarna kan je opnieuw een tijdje verder, nl. nog ..... dagen, vooraleer je antistof-peil onherroepelijk onder de 750 mg duikt.

Wat is het verstandigst, onmiddellijke of uitgestelde inname?

CC BY-NC-SA 4.0

10.5.B Oefeningen ongelijkheden met exponentiële en logaritmische functies

In deze reeks oefeningen moet je je kennis over het rekenen met ongelijkheden combineren met je kennis over de exponentiële en logaritmische functies.

10.5.B.3 Niveau 2

Oefening 10.5.6. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid. Vergeet niet na te gaan voor welke $x \in \mathbb{R}$ de logaritmische functies gedefinieerd zijn.

1. $\ln(x+5) > 7 \iff \ldots\ldots$

2. $\log(x^2-3) > 2 \iff \ldots\ldots$

3. $\log_{0.5}(x-1) < 1 \iff \ldots\ldots$

10.5.B.4 Niveau 3

Oefening 10.5.7. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid. Vergeet niet na te gaan voor welke $x \in \mathbb{R}$ de logaritmische functies gedefinieerd zijn.

1. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{6}{7}\right)^3 > 0 \iff \ldots\ldots$

2. $2 \leqslant \frac{\log x - 1}{\log x} \iff \ldots\ldots$

3. $2 \geqslant \frac{\log(x+1)}{\log x} \iff \ldots\ldots$

4. $e^{\sqrt{x}\ln(1/2)} < e^{5\ln(1/2)} \iff \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

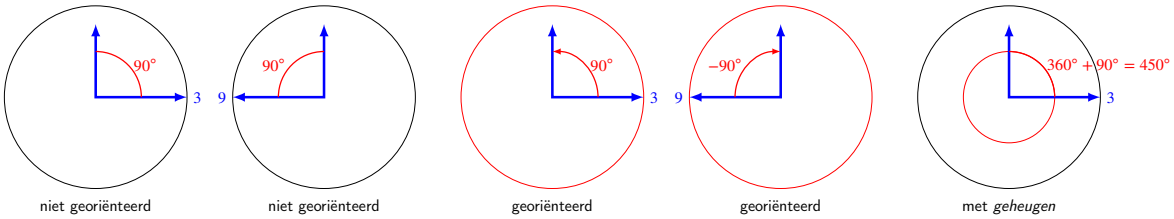
Zomercursus Wiskunde

Module 11
Goniometrie

(Versie 2026/11/23H.2)

11.1 Definitie van een hoek

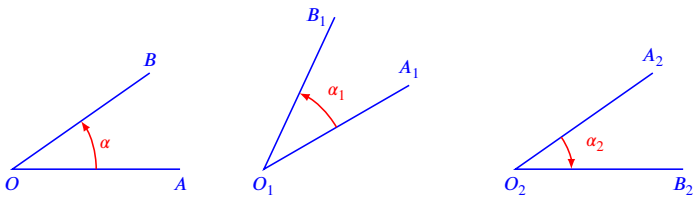
Afhankelijk van de context wordt het woord *hoek* gebruikt voor enkele *verschillende begrippen*. Een driehoek heeft bijvoorbeeld drie *hoeken*, of als het kwart over twaalf is vormen de wijzers van een analoge klok een *hoek* iets kleiner dan 90 graden, net zoals wanneer het bijvoorbeeld kwart voor twaalf is. Soms is het echter nuttig om een verschil te maken tussen die twee hoeken. In andere omstandigheden is het dan weer belangrijk ook te meten *hoe dikwijls* het ene been rond het andere is gedraaid en is er dus een belangrijk verschil tussen een hoek van 90 graden dan wel 360+90 graden of 720+90 graden.



In de goniometrie bestuderen we typisch zogenaamde *georiënteerde hoeken* waarbij we de twee benen van de hoek onderscheiden en de hoek gaat van het eerste been naar het tweede been, zoals aangeduid in de rode cirkels. We kijken daarbij ook enkel naar het *eindresultaat* en houden *geen rekening* met het aantal keer dat het ene been mogelijk rond het andere been is gedraaid.

Definitie 11.1.1. Een **georiënteerde hoek** is een meetkundige figuur bestaande uit een **hoekpunt** O met een **eerste been** of **beginbeen** OA en een **tweede been** of **eindbeen** OB. Twee dergelijke figuren bepalen dezelfde hoek als ze door verschuiven en verdraaien op elkaar kunnen worden gelegd.

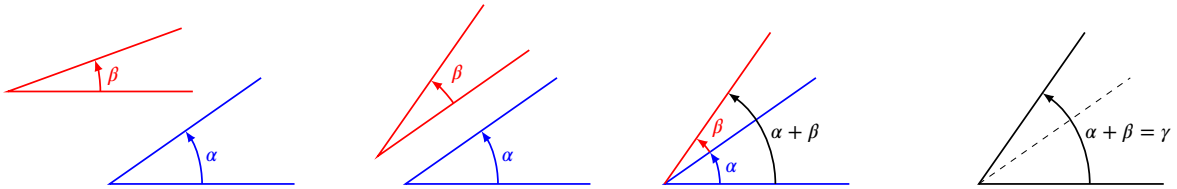
We gebruiken voor een georiënteerde hoek de *notatie* $\measuredangle AOB$, waarbij het hoekpunt dus in het midden staat. Op een tekening duiden we dergelijke hoek dikwijls aan met een boogje-met-een-pijltje-van-het-beginbeen-naar-het-eindbeen. Als *naam* kiezen we traditioneel voor Griekse letters uit het begin van het alfabet: α (alfa), β (beta) en γ (gamma).



Hoek $\alpha = \measuredangle AOB$ Hoek $\alpha_1 = \measuredangle A_1O_1B_1$ Hoek $\alpha_2 = \measuredangle A_2O_2B_2$

De *georiënteerde hoeken* $\alpha = \measuredangle AOB$ en $\alpha_1 = \measuredangle A_1O_1B_1$ zijn dus *aan elkaar gelijk* omdat ze via *verschuiven* en *draaien* op elkaar kunnen gelegd worden. De hoeken $\alpha = \measuredangle AOB$ en $\alpha_2 = \measuredangle A_2O_2B_2$ zijn echter niet aan elkaar gelijk, want om $\alpha = \measuredangle AOB$ op $\alpha_2 = \measuredangle A_2O_2B_2$ te leggen moeten we ook *spiegelen* en dat is voor georiënteerde hoeken niet toegelaten. Ook $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle BOA$ zijn dus onderling verschillende hoeken.

Je kan met georiënteerde hoeken *rekenen*: je telt twee hoeken α en β bij elkaar op door ze 'achter elkaar' te leggen, dus je legt het beginbeen van β op het eindbeen van α. Dat levert een nieuwe georiënteerde hoek γ op die we de *som* van α en β noemen. We noteren $\alpha + \beta = \gamma$.



CC BY-NC-SA 4.0

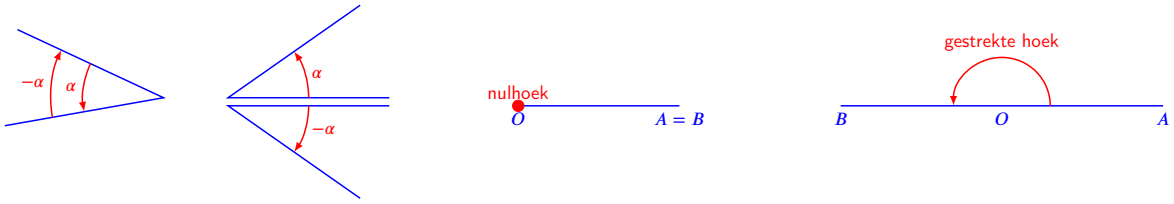
11.1 Definitie van een hoek

Als het eindbeen samenvalt met het beginbeen is er geen echte hoek maar enkel een halfrechte en spreken we van de **nulhoek** $\measuredangle AOA$. Het is onmiddellijk duidelijk dat de nulhoek optellen bij een hoek de hoek niet verandert – net zoals nul optellen bij een getal dat getal niet verandert.

We noemen de georiënteerde hoek $\measuredangle BOA$ de **tegengestelde hoek** van $\measuredangle AOB$ en noteren die met een minteken: als $\alpha = \measuredangle AOB$, dan is $-\alpha = \measuredangle BOA$.

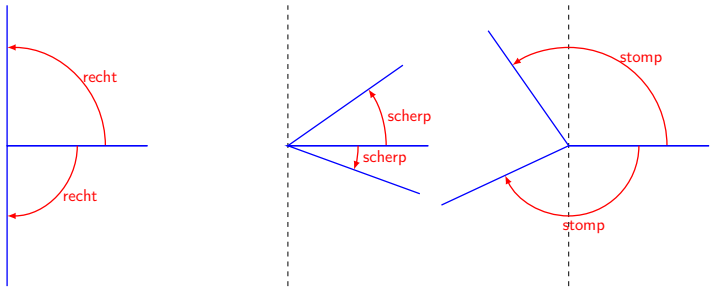
We stellen vast dat de som van twee tegengestelde hoeken de nulhoek is en dat de tegengestelde hoek $-\alpha$ bekomen wordt door α over zijn eerste been te spiegelen.

De **gestrekte hoek** is de hoek waarbij het eindbeen in het verlengde van het beginbeen ligt: dergelijke hoek is onzichtbaar, want het hoekpunt is gewoon een punt O op een rechte AB.



Een **rechte hoek** is de helft van een gestrekte hoek, dus een hoek α zodat $\alpha + \alpha$ een gestrekte hoek vormt.

Een hoek is **scherp** als hij kleiner is dan een rechte hoek en **stomp** als hij groter is.



Opmerking 11.1.1. Merk op dat we voorlopig niet gesproken hebben over het *meten* van hoeken. Alle regels over rekenen en vergelijken van hoeken zijn voorlopig zuiver meetkundig, er komen geen getallen voor. In de praktijk is het natuurlijk handig hoeken te kunnen *meten*, en vervolgens eerder te rekenen met de maatgetallen van de hoeken dan met de hoeken zelf. Dat wordt verder uitgelegd.

CC BY-NC-SA 4.0

11.2 Goniometrische cirkel

Hoeken worden traditioneel *gemeten in (boog)graden*, waarbij een rechte hoek $90°$ is, een gestrekte hoek $180°$ en de nulhoek $0°$ of $360°$. Het maatgetal van een georiënteerde hoek is daarbij slechts bepaald 'op $360°$ na': per afspraak zijn $20°$, $20° + 360° = 380°$, $20° + 720° = 740°$ en $20° - 360° = -340°$ allemaal maatgetallen van *dezelfde georiënteerde hoek*. We schrijven dikwijls $\alpha + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$ voor *al* de maatgetallen van hoek α.

De keuze voor (boog)graden, die onderverdeeld zijn in (boog)minuten en (boog)seconden is historisch gemotiveerd, en gebaseerd op een zestigtallig talstelsel. Je kan het vergelijken met het meten van lengtes in mijl, el of voet. Er is een meer natuurlijke manier om hoeken te meten, die eigenlijk zelfs geen willekeurige keuze van een nieuwe eenheid vraagt. We zullen hiervoor een hoek bekijken op de goniometrische cirkel.

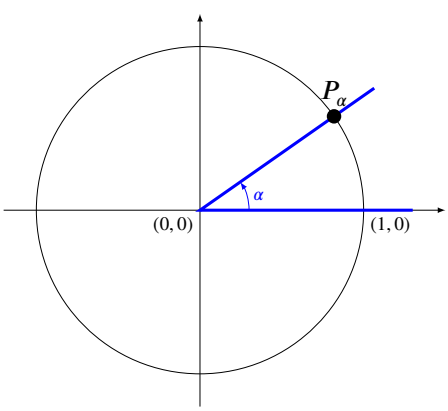
Door verschuiven en draaien (maar niet spiegelen) kan het hoekpunt van een georiënteerde hoek steeds in de oorsprong van het vlak gelegd worden en zijn eerste been op de positieve x-as. Dat leidt tot volgende definities:

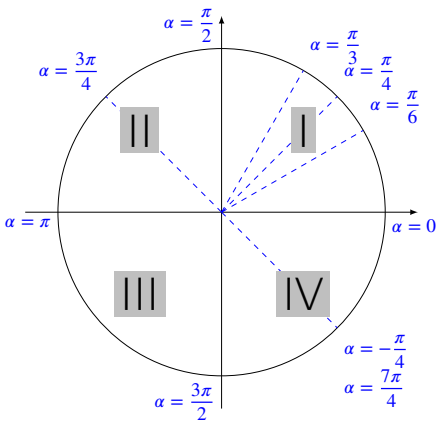
Definitie 11.2.1.

De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong.

Met elke georiënteerde hoek α komt een uniek **beeldpunt** P_α van de goniometrische cirkel overeen door het hoekpunt van α te verschuiven naar de oorsprong, het eerste been op de positieve x-as te leggen en het unieke snijpunt van het tweede been met de goniometrische cirkel P_α te noemen. Omgekeerd bepaalt elk punt P_α van de goniometrische cirkel een georiënteerde hoek α.

De goniometrische cirkel wordt verdeeld in vier **kwadranten**, die vanaf rechtsboven tegen de klok in genummerd worden met Romeinse cijfers I, II, III, IV zoals op de figuur hieronder.





Hoeken komen dus overeen met *punten van de goniometrische cirkel* en in de praktijk wordt meestal geen onderscheid gemaakt tussen het punt P_α en de hoek α.

Omdat de omtrek van een cirkel met straal één gelijk is aan 2π, ligt het voor de hand om een hoek die éénmaal ronddraait maatgetal 2π te geven; een 'halve draai', dus een gestrekte hoek heeft dan maat π, en de helft daarvan, dus een rechte hoek, heeft maatgetal $\pi/2$. Deze manier van hoeken meten noemt men 'meten in radialen'. Op bovenstaande figuur zijn enkele hoeken gemeten in radialen aangeduid.

Het blijkt wiskundig veel handiger hoeken te meten in *radialen* dan in *graden*. De formules voor afgeleiden van sinus en cosinus werken bijvoorbeeld enkel als de hoeken worden gemeten in radialen.

Het maatgetal van een georiënteerde hoek is slechts bepaald 'op 2π na', dus per afspraak zijn $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6}$ en $\frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{-11\pi}{6}$ allemaal maatgetallen van dezelfde hoek.
We schrijven dikwijls $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ voor *al* de maatgetallen van een hoek.

CC BY-NC-SA 4.0

11.2 Goniometrische cirkel

Als symbool voor radialen wordt **rad** gebruikt, maar het wordt meestal niet geschreven. Men schrijft dus meestal *een hoek met grootte π* in plaats van *een hoek met grootte π rad*.

Opmerking 11.2.1.

- De **lengte van de cirkelboog** tussen de twee benen van een hoek is gelijk aan het maatgetal van die hoek uitgedrukt in radialen, wanneer we dit maatgetal kiezen tussen 0 en 2π. Dit verklaart waarom men soms het begrip *booglengte* gebruikt voor de grootte van een hoek.
- Het verband tussen een hoek gemeten in graden en radialen wordt gegeven door $360° = 2\pi$, en dus geldt ook $90° = \frac{\pi}{2}$ en $180° = \pi$. Voor enkele gekende hoeken geldt dus $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{3\pi}{4} = 135°$, $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{3\pi}{2} = 270°$, ... Merk op dat de grootte in radialen erg dikwijls wordt uitgedrukt als een veelvoud van π.
- Een gestrekte hoek van $180°$ meet π radialen, en dus komt één graad overeen met $\frac{\pi}{180} \approx 0.017\ldots$ rad. Omgekeerd komt 1 rad overeen met ongeveer $\frac{180°}{\pi} \approx 57,\ldots°$.
- Zowel het maatgetal van een hoek als de hoek zelf worden meestal genoteerd met Griekse letters. We spreken dus zowel van 'de hoek α' (waarbij α een letter is, namelijk de naam van de hoek) als 'de hoek met grootte α' (waar α dan staat voor een getal, namelijk het maatgetal van de hoek). Het maatgetal is altijd in radialen uitgedrukt, tenzij er expliciet staat $\alpha°$. De dubbelzinnigheid tussen een 'hoek' en 'de grootte van een hoek' is gelukkig compatibel met de optelling van hoeken: de grootte van de som van twee hoeken is de som van de groottes.
- Het symbool ° kan begrepen worden als een afkorting voor 'maal $\frac{2\pi}{360}$', waardoor dus graden automatisch worden omgezet naar radialen: $7° = 7 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{14\pi}{360} = \frac{7\pi}{180}$. De breuk $\frac{2\pi}{360}$ moet je daarbij niet echt onthouden, want een hoek van $360°$ moet worden omgezet naar 2π, en daarvoor moet je natuurlijk vermenigvuldigen met $\frac{2\pi}{360}$.

Voorbeeld 11.2.1 (Omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd)**.**

Je kan de omzetting van graden naar radialen maken met behulp van *de regel van drie*. Je vertrekt van het feit dat $360°$ gelijk is aan 2π radialen, berekent dan hoeveel radialen één graad is, en daarna hoeveel radialen bijvoorbeeld 7 graden zijn. Dezelfde redenering werkt voor de omrekening van radialen naar graden.

Graden	Radialen
$360°$	2π
$:2$	$:2$
$180°$	π

Graden	Radialen
$360°$	2π
$:360$	$:360$
$1°$	$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$
$\times 7$	$\times 7$
$7°$	$\frac{7\pi}{180}$

Graden	Radialen
$360°$	2π
$:2\pi$	$:2\pi$
$\frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$	1
$\times 7$	$\times 7$
$\frac{7\cdot 180°}{\pi}$	7

Een hoek van $180°$ meet π radialen, $7°$ is gelijk aan $\frac{7\pi}{180}$ radialen en 7 radialen is gelijk aan $\frac{7\cdot 180°}{\pi}$.

CC BY-NC-SA 4.0

11.3 Goniometrische getallen

Door een georiënteerde hoek op de goniometrische cirkel te plaatsen bekomen we een punt op die cirkel, en dergelijk punt heeft x en y coördinaten. Deze coördinaten zijn per definitie de cosinus en de sinus van die hoek. We zullen verder zien dat wegens de stelling van Pythagoras deze definitie overeenkomt met de mogelijk meer vertrouwde definities met aanliggende en overstaande zijden in een driehoek.

Definitie 11.3.1.

Als P_α het punt is op de goniometrische cirkel dat hoort bij een hoek α, dan is

de **cosinus** van de hoek α per definitie de x-coördinaat van het punt P_α, en

de **sinus** van de hoek α per definitie de y-coördinaat van het punt P_α:

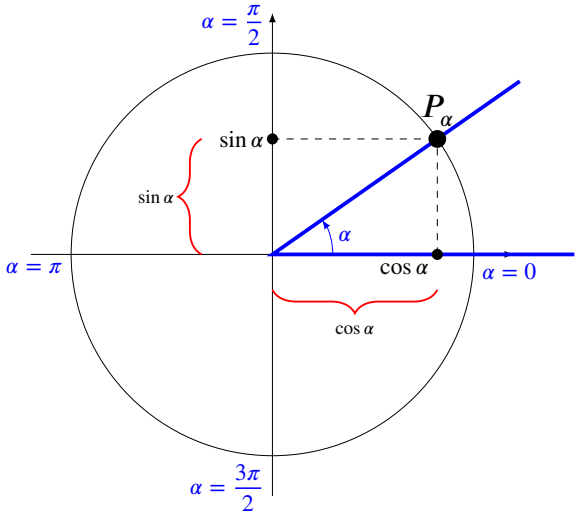
$$P_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Per definitie is ook

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{(tangens)} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad \text{(secans)}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad \text{(cotangens)} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad \text{(cosecans)}$$

We noemen de $\sin, \cos, \tan, \cot, \sec, \csc$ de **goniometrische getallen** van een hoek.



Oefening 11.3.1. Lees volgende waarden af op de goniometrische cirkel:

1. $\sin 2\pi = \ldots\ldots$ $\cos 2\pi = \ldots\ldots$
2. $\sin\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$
3. $\sin\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$
4. $\cos\pi = \ldots\ldots$ $\sin\pi = \ldots\ldots$
5. $\cos(-\pi) = \ldots\ldots$ $\sin(-\pi) = \ldots\ldots$

De vergelijking van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ leidt onmiddellijk tot de hoofdformule van de goniometrie omdat het punt P_α op de goniometrische cirkel coördinaten $(x, y) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ heeft:

CC BY-NC-SA 4.0

11.3 Goniometrische getallen

Eigenschap 11.3.1 (Hoofdformule van de goniometrie)**.** Voor elke hoek α geldt:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad \text{(hoofdformule goniometrie)}$$

Hieruit volgt onmiddellijk ook dat

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \cos^2\alpha\text{)}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{(deel de hoofdformule door } \sin^2\alpha\text{)}$$

Opmerking 11.3.1.

Let op de notatie voor machten: $\cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2 = \cos^2(\alpha) \neq \cos(\alpha^2) = \cos\alpha^2$.

Merk ook op dat in het algemeen $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$ en $\cos 2\alpha \neq 2\cos\alpha$.

Inderdaad, $\cos(\alpha+\beta) \stackrel{?}{=} \cos\alpha + \cos\beta$ werkt al niet voor bijvoorbeeld $\beta = 0$:

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha+0) \neq \cos\alpha + \cos 0 = \cos\alpha + 1$$

en $\cos 2\alpha \stackrel{?}{=} 2\cos\alpha$ werkt niet voor bijvoorbeeld $\alpha = 0$

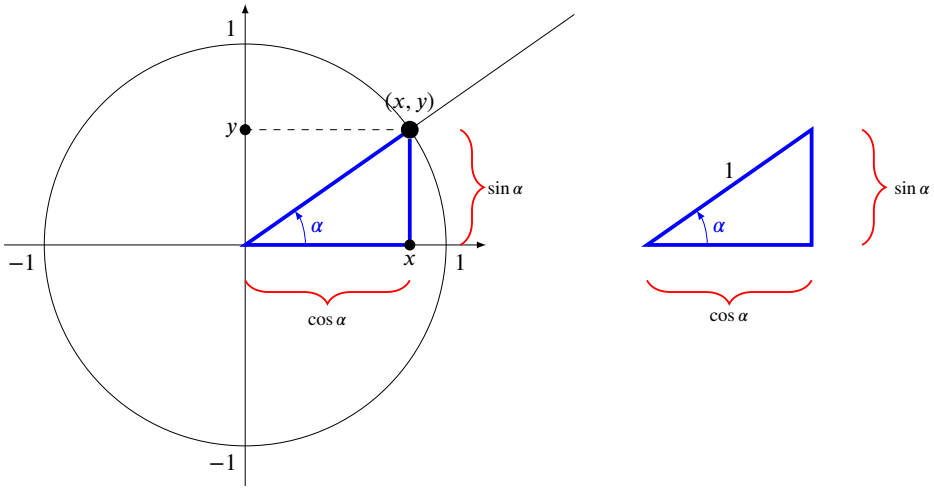
$$\cos(2\cdot 0) = \cos 0 = 1 \text{ maar } 2\cdot\cos 0 = 2\cdot 1 = 2$$

Gelijkaardige problemen doen zich voor bij sinus, tangens, secans en cosecans. Er bestaat een hele collectie formules om toch de goniometrische getallen van sommen te berekenen.

11.3.1 Rechthoekige driehoeken

Voor *scherpe hoeken* kunnen we de sinus en cosinus ook bekijken in een **rechthoekige driehoek**. Omdat het punt $P_\alpha = (x, y)$ op de goniometrische cirkel ligt, heeft de schuine zijde van de rechthoekige driehoek op onderstaande figuur lengte 1. De lengte van de *aanliggende zijde* van hoek α is gelijk aan $\cos\alpha$, de lengte van de *overstaande zijde* is $\sin\alpha$.

Merk op dat je door toepassing van de stelling van Pythagoras in deze rechthoekige driehoek ook de hoofdformule van de goniometrie bekomt.

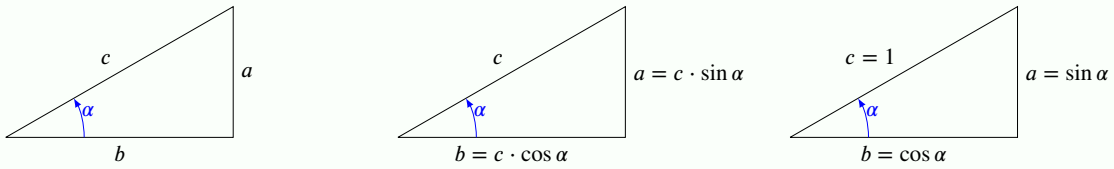


De volgende eigenschap veralgemeent dit voor rechthoekige driehoeken waarvan de schuine zijde niet

11.3 Goniometrische getallen

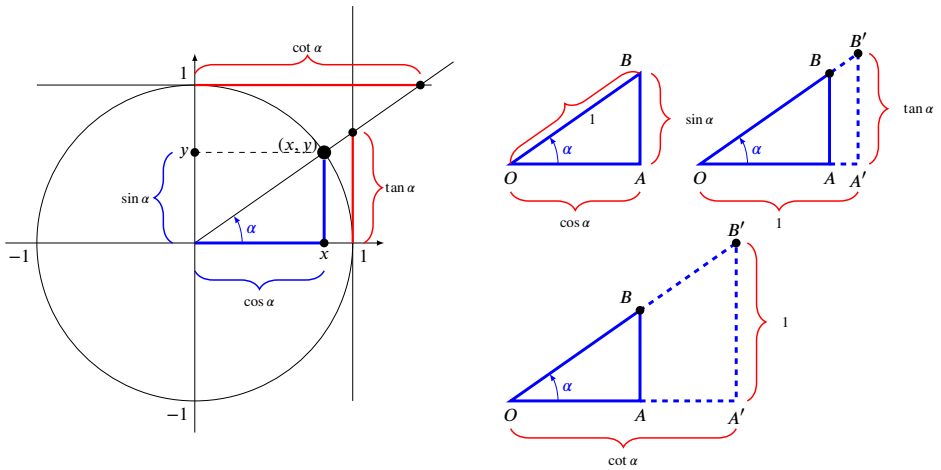
noodzakelijk lengte 1 heeft. Het volstaat dan te *herschalen* met de lengte van de schuine zijde:

Eigenschap 11.3.2 (Sinus en cosinus in een rechthoekige driehoek)**.**



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}$	$a = \sin\alpha \cdot c$	SOS
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$= \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}}$	$b = \cos\alpha \cdot c$	CAS
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$a = \tan\alpha \cdot b$	TOA
$\cot\alpha = \frac{b}{a}$	$= \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$b = \cot\alpha \cdot a$	cotangens

De cosinus en de sinus van een hoek α kan je op de goniometrische cirkel aflezen op de *assen*. Ook de tangens en de cotangens kan je aflezen, en wel op de *raaklijnen* aan de goniometrische cirkel in punten $(1,0)$ en $(0,1)$:



Opmerking 11.3.2.

- We lezen de cosinus af op de x-as, en de sinus op de y-as.
  We zien dat $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ en $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$
- We lezen de *tangens* af op de verticale *raak*lijn $x = 1$. Dat volgt uit de gelijkvormigheid van de driehoeken $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle A'OB'$
  want in driehoek $\measuredangle AOB$ geldt $\tan\alpha = \dfrac{|AB|}{|AO|} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
  terwijl in driehoek $\measuredangle A'OB'$ geldt dat $\tan\alpha = \dfrac{|A'B'|}{|A'O|} = \dfrac{|A'B'|}{1} = |A'B'|$.

CC BY-NC-SA 4.0

11.3 Goniometrische getallen

Dus is $|A'B'| = \tan\alpha$.

Op analoge wijze lezen we de cotangens af op de horizontale rechte $y = 1$.

We zien dat $\tan\alpha$ en $\cot\alpha$ alle mogelijk reële waarden kunnen aannemen.

- De formule $a = c \cdot \sin\alpha$ betekent dat de sinus precies het getal is waarmee we de lengte van de *schuine* zijde van een driehoek moeten vermenigvuldigen om de lengte van de *overstaande* zijde te bekomen. Idem voor cosinus en aanliggende zijde.

11.3.2 Standaardhoeken

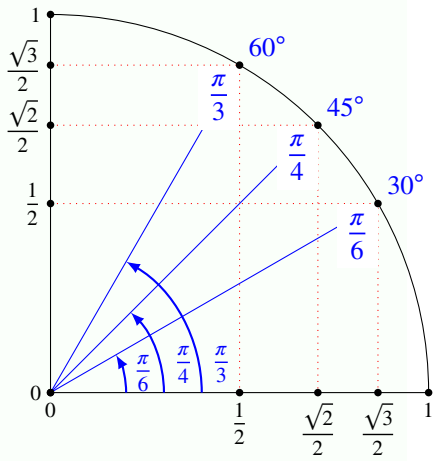
Voor enkele hoeken zijn er eenvoudige formules voor de goniometrische getallen. Deze hoeken komen in de praktijk regelmatig voor, en het is handig en belangrijk de *exacte uitdrukkingen* te kennen.

De waarden zijn eenvoudig te onthouden: schrijf de hoeken $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{2}$ van klein naar groot. De bijhorende sinussen zijn dan een rijtje halve vierkantswortels van klein naar groot. De cosinus is hetzelfde rijtje omgekeerd, en de tangens is natuurlijk het quotiënt van de sinus en de cosinus.

Merk op dat $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Eigenschap 11.3.3 (Goniometrische getallen van standaardhoeken)**.**

α	0 $0°$	$\frac{\pi}{6}$ $30°$	$\frac{\pi}{4}$ $45°$	$\frac{\pi}{3}$ $60°$	$\frac{\pi}{2}$ $90°$
	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/



Merk op: $\tan\pi/2$ is niet gedefinieerd, want $\tan\pi/2 = \dfrac{\sin\pi/2}{\cos\pi/2}$, maar $\cos\pi/2 = 0$.

Opmerking 11.3.3.

Een rekenmachine geeft enkel numerieke oplossingen, en het is soms veel handiger om met uitdrukkingen als $\sqrt{2}$ te rekenen dan met $1,41421\ldots$. Dat is bijvoorbeeld het geval als je de waarde even verder moet kwadrateren, wat met goniometrische formules wel eens voorkomt.

Met de goniometrische cirkel bepaal je ook de goniometrische getallen van verwante hoeken in de andere kwadranten:

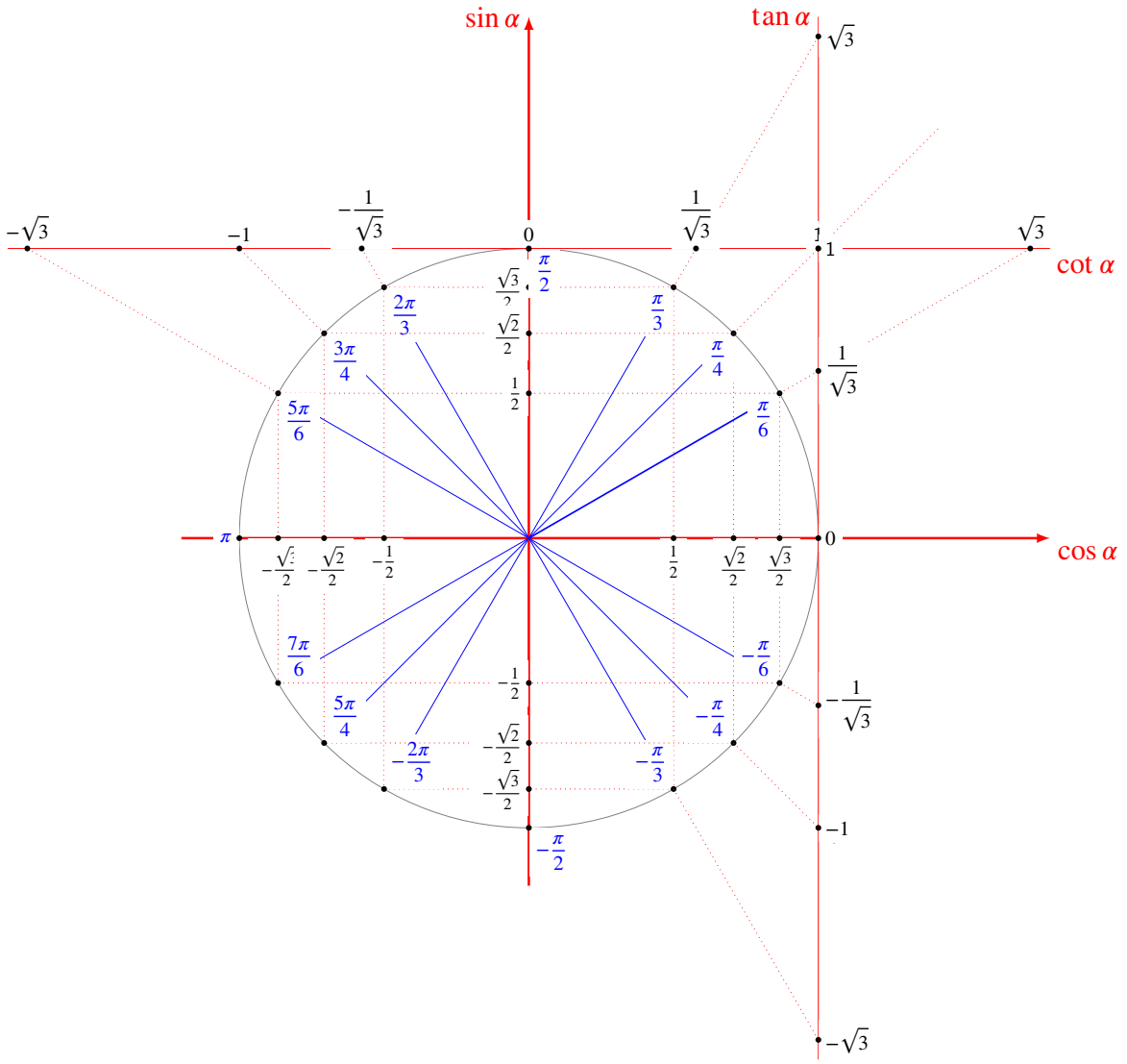
Lees de sinus af op de rechte $x = 0$ (dus de y-as), de tangens op de rechte $x = 1$, de cosinus op de rechte $y = 0$ (dus de x-as), en de cotangens op de rechte $y = 1$.

CC BY-NC-SA 4.0

11.3 Goniometrische getallen

Merk op dat je ook het *teken* van de sinus, cosinus en tangens dadelijk kan aflezen.

BELANGRIJK: leer dit niet van buiten, maar bestudeer het tot je er de evidentie van inziet.



Oefening 11.3.2. Lees de waarden van volgende goniometrische getallen af op de cirkel:

1. $\cos \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$
2. $\sin \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$
3. $\tan \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$
4. $\tan \frac{\pi}{3} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

11.4 Verwante hoeken

Op de goniometrische cirkel zien we dat er eenvoudige verbanden zijn tussen de goniometrische getallen van zogenaamde *verwante* hoeken. Uit de gekende waarden voor sinus, cosinus, tangens en cotangens van enkele *standaardhoeken*, volgen dus ook de waarden van veel meer hoeken. Bovendien kunnen we het berekenen van goniometrische getallen van een willekeurige hoek steeds herleiden tot het berekenen van een goniometrisch getal van een hoek uit het eerste kwadrant.

Definitie 11.4.1 (Verwante hoeken)**.** Elke hoek α heeft volgende zogenaamde **verwante** hoeken:

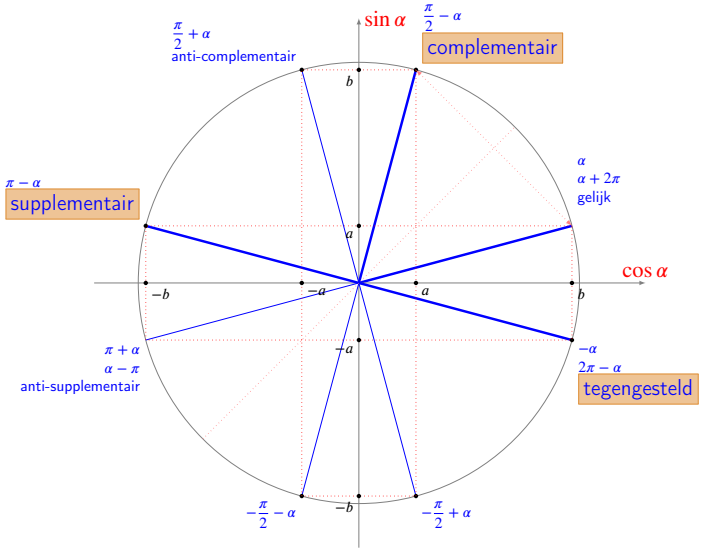
$-\alpha$	is de **tegengestelde** hoek	(de som van α en $-\alpha$ is gelijk aan 0)
$\pi - \alpha$	is de **supplementaire** hoek	(de som van α en $\pi - \alpha$ is gelijk aan π)
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	is de **complementaire** hoek	(de som van α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$ is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$)
$\pi + \alpha$	is de **anti-supplementaire** hoek	(het verschil van α en $\pi + \alpha$ is gelijk aan π)
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	is de **anti-complementaire** hoek	(het verschil van α en $\frac{\pi}{2} + \alpha$ is gelijk aan $\frac{\pi}{2}$)

Uit deze definitie volgt direct volgende eigenschap:

Eigenschap 11.4.1.

- Twee hoeken zijn *tegengesteld* als hun som gelijk is aan de *nulhoek*, *supplementair* als hun som gelijk is aan een *gestrekte* hoek, en *complementair* als hun som gelijk is aan een *rechte* hoek.
- Tegengestelde hoeken zijn elkaars *spiegelbeeld* ten opzichte van de x-as, supplementaire hoeken zijn elkaars *spiegelbeeld* ten opzichte van de y-as en complementaire hoeken zijn elkaars *spiegelbeeld* ten opzicht van de *eerste* bissectrice.

Op een tekening ziet dat er uit als volgt:



Het is *niet* zinvol deze figuur van buiten te leren. Het is *wel* zinvol vertrouwd te worden met de werking van de figuur, waarop je de goniometrische getallen van verwante hoeken direct kan aflezen. Hierbij is $\sin\alpha = a$ en $\cos\alpha = b$, en de goniometrische getallen van de verwante hoeken zijn dan a, b, $-a$ of $-b$.

CC BY-NC-SA 4.0

11.4 Verwante hoeken

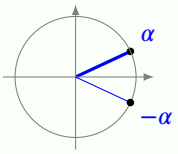
Eigenschap 11.4.2.

Cosinus:	(op de x-as)		Sinus:	(op de y-as)	
$\cos\alpha$	$= \cos(-\alpha)$	$= b$	$\sin\alpha$	$= \sin(\pi-\alpha)$	$= a$
$\cos(\pi-\alpha)$	$= \cos(\pi+\alpha)$	$= -b$	$\sin(-\alpha)$	$= \sin(\pi+\alpha)$	$= -a$
$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= \cos(\alpha-\frac{\pi}{2})$	$= a$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$	$= b$
$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)$	$= \cos(-\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= -a$	$\sin(-\frac{\pi}{2}-\alpha)$	$= \sin(\alpha-\frac{\pi}{2})$	$= -b$

Per type van verwante hoek geeft dat volgende lijst verbanden tussen de *goniometrische getallen*:

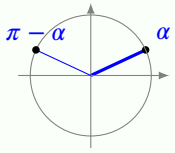
Eigenschap 11.4.3 (Tegengestelde hoeken).

$$\begin{aligned}\cos(-\alpha) &= \cos\alpha\\ \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha\\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$



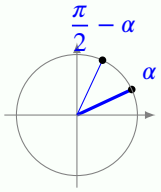
Eigenschap 11.4.4 (Supplementaire hoeken).

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha) &= -\tan\alpha\\ \cot(\pi-\alpha) &= -\cot\alpha\end{aligned}$$



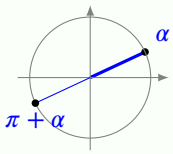
Eigenschap 11.4.5 (Complementaire hoeken).

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\alpha\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \sin\alpha\\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cot\alpha\\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \tan\alpha\end{aligned}$$



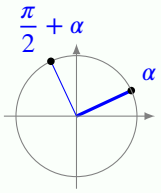
Eigenschap 11.4.6 (Anti-supplementaire hoeken).

$$\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\pi) &= -\sin\alpha\\ \cos(\alpha\pm\pi) &= -\cos\alpha\\ \tan(\alpha\pm\pi) &= \tan\alpha\\ \cot(\alpha\pm\pi) &= \cot\alpha\end{aligned}$$



Eigenschap 11.4.7 (Anti-complementaire hoeken).

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\alpha\\ \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\alpha\\ \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\cot\alpha\\ \cot\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) &= -\tan\alpha\end{aligned}$$



CC BY-NC-SA 4.0

11.5 Goniometrische formules

Ter referentie staan hier een aantal goniometrische formules om allerlei uitdrukkigen om te vormen en soms te berekenen. Alle formules zijn zowel van links naar rechts te lezen, als van rechts naar links.

Eigenschap 11.5.1 (Goniometrische formules).

Hoofdformule en varianten:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \qquad \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1 \qquad \cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}-1$$

Som- en verschilformules:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

Formules voor dubbele hoek:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \qquad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Formules van Simpson:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta \qquad \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta \qquad \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$$

Verwante hoeken:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= -\sin(-\alpha) &&= \sin(\pi-\alpha) &&= -\sin(\pi+\alpha)\\
&&&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\\
&&&= -\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\\
\cos\alpha &= \cos(-\alpha) &&= -\cos(\pi-\alpha) &&= -\cos(\pi+\alpha)\\
&&&= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\\
&&&= -\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &&= -\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

11.5.A Oefeningen goniometrie

11.5.A.1 Niveau 1

Oefening 11.5.1. Zet om van graden naar radialen of omgekeerd.

Graden	*Radialen*
$120°$	……
$8°$	……
…… $°$	$7\pi/4$
…… $°$	$\pi/10$
$90°$	……
$1°$	……
…… $°$	$7\pi/5$

Oefening 11.5.2. Lees de waarden van volgende goniometrische getallen af op de cirkel:

1. $\cos 0° = \ldots\ldots$
2. $\cos \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$
3. $\cos 90° = \ldots\ldots$
4. $\cos \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$
5. $\sin 0° = \ldots\ldots$
6. $\sin \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$
7. $\sin 90° = \ldots\ldots$
8. $\sin \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$
9. $\tan \frac{\pi}{3} = \ldots\ldots$
10. $\cos \frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$
11. $\tan \frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$
12. $\cot \frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$

Oefening 11.5.3. Duid het juiste antwoord aan (er is telkens precies één antwoord correct).

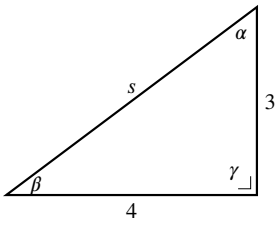
1. De hoeken $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{5\pi}{6}$ zijn — tegengesteld | complementair | supplementair
2. $\cos \frac{5\pi}{4}$ is gelijk aan — $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ | $\cos \frac{\pi}{4}$ | $\cos \frac{3\pi}{4}$
3. $\sin(\pi - 23)$ is gelijk aan — $-\sin(23)$ | $\sin(23)$ | $\cos(23)$
4. $\sin(2\pi + 1)$ is gelijk aan — $-\sin 1$ | $\sin 1$ | $\cos 1$

CC BY-NC-SA 4.0

11.5.A Oefeningen goniometrie

11.5.A.2 Niveau 2

Oefening 11.5.4. We bekijken een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden met lengte 3 en 4 (zie tekening). Bereken de lengte van de schuine zijde s. Bereken ook de sinus en cosinus van elk van de hoeken α, β en γ.



1. $s = \ldots\ldots$

2. $\sin\alpha = \ldots\ldots$

3. $\cos\alpha = \ldots\ldots$

4. $\sin\beta = \ldots\ldots$

5. $\cos\beta = \ldots\ldots$

6. $\sin\gamma = \ldots\ldots$

7. $\cos\gamma = \ldots\ldots$

Oefening 11.5.5. Bepaal $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ en $\cot\alpha$ en het kwadrant waarin α ligt in het volgende geval (zonder gebruik te maken van een rekenmachine):

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad \text{en} \qquad \sin\alpha < 0.$$

1. α ligt in het | I^{e} | IIe | IIIe | IVe | kwadrant.

2. $\sin\alpha = \ldots\ldots$

3. $\tan\alpha = \ldots\ldots$

4. $\cot\alpha = \ldots\ldots$

Oefening 11.5.6. Bepaal $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ en $\cot\alpha$ en het kwadrant waarin α ligt in het volgende geval (zonder gebruik te maken van een rekenmachine):

$$\tan\alpha = -\frac{3}{4} \qquad \text{en} \qquad \sin\alpha > 0.$$

1. α ligt in het | I^{e} | IIe | IIIe | IVe | kwadrant.

2. $\cot\alpha = \ldots\ldots$

3. $\sin\alpha = \ldots\ldots$

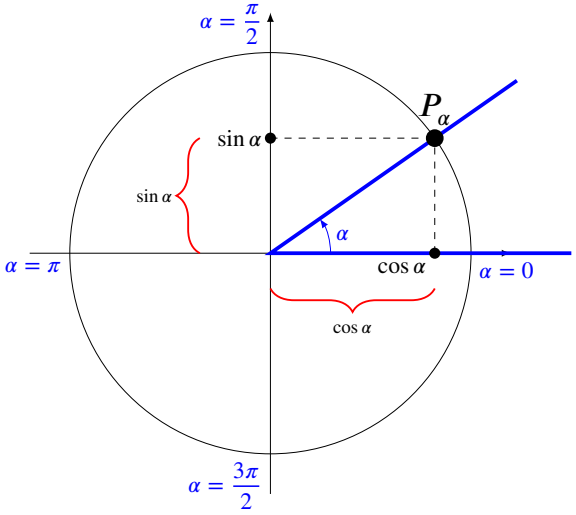
4. $\cos\alpha = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

11.5.A Oefeningen goniometrie

Oefening 11.5.7. Zoek aan de hand van de goniometrische cirkel (zie onder) waaraan volgende uitdrukkingen gelijk zijn.

1. $\cos(\pi - \alpha) =$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
2. $\sin(\alpha - \pi) =$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
3. $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) =$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
4. $\sin(\pi + \alpha) =$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
5. $\tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$



Oefening 11.5.8. Bereken zonder rekentoestel. Gebruik de gekende goniometrische getallen en de formules voor tegengestelde, (anti)supplementaire en (anti)complementaire hoeken.

1. $\sin(135°) =$ ... ...

2. $\tan(3\pi/4) =$ ... ...

3. $\cos(-30°) =$ ... ...

4. $\sin(-120°) =$ ... ...

5. $\tan(-\frac{5\pi}{6}) =$ ... ...

6. $\cot(390°) =$ ... ...

7. $\cot\frac{9\pi}{4} =$ ... ...

8. $\sin\frac{11\pi}{6} =$ ... ...

9. $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$ ... ...

10. $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$ ... ...

11. $\sin\frac{-27\pi}{4} =$ ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

11.5.A Oefeningen goniometrie

Oefening 11.5.9. Bereken volgende goniometrische getallen door gebruik te maken van de gekende waarden van de standaardhoeken $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{2}$ en de symmetrieën voor de verwante hoeken.

1. $\cos\frac{\pi}{3} =$
2. $\cos\frac{2\pi}{3} =$
3. $\cos\frac{5\pi}{6} =$
4. $\sin\frac{7\pi}{4} =$
5. $\cos\frac{-\pi}{2} =$
6. $\cos\frac{-2\pi}{3} =$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Oefening 11.5.10. Schrijf onderstaande uitdrukking in functie van $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$.

$\cos(\alpha+\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi) + \cos(\alpha + 2\pi) = \ldots\ldots$

Oefening 11.5.11. Vereenvoudig (dit wil zeggen, schrijf met behulp van één goniometrisch getal).

1. $\cos^2 3 - \sin^2 3$
2. $2\sin 3\cos 3$
3. $\sin(5\alpha)\cos(3\alpha) + \cos(5\alpha)\sin(3\alpha)$
4. $\cos(5\alpha)\cos(3\alpha) + \sin(5\alpha)\sin(3\alpha)$

Oefening 11.5.12. Schrijf als een product van goniometrische getallen.

1. $\sin 3 - \sin 5$
2. $\cos 2 + \cos 7$

11.5.A.3 Niveau 3

Oefening 11.5.13. Bewijs de volgende goniometrische identiteiten.

1. $\sin(8\alpha) = 8\cos(4\alpha)\cos(2\alpha)\cos\alpha\sin\alpha$
2. $\cos(2\alpha) = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$
3. $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
4. $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

Oefening 11.5.14. Ontbind telkens de gegeven uitdrukking in factoren.

1. $\sin(7a) + \sin(3a)$

CC BY-NC-SA 4.0

11.5.A Oefeningen goniometrie

2. $\cos(a) + \sin(a)$

Oefening 11.5.15. Vereenvoudig volgende uitdrukkingen zoveel als mogelijk.

1. $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)} - \dfrac{\cos(2x)}{\cos(x)}$

2. $\dfrac{\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{6}) - \cos(x+\frac{\pi}{6})}{4\cos x \sin(x+\frac{\pi}{6}) - 4\sin x \cos(x+\frac{\pi}{6})}$

CC BY-NC-SA 4.0

11.6 Driehoeken oplossen

Het 'oplossen van driehoeken' betekent het bepalen van *alle* zijden en hoeken als er enkele gegeven zijn. Volgende eigenschappen worden daarbij gebruikt:

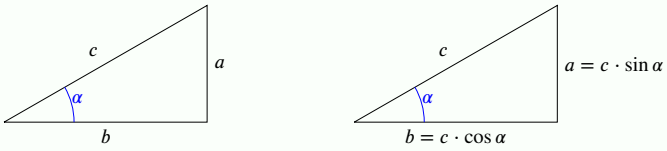
Eigenschap 11.6.1 (Herhaling eigenschappen driehoeken)**.**

In elke driehoek geldt: de som van de drie hoeken is $180°$ of π rad.

In een rechthoekige driehoek geldt:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{Stelling van Pythagoras}$$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}$	$a = \sin\alpha \cdot c$	SOS
$\cos\alpha = \frac{b}{c}$	$= \frac{\text{aanliggende zijde}}{\text{schuine zijde}}$	$b = \cos\alpha \cdot c$	CAS
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$= \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{aanliggende zijde}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$a = \tan\alpha \cdot b$	TOA
$\cot\alpha = \frac{b}{a}$	$= \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$b = \cot\alpha \cdot a$	cotangens



Eigenschap 11.6.2 (Sinusregel en cosinusregel in een willekeurige driehoek)**.**

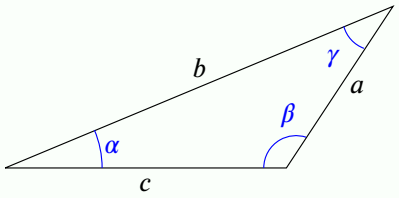
Sinusregel (de verhouding tussen lengtes van zijden en de sinus van hun overstaande hoeken is constant)

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Cosinusregel (geeft een verband tussen kwadraten van de zijden en één hoek)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\cos\gamma$$

Alternatieve formuleringen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\alpha$ en $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,\cos\beta$



Opmerking 11.6.1. Enkele tips om deze regels toe te passen in oefeningen:

- De **sinusregel** legt een verband tussen verhoudingen van lengtes en hun overstaande hoeken. Stel dat je de lengte van een zijde kent, alsook de grootte van haar overstaande hoek. Indien je dan de lengte kent van een andere zijde, dan kan je met de sinusregel de grootte van haar

CC BY-NC-SA 4.0

11.6 Driehoeken oplossen

overstaande hoek berekenen. Omgekeerd, stel dat je de grootte van een andere hoek kent, dan kan je de lengte van haar overstaande zijde berekenen.

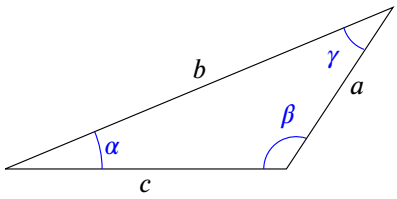
Je kan de sinusregel ook lezen als $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, $a = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot b$ of $\sin\alpha = \frac{a}{b} \cdot \sin\beta$.

- De **cosinusregel** legt een verband tussen één hoek en de lengtes van alle zijden van de driehoek. Om de cosinusregel gemakkelijk te memoriseren, onthoud je dat de lengte van de zijde die aan de linkerkant van de vergelijking voorkomt (c hierboven) de overstaande zijde is van de hoek die voorkomt in het rechterlid van formule (γ hierboven). In oefeningen kan je met de cosinusregel de lengte van een zijde berekenen als je zowel de grootte van haar overstaande hoek kent als de lengtes van de twee andere zijden, of je kan eender welke hoek berekenen als je de lengtes van alle zijden kent.
- De cosinusregel is eigenlijk een uitbreiding van de stelling van Pythagoras. Als γ een rechte hoek is, dan is $\cos\gamma = 0$. De cosinusregel, toegepast op de hoek γ, geeft dan $c^2 = a^2 + b^2$. En inderdaad, in deze rechthoekige driehoek is c de schuine zijde en de cosinusregel is precies de stelling van Pythagoras. De cosinusregel geeft dus precies de correctieterm voor de stelling van Pythagoras bij niet-rechthoekige driehoeken.

CC BY-NC-SA 4.0

11.6.A Oefeningen sinus- en cosinusregel

Oefening 11.6.1. Bereken alle zijden en hoeken van een driehoek met gegeven zijden $a = 2$, $b = 4$ en hoek $\beta = \pi/2$. De notatie is als volgt:



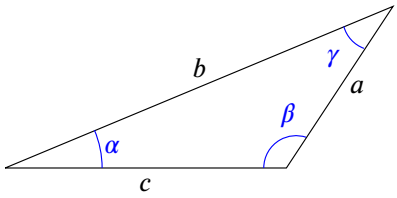
1. Bereken de hoek $\alpha = \ldots\ldots$ rad.

2. Bereken de hoek $\gamma = \ldots\ldots$ rad.

3. Bereken met de cosinusregel en de waarde van γ uit vorige deelvraag de lengte van de zijde $c = \ldots\ldots$

4. Bereken de lengte van de zijde c *zonder* de antwoorden van de eerste deelvraag te gebruiken.

Oefening 11.6.2. Bereken alle zijden en hoeken van een driehoek met gegeven zijde $a = 3$ en hoeken $\alpha = \frac{\pi}{4}$ en $\beta = \frac{\pi}{3}$. De notatie is als volgt:



Je mag een rekenmachine gebruiken.

1. Bereken de hoek $\gamma \approx \ldots\ldots$ rad.

2. Bereken de lengte van $b \approx \ldots\ldots$

3. Bereken de lengte van $c \approx \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 12
Goniometrische functies

(Versie 2026/11/23H.2)

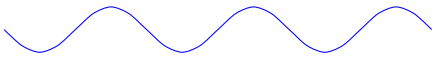
12.1 Goniometrische functies

Met een hoek α hebben we een getal $\sin\alpha$ geassocieerd. Door nu de hoek α te laten *variëren* (dus 'variabel' te maken), bekomen we een *functie* in de 'variabele' α. In de wiskunde gebruiken we dikwijls de letter x voor variabelen. We zullen hier dus ook meestal spreken van $\sin x$ in plaats van $\sin\alpha$. Ook van de cosinus, de tangens en de cotangens kunnen we functies maken.

Definitie 12.1.1 (Goniometrische functies)**.**

De **goniometrische functies** zijn de reële functies sinus, cosinus, tangens en cotangens:

$$\begin{aligned}
\sin &: \quad x \mapsto \sin(x) \\
\cos &: \quad x \mapsto \cos(x) \\
\tan &: \quad x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\cot &: \quad x \mapsto \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}
\end{aligned}$$

We gaan nu na hoe de grafieken van deze functies er uit zien. We nemen als voorbeeld $\sin : x \mapsto \sin(x)$, waarvan velen de vorm kennen of minstens herkennen: 

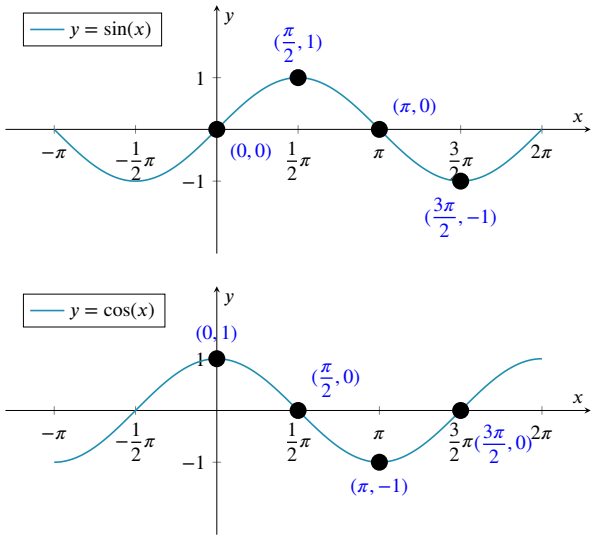
Zonder aanduidingen op de assen ziet de grafiek van $\cos : x \mapsto \cos(x)$ er net hetzelfde uit. Het is dus belangrijk om te weten waar de nulpunten, de maximale en de minimale waarden liggen.

Oefening 12.1.1. Lees volgende functiewaarden af op de goniometrische cirkel:

1. $\sin 0 = \ldots\ldots$ $\sin\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\sin\pi = \ldots\ldots$ $\sin\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\sin 2\pi = \ldots\ldots$

2. $\cos 0 = \ldots\ldots$ $\cos\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos\pi = \ldots\ldots$ $\cos\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos 2\pi = \ldots\ldots$

Met de waarden uit vorige oefening kunnen we nu enkele waarden op de x-as en y-as noteren:



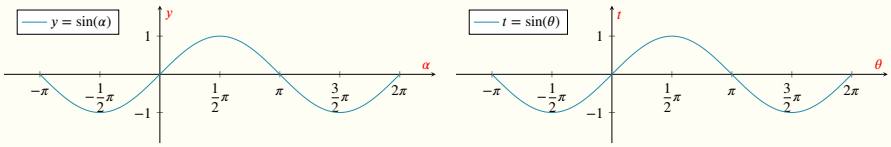
Opmerking 12.1.1.

- Als we sinus, cosinus en tangens als functies beschouwen, geldt dat in principe *altijd* met de variabele uitgedrukt in radialen.

CC BY-NC-SA 4.0

12.1 Goniometrische functies

- Als we de sinus beschouwen als een functie, gebruiken we dikwijls de letter x als variabele eerder dan α. Vooral in toepassingen gebruikt men ook andere letters. Men tekent dan bijvoorbeeld ook grafieken in een αy-vlak of een θt-vlak

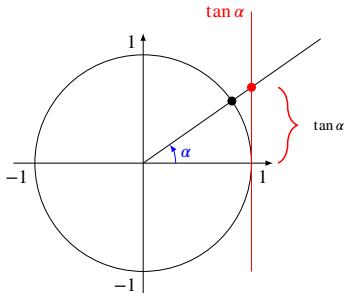


- Het domein van sin en van cos is $\mathbb{R}$ en het beeld is $[-1,1]$.
  Met de uitgebreidere notatie voor functies kunnen we dus ook schrijven

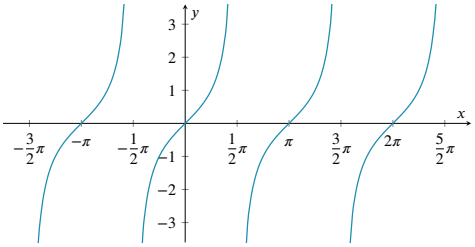
$$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto \sin(x)$$

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto \cos(x)$$

Voor de tangensfunctie $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ merken we op dat ze niet gedefinieerd is in de nulpunten van de noemer, dus als $\cos x = 0$ zoals bijvoorbeeld in $\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ of algemeen als $x \in \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Waar $\sin x = 0$ zal ook de tangensfunctie nul zijn.



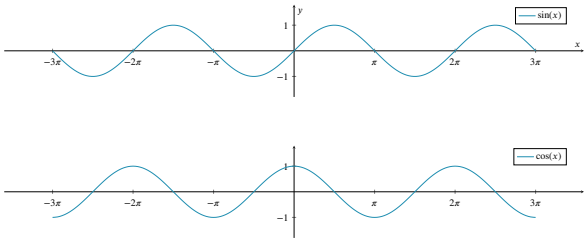
We lezen op de goniometrische cirkel af dat $\tan 0 = 0$, en dat naarmate de hoek groter wordt ook de tangens van de hoek groter wordt. Als de hoek de waarde $\dfrac{\pi}{2}$ krijgt, dan bestaat de tangens niet meer, dan wordt deze 'oneindig'. Volledig gelijkaardig wordt de tangens steeds negatiever als de hoek varieert van 0 tot $-\dfrac{\pi}{2}$. De grafiek van $x \mapsto \tan(x)$ ziet er als volgt uit:

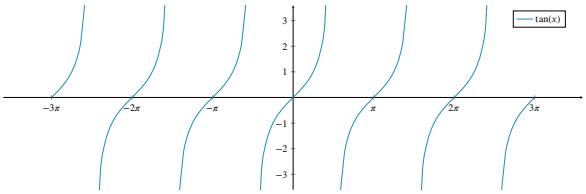


Op de grafieken van sin, cos en tan lees je onderstaande eigenschappen af (die je dus niet van buiten moet leren).

CC BY-NC-SA 4.0

12.1 Goniometrische functies





Eigenschap 12.1.1 (Eigenschappen van goniometrische functies)**.**

(a) de nulpunten van de goniometrische functies worden gegeven door:

- de sinusfunctie heeft nulpunten in $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft nulpunten in $\frac{\pi}{2} + k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de tangensfunctie heeft nulpunten in $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$

(b) de maxima en minima van de goniometrische functies worden gegeven door:

- de sinusfunctie heeft maxima in $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de sinusfunctie heeft minima in $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft maxima in $2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft minima in $\pi + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de tangensfunctie heeft geen maxima of minima

(c) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ en $\tan(x + \pi) = \tan(x)$

(d) de sinus over een afstand $\frac{\pi}{2}$ naar links verschuiven geeft de cosinus: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

(e) de cosinus over een afstand $\frac{\pi}{2}$ naar rechts verschuiven geeft de sinus: $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

(f) de tangensfunctie heeft *verticale asymptoten* in de punten $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$: in die punten zelf is de tangens niet gedefinieerd, maar de grafiek komt er wel willekeurig dicht tegen de verticale rechten $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Eigenschap (c) betekent dat sinus, cosinus en tangens *periodische functies* zijn.

Oefening 12.1.2. Vul aan

1. $\sin(n\pi) = \ldots\ldots$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

2. $\cos(n\pi) = (-1)^{\cdots\cdots}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

3. $\cos((n+1)\pi) = (-1)^{\cdots\cdots}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Oefening 12.1.3. Zijn volgende functies even/oneven of geen van beide?

1.

Even	Oneven	Geen van beiden

$x \mapsto \sin x$

2.

Even	Oneven	Geen van beiden

$x \mapsto \cos x$

CC BY-NC-SA 4.0

12.1 Goniometrische functies

3. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto \tan x$

4. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto \sin^2 x$

5. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto x \sin x$

6. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto \sin x \cos x$

CC BY-NC-SA 4.0

12.2 Goniometrische vergelijkingen

Vergelijkingen waarin goniometrische functies voorkomen noemen we, weinig verrassend, *goniometrische vergelijkingen*. Voorbeelden zijn $\sin x = 1$, $\sin x = \sin 1$, $\sin x = x$ of $\sin x^2 = 2\cos^2 2x$. De meest nuttige oplossingen van deze goniometrische vergelijkingen zijn meestal niet de *georiënteerde hoeken* die voldoen aan de vergelijking, maar wel *alle maatgetallen* die voldoen. Er zijn geen algemene formules of procedures om willekeurige goniometrische vergelijkingen exact op te lossen, en het volstaat vertrouwd te zijn met de hier behandelde eerder eenvoudige gevallen.

Sommige goniometrische vergelijkingen kan je direct oplossen met behulp van de tabel met gekende waarden, met de grafiek van de goniometrische functies of met de goniometrische cirkel. Omdat we geïnteresseerd zijn in *alle* oplossingen, is het toch belangrijk ook deze vergelijkingen met de nodig aandacht te bestuderen.

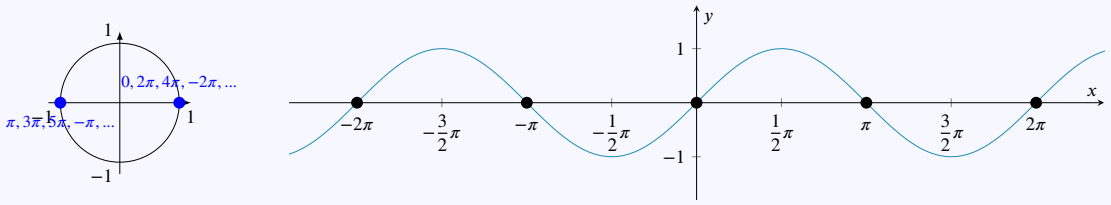
Voorbeeld 12.2.1. Voor welke getallen x geldt dat $\sin x = 0$?

$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$✓

Uitwerking:

Je kan redeneren met de *goniometrische cirkel*: de sinus is de y-coördinaat, of dus de hoogte. Een hoek α met $\sin\alpha = 0$ heeft dus hoogte nul. Zo zijn er twee hoeken, namelijk de nulhoek en de gestrekte hoek. We zoeken echter de *maatgetallen* van die hoeken, en de maatgetallen van de nulhoek zijn $2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$ en de maatgetallen van de gestrekte hoek zijn $\pi + 2k\pi$, ook met $k \in \mathbb{Z}$. Samen geeft dat de maatgetallen $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$: $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Je kan ook redeneren op de *grafiek van de sinusfunctie* en de nulpunten zoeken. Dat zijn precies de punten $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$.



Oefening 12.2.1. Geef alle oplossingen van volgende vergelijkingen:

1. $\sin x = 1$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. $\cos x = 0$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. $\cos x = 1$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Voorbeeld 12.2.2. Voor welke getallen x geldt dat $\cos x = \cos\alpha$, met $\alpha \in [0, 2\pi]$?

$\{\pm\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$✓

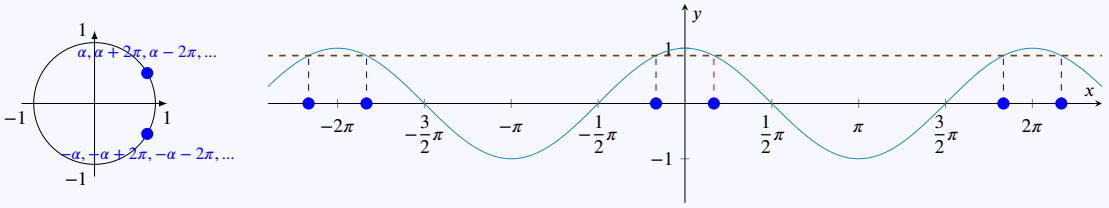
CC BY-NC-SA 4.0

12.2 Goniometrische vergelijkingen

Uitwerking:

Je redeneert hier best met de *goniometrische cirkel*. α is een vast getal, maar er is geen concrete waarde voor gegeven. De oplossingen zullen dus afhangen van α. Teken daarom een willekeurige hoek α. De cosinus is de x-coördinaat, en dus heeft de hoek $-\alpha$ dezelfde cosinus als α. Er voldoen dus twee hoeken, namelijk α en $-\alpha$ aan de vergelijking. Maar, er worden geen hoeken gevraagd, maar reële getallen, dus maatgetallen van hoeken. Elke hoek heeft oneindig veel maatgetallen, dus de maatgetallen x waarvoor $\cos x = \cos\alpha$ zijn de getallen $\{\pm\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Je kan ook redeneren op de grafiek van de cosinusfunctie en de hoek α aanduiden op de x-as. Door een verticale lijn vind je dan $\cos\alpha$, en door een horizontale lijn vind je alle punten die dezelfde cosinus hebben.



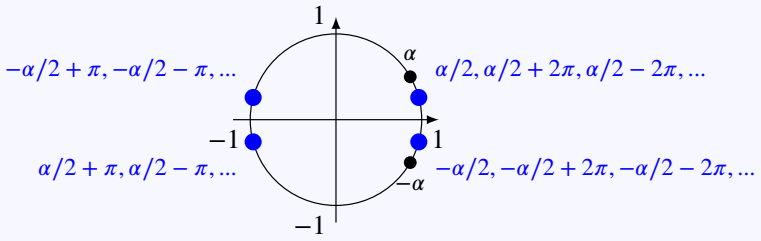
Voorbeeld 12.2.3. Voor welke getallen x geldt dat $\cos 2x = \cos\alpha$, met $\alpha \in [0, 2\pi]$?

$\{\pm\alpha/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$✓

Uitwerking:

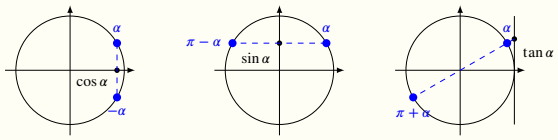
Dit voorbeeld lijkt erg op het vorige.

Uit vorig voorbeeld volgt dat $2x \in \{\pm\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, en dus $x \in \{\pm\alpha/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.



Opmerking 12.2.1.

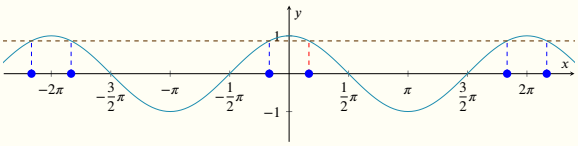
- Vergelijkingen van de vorm $\sin x = \sin\alpha$, $\cos x = \cos\alpha$ of $\tan x = \tan\alpha$, met een gegeven $\alpha \in \mathbb{R}$, kunnen opgelost worden door te redeneren op de *goniometrische cirkel*:
  - duid een willekeurige hoek α aan op de goniometrische cirkel
  - markeer de andere hoek die dezelfde sinus,cosinus of tangens heeft. Voor de cosinus is dat de hoek $-\alpha$, voor de sinus de hoek $\pi - \alpha$ en voor de tangens de hoek $\pi + \alpha$.
  - als de *maatgetallen* van de hoeken worden gevraagd, wat meestal het geval is, tel je bij elke hoek een willekeurig veelvoud van 2π op



CC BY-NC-SA 4.0

12.2 Goniometrische vergelijkingen

- Dergelijke vergelijkingen kunnen ook worden opgelost door te redeneren op de *grafiek*:
  - teken een horizontale rechte door het gegeven goniometrische getal op de y-as
  - de gezochte maatgetallen komen overeen met de snijpunten van de grafiek



- Je bekomt dus telkens oplossingsverzamelingen van de vorm

$$\begin{array}{ll} \cos x = \cos\alpha & \{\pm\alpha + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \sin x = \sin\alpha & \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + \pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \tan x = \tan\alpha & \{\alpha + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{array}$$

- Vergelijkingen van de vorm $\sin x = a$ of $\cos x = a$ zijn enkel oplosbaar als $a \in [-1, 1]$. In dat geval volstaat het van één hoek α te vinden waarvoor $\sin\alpha = a$ om het probleem te reduceren tot het voorgaande geval. Dergelijke hoek α kan je vinden met een rekenmachine, namelijk door boogcosinus, boogsinus of boogtangens te berekenen.
- In een vergelijking van de vorm $\sin x = \sin\alpha$ mag je *niet* gewoon de sinus schrappen, en concluderen dat $x = \alpha$. Inderdaad, $x = \alpha$ is *een* oplossing, maar er zijn er meer.
- Voor vergelijkingen van de vorm $\cos mx = \cos\alpha$, met $m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$, volstaat het alle oplossingen van $\cos x = \cos\alpha$ te delen door m, en dat geeft dan $x \in \left\{\pm\frac{\alpha}{m} + \frac{2k}{m}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

CC BY-NC-SA 4.0

12.2.A Oefeningen goniometrische vergelijkingen

12.2.A.1 Niveau 2

Oefening 12.2.2. Los volgende goniometrische vergelijkingen op.

1. $\tan x = 0$ heeft als oplossingsverzameling

$\{0\}$	$\{0, 2\pi\}$	$\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. $\sin 2x = 1$ heeft als oplossingsverzameling

$\{\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi/4, 3\pi/4\}$	$\{\pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pm\pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

3. $\cos 7x = \cos \frac{\pi}{6}$ heeft als oplossingsverzameling

$\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{42} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\left\{\pm\frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

4. $\cos 2x = 0$ heeft als oplossingsverzameling

$\{\pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi/4 + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\{\pm\pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Oefening 12.2.3. Los volgende goniometrische ongelijkheden op.

1. $\sin x < 0$, met $x \in [0, 4\pi]$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

2. $\sin 2x < 0$, met $x \in [0, 2\pi]$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

Oefening 12.2.4. Los volgende goniometrische vergelijkingen op.

1. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $\sin x = \sin y$, met $y \in [0, 2\pi]$? $x \in$ ... ...

2. $\cos x = \frac{1}{2}$ heeft als oplossingverzameling: ... ...

3. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

4. $\sin(\frac{\pi}{2}x) = 0$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

5. $\sin x = \cos x$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

6. $\sin x = -\cos x$ heeft als oplossingsverzameling: ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 13
Functies deel 2

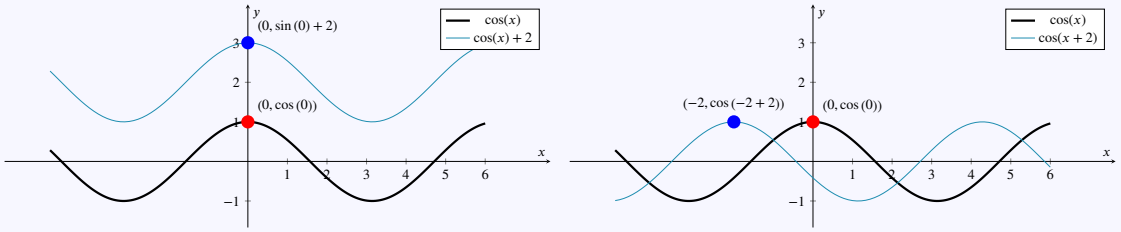
(Versie 2026/11/23H.2)

13.1 Transformaties van functies

In het algemeen kan het verband tussen twee functies f en g enerzijds, en de samengestelde functie $f \circ g$ anderzijds erg complex zijn. Maar als één van de functies zelf eenvoudig is, kan het verband wel intuïtief duidelijk zijn, en kunnen we het zelfs aflezen op de grafiek. We spreken in dit speciale geval soms van *transformaties* van functies, of de transformatie van één functie door een andere in plaats van het algemenere *samenstelling* van twee functies. We noteren hier de 'eenvoudige' functie met de letter T (voor *T*ransformatie). Als voorbeelden van zulke 'eenvoudige' functies bekijken we in eerste instantie eerstegraadsfuncties zoals $x \mapsto x+2$, $x \mapsto 2x$, $x \mapsto 2x+2$, ... maar later ook bijvoorbeeld de absolute waarde functie.

Voorbeeld 13.1.1. Verschuivingen: bestudeer voor $f : x \mapsto \cos(x)$ en $T_1 : x \mapsto x+2$ de grafieken van

$$T_1 \circ f : x \mapsto \cos(x)+2 \text{ en } f \circ T_1 : x \mapsto \cos(x+2).$$



- De grafiek van $x \mapsto \cos(x)+2$ is 2 naar *boven* verschoven t.o.v. de grafiek van f.

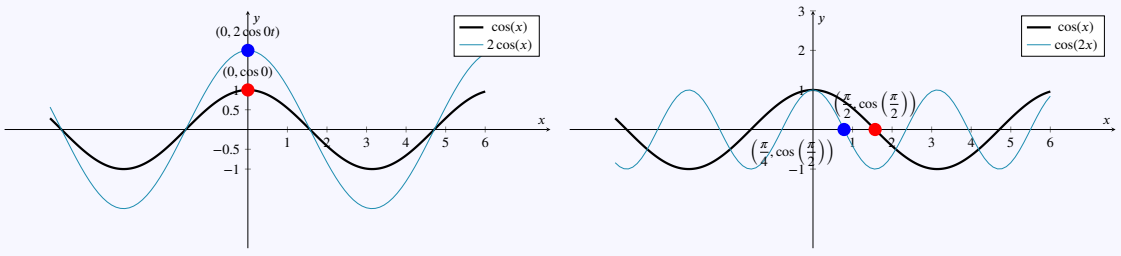
  Dit is eenvoudig te begrijpen want de x die door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, wordt door $T_1 \circ f$ afgebeeld op $\cos(x)+2$, dus 2 eenheden hoger.

- De grafiek van $x \mapsto \cos(x+2)$ is 2 naar *links* verschoven t.o.v. de grafiek van f.

  Dit is wat subtieler: als x door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, dan wordt $x-2$ door $T_1 \circ f$ afgebeeld op dezelfde $\cos((x-2)+2) = \cos(x)$. Dus, je moet 2 eenheden vroeger vertrekken om op dezelfde functiewaarde terecht te komen.

Voorbeeld 13.1.2. Expansies: bestudeer voor $f : x \mapsto \cos(x)$ en $T_2 : x \mapsto 2x$ de grafieken van

$$T_2 \circ f : x \mapsto 2\cos(x) \text{ en } f \circ T_2 : x \mapsto \cos(2x).$$



- De grafiek van $x \mapsto 2\cos(x)$ is een factor 2 'uitgerekt' in de y-richting t.o.v. de grafiek van $\cos x$.

  Dit is eenvoudig te begrijpen want de functiewaarden worden door T_2 met 2 vermenigvuldigd. De x die door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, wordt door $T_2 \circ f$ afgebeeld op $2\cos(x)$, dus 2 keer groter.

CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Transformaties van functies

- De grafiek van $x \mapsto \cos(2x)$ is een factor 2 'ingedrukt' in de x-richting t.o.v. de grafiek van $\cos x$.

  Dit is wat subtieler: als x door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, dan wordt $x/2$ door $f \circ T_2$ afgebeeld op dezelfde $\cos(2(x/2)) = \cos(x)$. Dus, je moet met $x/2$ vertrekken om op dezelfde functiewaarde terecht te komen.

Voor sommige eenvoudige functies T is er dus een duidelijk verband tussen de grafieken van f en de samengestelde functies $T \circ f$ en $f \circ T$. We stellen het volgende vast.

Eigenschap 13.1.1 (Transformaties van een functie)**.**

De (transformatie-)functies T hebben volgend effect op (de grafiek van) een willekeurige functie f:

- $f \circ T : x \mapsto f(T(x))$: pas T toe langs de x-as
- $T \circ f : x \mapsto T(f(x))$: pas T toe langs de y-as

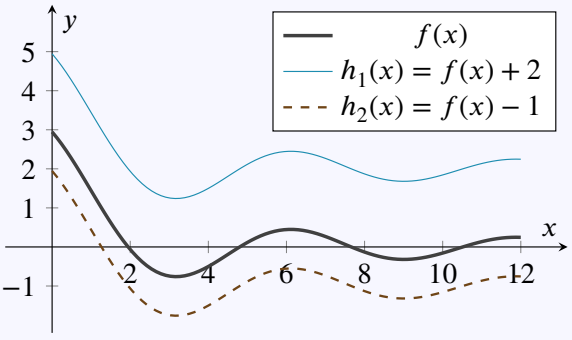
In het bijzonder hebben de transformaties $T_+ : x \mapsto x + a$ ('plus a') en $T_\times : x \mapsto ax$ ('maal a') volgende effecten:

$T_+ \circ f : x \mapsto f(x) + a$	grafiek a naar *boven* verschuiven
$f \circ T_+ : x \mapsto f(x + a)$	grafiek a naar *links* verschuiven
$T_\times \circ f : x \mapsto a \cdot f(x)$	grafiek met factor a *uitrekken* in de y-richting
$f \circ T_\times : x \mapsto f(a \cdot x)$	grafiek met factor a *indrukken* in de x-richting

Opmerking 13.1.1. '-2 naar boven schuiven' betekent natuurlijk hetzelfde als '2 naar beneden schuiven' en 'met factor $\frac{1}{2}$ uitrekken' betekent hetzelfde als 'met factor 2 indrukken'.

Voorbeeld 13.1.3 (Verschuiving langs y-as)**.**

Een functie f kan je langs de y-as verschuiven door (langs *links*) samen te stellen met functies zoals $T_1 : x \mapsto x + 2$ en $T_2 : x \mapsto x - 1$. Dit resulteert in onderstaande functies $h_1 : x \mapsto (T_1 \circ f)(x) = f(x) + 2$ en $h_2 : x \mapsto (T_2 \circ f)(x) = f(x) - 1$:

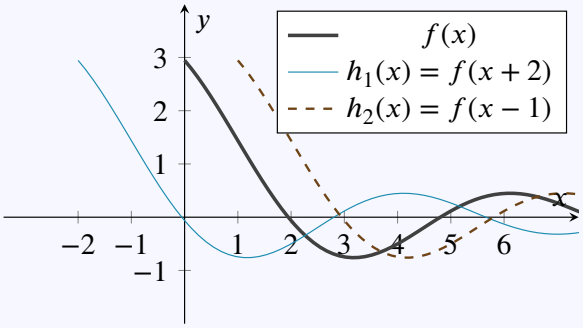


Voorbeeld 13.1.4 (Verschuiving langs x-as)**.**

Een functie f kan je langs de x-as verschuiven door (langs *rechts*) samen te stellen met functies zoals $T_1 : x \mapsto x + 2$ en $T_2 : x \mapsto x - 1$. Dit resulteert in volgende functies $h_1 : x \mapsto (f \circ T_1)(x) = f(x + 2)$ en $h_2 : x \mapsto (f \circ T_2)(x) = f(x - 1)$:

CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Transformaties van functies

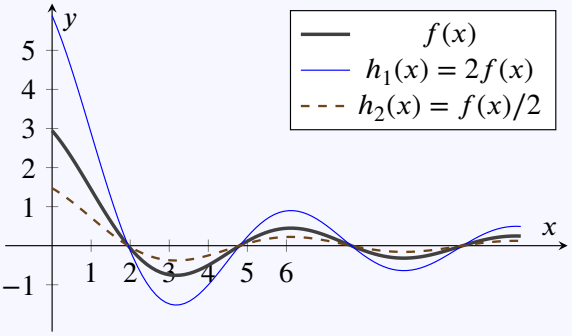


Het domein van $f \circ T_1$ is niet hetzelfde als het domein van f:

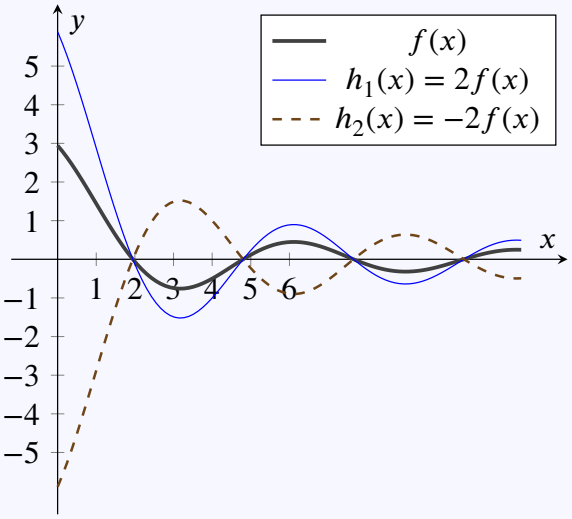
Als $f : [0, 12] \to \mathbb{R}$ dan is $h_1 = f \circ T_1 : [-2, 10] \to \mathbb{R}$, want bijvoorbeeld $h_1(11) = f(13)$ bestaat dan niet.

Voorbeeld 13.1.5 (Schalen langs y-as)**.**

Een functie f kan je langs de y-as herschalen door (langs *links*) samen te stellen met functies zoals $T_1 : x \mapsto 2x$ en $T_2 : x \mapsto x/2$. Dit resulteert in volgende functies $h_1 : x \mapsto (T_1 \circ f)(x) = 2f(x)$ en $h_2 : x \mapsto (T_2 \circ f)(x) = f(x)/2$:



Merk op dat schalen met een negatieve factor zorgt voor een spiegeling rond de x-as:

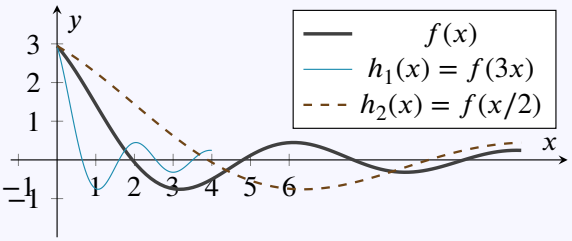


CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Transformaties van functies

Voorbeeld 13.1.6 (Schalen langs de x-as)**.**

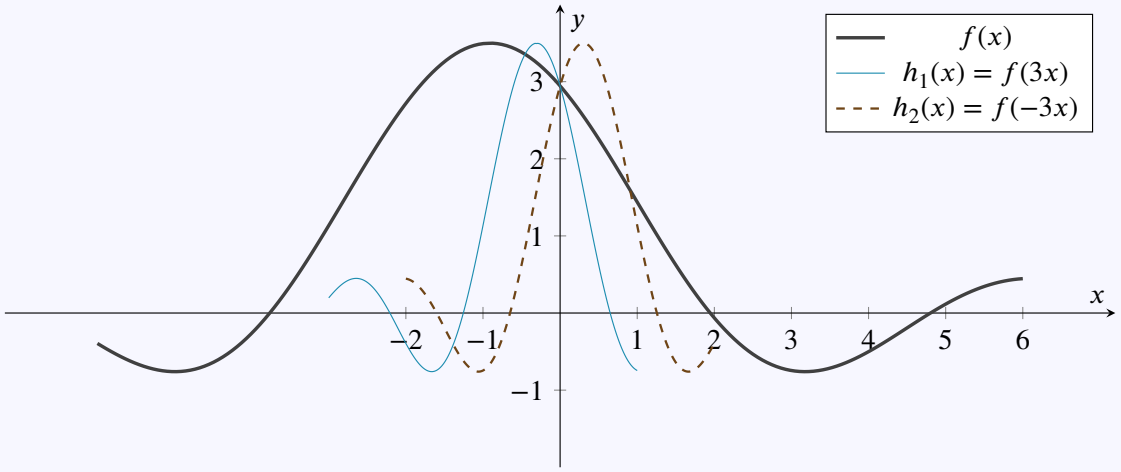
Een functie f kan je langs de x-as herschalen door (langs *rechts*) samen te stellen met de functies zoals $T_1 : x \mapsto 3x$ en $T_2 : x \mapsto x/2$. Dit resulteert in volgende functies $h_1 : x \mapsto (f \circ T_1)(x) = f(3x)$ en $h_2 : x \mapsto (f \circ T_2)(x) = f(x/2)$:



Het domein van $f \circ T_1$ is niet hetzelfde als het domein van f:

Als $f : [0, 12] \to \mathbb{R}$ dan is $h_1 = f \circ T_1 : [0, 4] \to \mathbb{R}$, want bijvoorbeeld $h_1(5) = f(15)$ bestaat dan niet.

Merk op dat schalen met een negatieve factor zorgt voor een spiegeling rond de y-as:



Oefening 13.1.1. Welke transformatie verschuift de grafiek van f met π eenheden naar beneden ?

$f \circ T$ met $T : x \mapsto x + \pi$, dus $x \mapsto f(x + \pi)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto x + \pi$, dus $x \mapsto f(x) + \pi$
$f \circ T$ met $T : x \mapsto x - \pi$, dus $x \mapsto f(x - \pi)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto x - \pi$, dus $x \mapsto f(x) - \pi$

Oefening 13.1.2.

Welke transformatie verschuift de grafiek van een functie f een halve eenheid naar links ?

CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Transformaties van functies

$f \circ T$ met $T : x \mapsto x - \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x - \frac{1}{2})$

$T \circ f$ met $T : x \mapsto x - \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x) - \frac{1}{2}$

$f \circ T$ met $T : x \mapsto x + \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x + \frac{1}{2})$

$T \circ f$ met $T : x \mapsto x + \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x) + \frac{1}{2}$

Oefening 13.1.3.

Hoe kan je de grafiek van een functie f met een factor 3 indrukken langs de y-as?

$f \circ T$ met $T : x \mapsto 3x$, dus $x \mapsto f(3x)$

$T \circ f$ met $T : x \mapsto 3x$, dus $x \mapsto 3f(x)$

$f \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{1}{3}x$, dus $x \mapsto f(\frac{1}{3}x)$

$T \circ f$ met $T : x \mapsto \frac{1}{3}x$, dus $x \mapsto \frac{1}{3}f(x)$

Oefening 13.1.4.

Hoe kan je de grafiek van een functie f uitrekken langs de x-as met een factor 2 ?

$f \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$, dus $x \mapsto f(2x)$

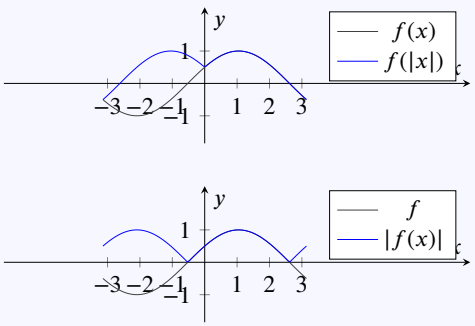
$T \circ f$ met $T : x \mapsto 2x$, dus $x \mapsto 2f(x)$

$f \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$, dus $x \mapsto f(x/2)$

$T \circ f$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$, dus $x \mapsto f(x)/2$

Voorbeeld 13.1.7 (Absolute waarde)**.**

Je kan een functie f ook samenstellen met de transformatie $T : x \mapsto |x|$. Dit resulteert in de functies $x \mapsto f(|x|)$ en $|f(x)|$. Onderstaande figuur toont telkens de grafieken:



CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Transformaties van functies

- De grafiek van $x \mapsto f(|x|)$ is gelijk aan de grafiek van $f(x)$ voor positieve x, en je spiegelt het deel voor positieve x over de y-as. Het resultaat is dus symmetrisch ten opzichte van de y-as, en dat is eenvoudig te begrijpen omdat negatieve x-waarden worden omgezet naar hun absolute waarde, voordat ze ingevoerd worden in f.

  In symbolen: $f(|-x|) = f(x) = f(|x|)$ voor $x \geq 0$.
  De eventuele waarden van f voor negatieve x spelen dus geen enkele rol meer in de functie $f(|x|)$.

- De grafiek van $x \mapsto |f(x)|$ komt overeen met de grafiek van f waarbij alle negatieve y-waarden, vervangen worden door hun tegengestelde.
  Dus, je spiegelt de negatieve onderste helft naar de positieve bovenste helft .
  De grafiek van $|f|$ heeft hierdoor meestal hoekpunten op de x-as. Dat zal later nog problemen opleveren bij de studie van afgeleiden.

CC BY-NC-SA 4.0

13.1.A Oefeningen transformaties van functies

13.1.A.1 Niveau 2

Oefening 13.1.5.

Gegeven zijn de drie reële functies:
$$\begin{array}{lll} f & : x & \mapsto x^2 \\ g & : x & \mapsto x+2 \\ h & : x & \mapsto 2x \end{array}$$

1. Schets op papier de grafiek van de functie f.

2. Schets op papier de grafiek van de functie $g \circ f$.

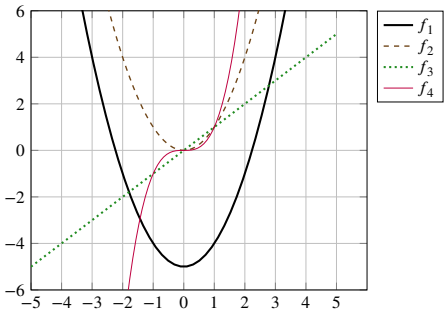
3. Schets op papier de grafiek van de functie $h \circ f$.

4. Schets op papier de grafiek van de functie $f \circ g$.

5. Schets op papier de grafiek van de functie $f \circ h$.

Oefening 13.1.6.

1. Onderstaande figuur toont de grafieken van f_1, f_2, f_3 en f_4:

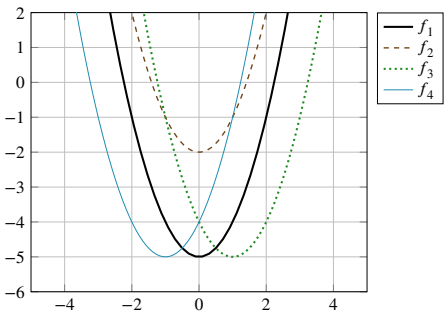


Welke van bovenstaande functies is gelijk aan $f_1 \circ T_1$ met $T_1 : x \mapsto x$?

Meerkeuze:

(a) f_1
(b) f_2
(c) f_3
(d) f_4

2. Onderstaande figuur toont de grafieken van f_1, f_2, f_3 en f_4:



CC BY-NC-SA 4.0

13.1.A Oefeningen transformaties van functies

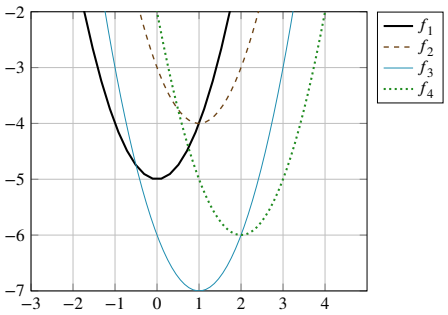
Welke van bovenstaande functies is gelijk aan $f_1 \circ T_1 \circ T_2$ met $T_1 : x \mapsto x$ en $T_2 : x \mapsto x - 1$?

Meerkeuze:

(a) f_1 (c) f_3

(b) f_2 (d) f_4

3. Onderstaande figuur toont de grafieken van f_1, f_2, f_3 en f_4:



Welke van bovenstaande functies is gelijk aan $T_3 \circ f_1 \circ T_1 \circ T_2$ met $T_1 : x \mapsto x - 1$, $T_2 : x \mapsto x - 1$ en $T_3 : x \mapsto x - 1$?

Meerkeuze:

(a) f_1 (c) f_3

(b) f_2 (d) f_4

Oefening 13.1.7. Teken (zonder gebruik van een grafisch rekenmachine) de grafiek van de functies met volgende voorschriften

1. $f(x) = |\sin x|$

2. $f(x) = \sin |x|$

Oefening 13.1.8. Stel f een functie waarvan de grafiek gegeven is. Is het mogelijk om in het algemeen te beschrijven hoe de grafiek van de volgende functies eruit zien? Zo ja, leg uit.

1. $g(x) = |f(x)|$ | Ja | Nee |

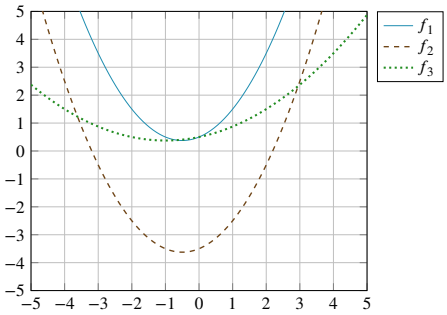
2. $g(x) = f(|x|)$ | Ja | Nee |

Oefening 13.1.9.

1. Bekijk onderstaande grafiek:

CC BY-NC-SA 4.0

13.1.A Oefeningen transformaties van functies



Selecteer alle juiste gelijkheden:

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) $f_1 = T \circ f_2$ met $T : x \mapsto x + 4$

(b) $f_1 = f_3 \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$

(c) $f_1 = f_2 \circ T$ met $T : x \mapsto x - 4$

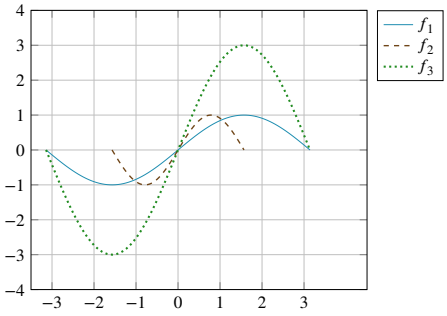
(d) $f_2 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto x - 4$

(e) $f_2 = T \circ f_1$ met $T : x \mapsto x - 4$

(f) $f_3 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$

(g) $f_3 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$

2. Bekijk onderstaande grafiek:



Selecteer alle juiste gelijkheden:

Meerkeuze (selecteer alle correcte antwoorden):

(a) $f_1 = f_3 \circ T$ met $T : x \mapsto 3x$

(b) $f_1 = T \circ f_2$ met $T : x \mapsto x + 4$

(c) $f_1 = T \circ f_3$ met $T : x \mapsto \frac{x}{3}$

(d) $f_1 = f_2 \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$

(e) $f_2 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$

CC BY-NC-SA 4.0

13.1.A Oefeningen transformaties van functies

(f) $f_2 = T \circ f_1$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$

(g) $f_3 = T \circ f_1$ met $T : x \mapsto 3x$

(h) $f_3 = f_1 \circ T$ met $T : x \mapsto 3x$

Oefening 13.1.10. Teken (zonder gebruik van een grafisch rekenmachine) de grafiek van de functies met volgend voorschrift. Vertrek telkens van de grafiek van de absolute waarde functie $|x|$.

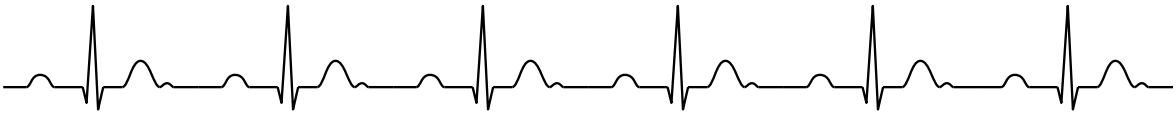
1. $f(x) = |x - 3|$
2. $f(x) = |x| - 3$
3. $f(x) = |x + 3|$
4. $f(x) = -|x - 3|$
5. $f(x) = ||x| - 3|$
6. $f(x) = ||x| + 3|$

Oefening 13.1.11. Teken (zonder gebruik van een grafisch rekenmachine) de grafiek van de rationale en irrationale functies met volgend voorschrift.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$
2. $f(x) = \sqrt{x + 2} - 1$
3. $f(x) = \dfrac{-3}{x}$
4. $f(x) = \sqrt{2x - 2}$

CC BY-NC-SA 4.0

13.2 Periodieke functies



Definitie 13.2.1 (Periodieke functie)**.**

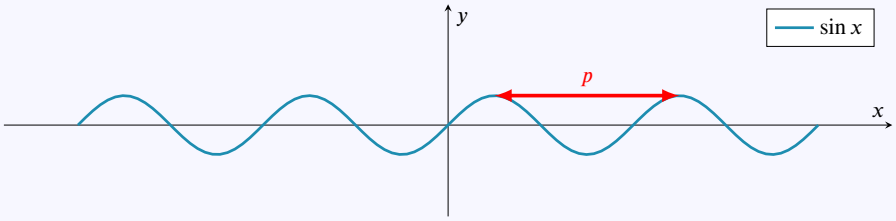
We noemen een reële functie f **periodiek** (soms ook **periodisch**) als er een getal $c > 0$ bestaat zodat

$$\text{voor alle } x \in \mathbb{R} : f(x+c) = f(x)$$

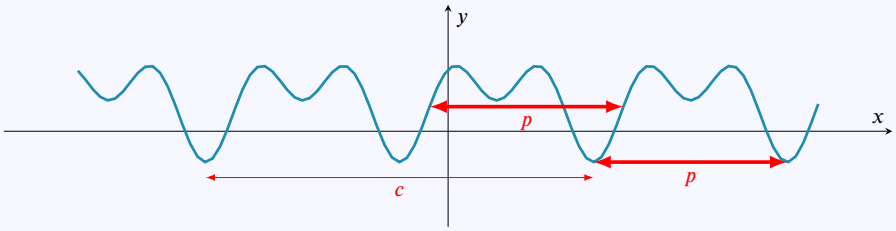
De **periode** p van f is de *kleinste* strikt positieve c waarvoor deze eigenschap geldt.

Voorbeeld 13.2.1 (Basisvoorbeeld)**.**

De goniometrische functies zoals sinus, cosinus,... vormen de standaardvoorbeelden voor periodieke functies, met periode $p = 2\pi$.

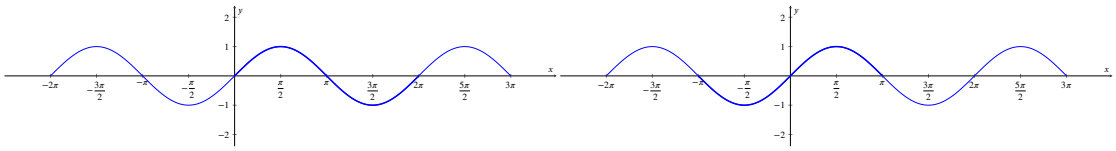


Maar ook sommen van sinussen en cosinussen zijn periodieke functies:

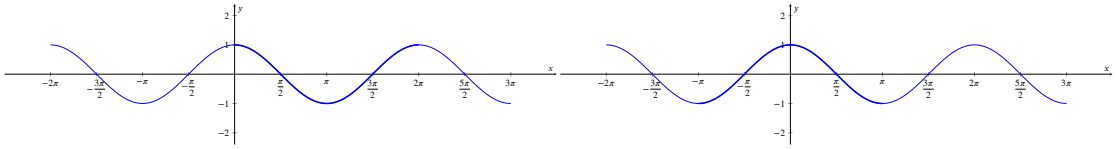


Oefening 13.2.1.

1. De functie $\sin(x)$ met periode 2π



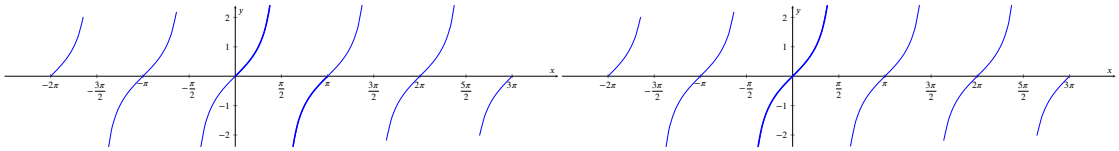
2. De functie $\cos(x)$ met periode 2π



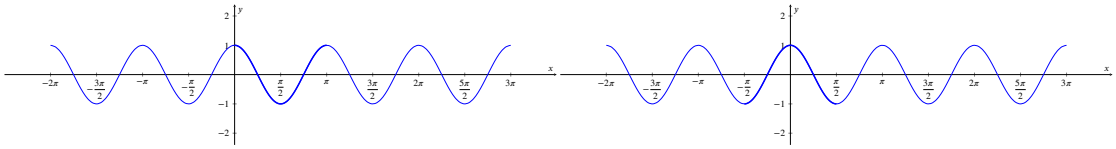
CC BY-NC-SA 4.0

13.2 Periodieke functies

3. De functie $\tan(x)$ met periode π



4. De functie $\cos(2x)$ met periode π



Opmerking 13.2.1.

- De grafiek van een periodieke functie met periode p herhaalt zich dus op elk interval van lengte p.
- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *elke* x, dan is ook $f(x-c) = f(x)$ omdat $f(x-c) = f((x-c)+c) = f(x)$.
- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *elke* x, dan is ook $f(x+2c) = f((x+c)+c) = f(x+c) = f(x)$.
- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *elke* x, dan is dus ook $f(x+kc) = f(x)$ voor elke geheel getal k.
- Als $f(x+c) = f(x)$ voor *sommige* x, dan zegt dat niets over het al dan niet periodiek zijn van f.
- Soms spreekt men ook af om elke c waarvoor altijd geldt dat $f(x+c) = f(x)$ een *periode* te noemen van f. Met die afspraak is *de* periode van een periodieke functie dus niet uniek bepaald.

Omdat voor een periodieke functie f met periode p voor alle x geldt dat $f(x+p) = f(x)$, volstaat het f te kennen op een interval van de vorm $[a, a+p[$, met a eender welk getal. In de praktijk blijkt het handig om te werken met intervallen van de vorm $[0, p[$, of $[-p/2, p/2[$.

Eigenschap 13.2.1.

- Als je een periodieke functie f met periode p kent op een halfopen interval van lengte p, dan ken je ze overal.
- Elke functie op een halfopen interval van lengte p kan op unieke wijze worden uitgebreid tot een periodieke functie op $\mathbb{R}$.

We kunnen een functie f die enkel gedefinieerd is op een interval $[a, a+p[$ uitbreiden tot $\mathbb{R}$ als volgt. Een willekeurig reëel getal x schrijven we als $x = x_0 + kp$, met $x_0 \in [a, a+p[$ en $k \in \mathbb{Z}$. Dan definiëren we:

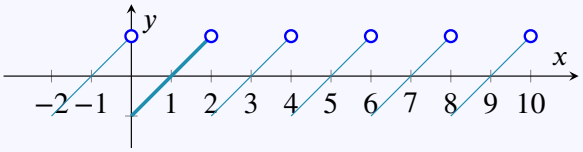
$$f(x) = f(x_0 + kp) \overset{\text{def}}{=} f(x_0)$$

Voorbeeld 13.2.2 (Basisvoorbeeld uitbreiden van functies)**.**

Beschouw de functie $f : [0, 2[\to \mathbb{R} : x \mapsto x-1$. We kunnen die functie op unieke wijze uitbreiden tot een periodieke functie op $\mathbb{R}$ door te definiëren dat $f(x+2k) \overset{\text{def}}{=} f(x)$ voor alle $x \in [0, 2[$ en $k \in \mathbb{Z}_0$.

CC BY-NC-SA 4.0

13.2 Periodieke functies



Merk op dat de periodieke uitbreiding van f sprongen vertoont. De periodieke uitbreiding van f is *niet continu*.

CC BY-NC-SA 4.0

13.2.A Oefeningen periodieke functies

13.2.A.1 Niveau 1

Oefening 13.2.2. Welke functies zijn periodiek?

1. periodiek | niet periodiek $x \mapsto 2\cos(x)$

2. periodiek | niet periodiek $x \mapsto x^2$

3. periodiek | niet periodiek $x \mapsto \cos(2x)$

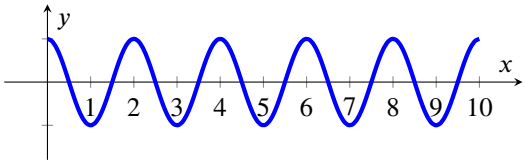
4. periodiek | niet periodiek $x \mapsto \sin(4x)$

5. periodiek | niet periodiek $x \mapsto 4$

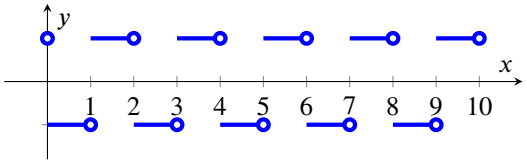
13.2.A.2 Niveau 2

Oefening 13.2.3. Voor welk van de volgende functies geldt dat $f(x+2) = f(x)$ voor elke $x \in \mathbb{R}$? We veronderstellen hierbij dat de functies gedefinieerd zijn op heel $\mathbb{R}$.

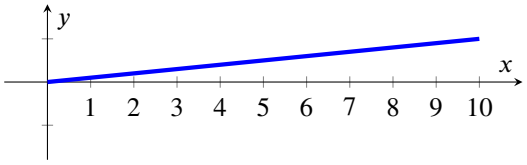
1. Juist | Fout



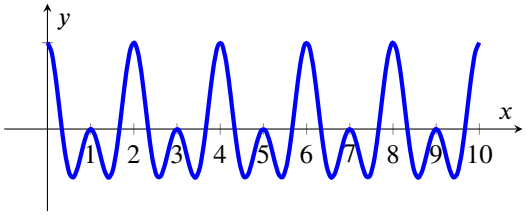
2. Juist | Fout



3. Juist | Fout



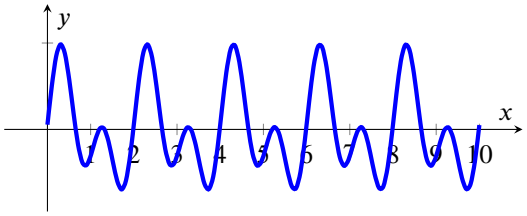
4. Juist | Fout



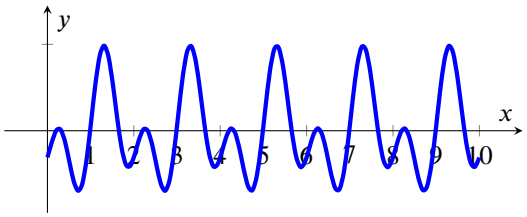
CC BY-NC-SA 4.0

13.2.A Oefeningen periodieke functies

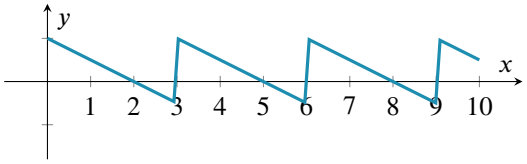
5. Juist | Fout



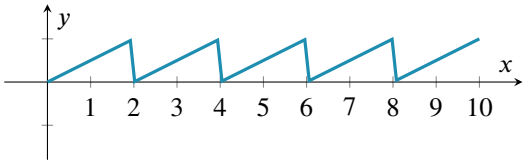
6. Juist | Fout



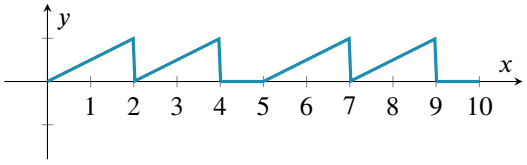
7. Juist | Fout



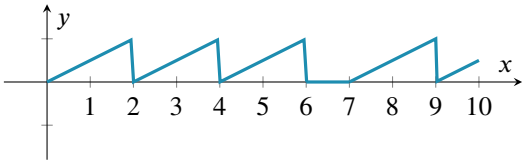
8. Juist | Fout



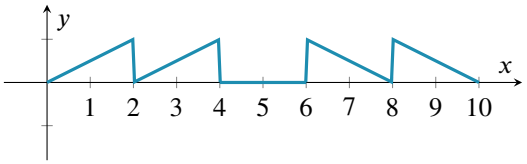
9. Juist | Fout



10. Juist | Fout



11. Juist | Fout



Oefening 13.2.4. Beschouw de functie $f : [-2,2[\to \mathbb{R} : x \mapsto 4 - x^2$. Teken de grafiek van de periodiek uitgebreide functie van deze f tot $\mathbb{R}$, en bereken volgende functiewaarden:

1. $f(0) = \ldots\ldots$

2. $f(2) = \ldots\ldots$

3. $f(6) = \ldots\ldots$

4. $f(10) = \ldots\ldots$

5. $f(12) = \ldots\ldots$

6. $f(120) = \ldots\ldots$

7. $f(2^{2020}) = \ldots\ldots$

8. $f(2^{2021}) = \ldots\ldots$

9. $f(2 + 2^{2020}) = \ldots\ldots$

10. $f(2 \cdot (1 + 2^{1302})) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Inverse functies

Een functie f is een machine die een invoer x omzet in een uitvoer $f(x)$. Die uitvoer wordt soms ook met de letter y aangeduid en dan schrijven we $y = f(x)$. De machine berekent dus voor elke x een bijhorende y. Men kan zich afvragen of er ook een 'undo-machine' bestaat die de berekening van f ongedaan maakt, en de uitvoer y terug omzet in de invoer x.

We noemen een functie g **een inverse functie** voor f als g uit elke uitkomst y van f terug de input x kan berekenen: $g(y) = x$. Omdat $y = f(x)$, kunnen we $g(y) = x$ ook schrijven als $g(f(x)) = x$. Als een dergelijke functie g bestaat noemen we f *inverteerbaar* en g *de inverse functie* van f (eigenlijk *links*inverteerbaar en *linker*inverse maar dat is voorlopig niet belangrijk).

We bekijken eerst enkele voorbeelden. De voorbeelden tonen ook aan dat het voorschrift van de inverse van een functie f in een aantal gevallen te bepalen is uit het voorschrift van f. Het vinden van de inverse functie komt eigenlijk neer op het *oplossen van een vergelijking*: vind voor een gegeven functie $y = f(x)$ een nieuwe formule g die voor elk getal y de unieke $x = g(y)$ oplevert waarvoor geldt dat $f(x) = f(g(y)) = y$. Die functie levert dus voor elke y de unieke oplossing van de vergelijking $f(x) = y$.

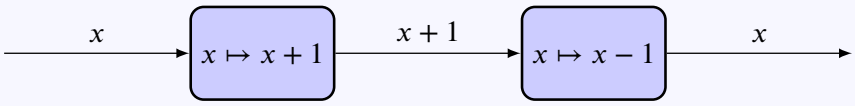
Voorbeeld 13.3.1. Zijn volgende functies inverteerbaar? Welke functie is de inverse?

1. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x + 1$

Uitwerking:

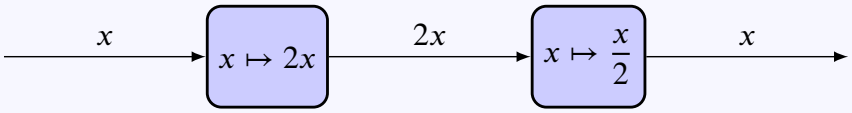
Deze functie f telt bij elk getal één op, dat kan dus ongedaan gemaakt worden door die één er weer af te trekken. De undo-functie van 'plus één' is dan uiteraard 'min één'. In formules: de inverse functie van $x \mapsto x + 1$ is de functie $x \mapsto x - 1$. Of nog, met de notatie $y = f(x)$: voor de functie $f(x) = x + 1$ geldt dan $y = x + 1$. Daaruit kunnen we berekenen dat $x = y - 1$. Als we de inverse functie g noemen, moeten we dus $g(y) = y - 1$ berekenen om de oorspronkelijke x terug te krijgen. Als we die functie g nu toch ook schrijven met als variabele x wordt dat $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x) = x - 1$. We kunnen dan nagaan dat $g(f(x))$ inderdaad terug x geeft: $g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1) - 1 = x$.

Merk op dat we uit het verband $f(x) = y$ een voorschrift voor g hebben gevonden door 'op te lossen naar x', en dus een formule kregen van de vorm $x = g(y)$. Daarna hebben we, omdat dat gebruikelijk is, in de definitie van g de variabele toch weer terug x genoemd en niet y.



2. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$

Uitwerking: De undo-functie van 'vermenigvuldigen met twee' is 'delen door twee'. Dus $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x/2$ is de inverse functie van f, want $g(f(x)) = g(2x) = (2x)/2 = x$.



3. Fout ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2$

Uitwerking: Alle input wordt naar 2 gestuurd. Dat kan niet ongedaan gemaakt worden, want als je enkel de output 2 kent, kan je natuurlijk niet meer weten wat er precies in de machine werd gestopt: *elke input* geeft output 2.

Iets wiskundiger vinden we dat $f(x) = y = 2$ voor alle x, en dit functievoorschrift kan niet herschreven worden naar een voorschrift van de vorm $x = g(y)$, aangezien deze formule geen x bevat.

CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Inverse functies

4. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$

Uitwerking: De inverse is $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$, en is dus gelijk aan f. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x$ is dus haar eigen inverse.

5. Juist ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x + 3$

Uitwerking: De inverse is $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x-3}{2}$.

Deze f stuurt x naar $y = 2x + 3$. Uit $y = 2x + 3$ kunnen we echter eenvoudig x berekenen door de 3 naar het ander lid te brengen en te delen door twee: $y = 2x + 3 \iff y - 3 = 2x \iff \dfrac{y-3}{2} = x \iff x = \dfrac{y-3}{2}$.

Dus als we voor g de functie nemen die $y \mapsto g(y) = \dfrac{y-3}{2}$ dan geldt inderdaad dat $g(f(x)) = g(2x+3) = \dfrac{(2x+3)-3}{2} = x$.

De letter die we gebruiken als variabele van de inverse functie is niet belangrijk, we kunnen de inverse functie even goed noteren als $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{x-3}{2}$

6. Fout ✓ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

Uitwerking: Er bestaat geen inverse, want de input 2 en de input -2 worden beide afgebeeld op $f(2) = f(-2) = 4$. De output 4 hoort dus zowel bij input 2 als bij -2. Er kan geen inverse functie g bestaan, want die moet dan 4 zowel op 2 afbeelden als op -2, en dat is onmogelijk want een functie kan een getal maar afbeelden op één ander getal.

We noemen twee functies *inversen* van elkaar, als ze elkaars actie ongedaan maken. We eisen dus niet alleen dat g de actie van de functie f ongedaan maakt, maar ook dat f op zijn beurt de actie van g ongedaan maakt. Als f en g inverse functies zijn van elkaar dan noteren we g ook als f^{-1}, *de inverse functie* van f. Omdat het precieze domein en codomein bij inverse functies erg belangrijk kunnen zijn, gebruiken we hier steeds de uitgebreide notatie $f : A \to B$ voor functies.

Definitie 13.3.1 (Inverse functie)**.**

Als $A, B \subset \mathbb{R}$, en $f : A \to B$ en $g : B \to A$ reële functies zijn, dan geldt:

- we noemen f en g **inverse functies van elkaar** (en f de **inverse** van g en g de **inverse** van f) als

$$g(f(x)) = x \quad \text{voor elke } x \in A \text{ en}$$
$$f(g(x)) = x \quad \text{voor elke } x \in B$$

- we noemen f **inverteerbaar** als er een inverse functie bestaat.
- we noteren de (unieke) **inverse functie** van een inverteerbare functie $f : A \to B$ als

$$f^{-1} : B \to A : x \mapsto f^{-1}(x).$$

Dan geldt voor alle x in A, en alle y in B:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$
$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y$$

CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Inverse functies

Merk op dat spreken over *de* inverse functie alleen zinvol is als een inverse functie uniek is. Dat is echter het geval, zoals blijkt uit volgende eigenschap:

Eigenschap 13.3.1.

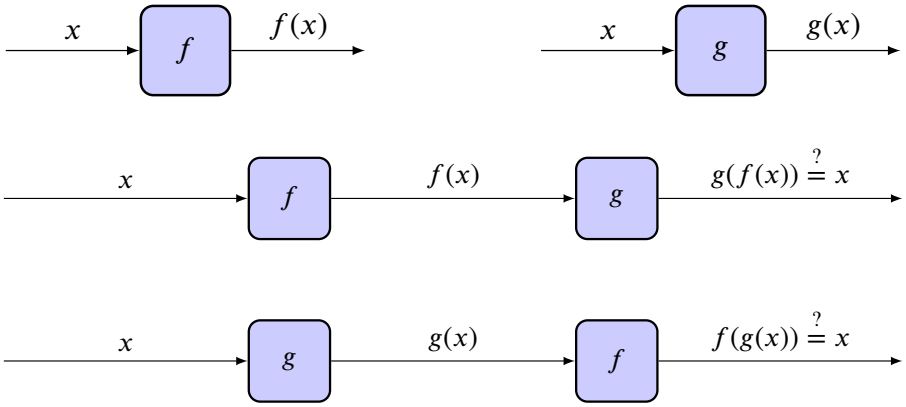
- Als een functie een inverse functie heeft, dan is die inverse uniek.
- Voor een inverteerbare functie $f : A \to B$ geldt voor elke $x \in A$ en $y \in B$ dat

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

Je kan de voorwaarde voor inverse functies ook schrijven als

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{voor elke } x \in A \text{ en}$$
$$(f \circ g)(x) = x \quad \text{voor elke } x \in B$$

Twee functies zijn dus elkaars inverse als hun samenstelling de identieke functie $x \mapsto x$ is, dus iedere x afbeeldt op zichzelf. De grafiek van de identieke functie is de eerste bissectrice in het vlak met vergelijking $y = x$. Schematisch wordt dat:



Opmerking 13.3.1.

- Niet elke functie is inverteerbaar. Voor een gegeven functie f bestaat f^{-1} dus niet altijd. Bijvoorbeeld de functie $x \mapsto 1$ heeft geen inverse.
- Je mag kiezen welke letter je neemt als variable voor de inverse functie. Neem je bijvoorbeeld de variabele y voor f^{-1} dan noteren we

$$f^{-1} : B \to A : y \mapsto f^{-1}(y)$$

en dat betekent precies hetzelfde als

$$f^{-1} : B \to A : x \mapsto f^{-1}(x)$$

Het gebruik van de letter y is afhankelijk van de context eerder nuttig of eerder verwarrend. Het is daarbij belangrijk op te merken dat $x \mapsto x^2, y \mapsto y^2$ en $z \mapsto z^2$ drie keer *precies* dezelfde functie zijn. De *naam van de variable* veranderen, verandert de *functie* niet.

Voorbeeld 13.3.2. De functies $f : x \mapsto \frac{1}{2}x+1$ en $g : x \mapsto 2x-2$ zijn elkaars inverse. We kunnen dat

CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Inverse functies

algebraïsch bekijken door $f(g(x))$ en $g(f(x))$ te berekenen en aan te tonen dat beide uitdrukkingen gelijk zijn aan x:

$$f(g(x)) = f(2x-2) = \frac{1}{2}(2x-2)+1 = x \tag{5}$$

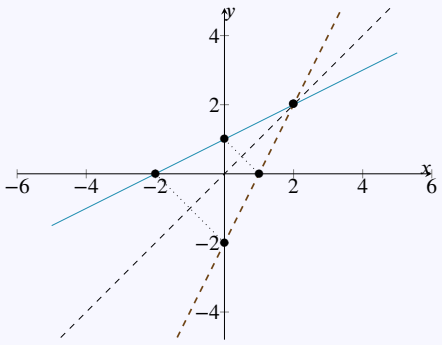
$$g(f(x)) = g(\frac{1}{2}x+1) = 2(\frac{1}{2}x+1)-2 = x \tag{6}$$

We kunnen dus schrijven dat $g = f^{-1}$ en dat $f = g^{-1}$.

We kunnen ook *meetkundig* onderzoeken wat dat betekent voor de grafiek van f en g.

Onderstaande tabel en grafiek van de functies f en g tonen dat voor elk paar (x, y) op de grafiek van f, het punt (y, x) op de grafiek van g ligt, en omgekeerd. De grafiek van g krijgen we dus door in de grafiek van f de x en y van plaats te verwisselen. Grafisch komt dat overeen met spiegelen over de eerste bissectrice. De eerste bissectrice is de grafiek van $x \mapsto x$, dus de rechte met vergelijking $y = x$. Spiegelen ten opzichte van die bissectrice komt overeen met x en y omwisselen: het punt $(2, 3)$ wordt gespiegeld naar het punt $(3, 2)$.

$f : x \mapsto x/2+1$	$f^{-1} : x \mapsto 2x-2$
$(-4,-1)$	$(-1,-4)$
$(-2,0)$	$(0,-2)$
$(0,1)$	$(1,0)$
$(2,2)$	$(2,2)$
$(4,3)$	$(3,4)$



Voorbeeld 13.3.3. De functies $f : x \mapsto x+1$ en $g : x \mapsto x-1$ zijn inversen van elkaar.

We kunnen dat *algebraïsch* bekijken door $f(g(x)$ en $g(f(x))$ te berekenen, en aan te tonen dat beide uitdrukkingen gelijk zijn aan x:

$$f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)+1 = x \tag{7}$$

$$g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)-1 = x \tag{8}$$

We kunnen dus schrijven dat $g = f^{-1}$ en dat $f = g^{-1}$.

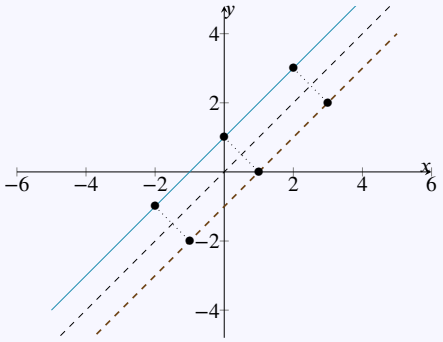
We kunnen ook *meetkundig* onderzoeken wat dat betekent voor de grafiek van f en g.

Onderstaande tabel en grafiek van de functies f en g toont dat voor elk paar (x, y) op de grafiek van f, het punt (y, x) op de grafiek van g ligt, en omgekeerd. De punten (x, y) van de grafiek van f komen dus overeen met de punten (y, x) van de grafiek van g. Meetkundig betekent x en y van plaats verwisselen spiegelen over de eerste bissectrice.

CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Inverse functies

$f : x \mapsto x+1$	$f^{-1} : x \mapsto x-1$
$(-4,-3)$	$(-3,-4)$
$(-3,-2)$	$(-2,-3)$
$(-2,-1)$	$(-1,-2)$
$(-1,0)$	$(0,-1)$
$(0,1)$	$(1,0)$
$(1,2)$	$(2,1)$
$(2,3)$	$(3,2)$
$(3,4)$	$(4,3)$
$(4,5)$	$(5,4)$



Opmerking 13.3.2. Als f^{-1} bestaat, dan wordt de grafiek van f^{-1} bekomen door de grafiek van f te spiegelen rond de eerste bissectrice.

Om de inverse functie te vinden kunnen we volgend stappenplan volgen:

Algoritme 13.3.2 (Berekenen de inverse functie)**.**

In sommige gevallen kunnen we een inverse functie expliciet berekenen:

(a) Schrijf de functie $f : A \to B : x \mapsto f(x)$ in de vorm $y = f(x)$.

(b) Probeer x op te lossen uit $y = f(x)$.
Dit betekent: probeer x te schrijven als functie van y.
Op die manier vind je een functie g zodat $x = g(y)$.

(c) Deze g is de inverse functie: $f^{-1} : B \to A : y \mapsto g(y)$.

(d) Vervang indien gewenst de variabele van de inverse functie door x.

(e) Die nieuwe formule geeft dan $f^{-1} : B \to A : x \mapsto g(x)$.

Voorbeeld 13.3.4. Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x+3$.

$$y = 5x+3 \iff y-3 = 5x \iff \frac{y-3}{5} = x$$

De inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x+3$ is dus $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto \frac{y-3}{5}$ of ook $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x-3}{5}$.

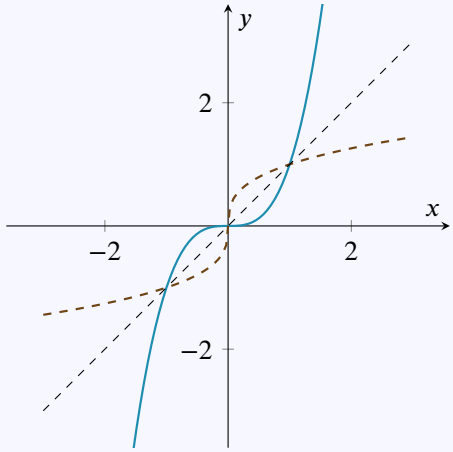
Voorbeeld 13.3.5. Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$.

$$y = x^3 \iff y^{\frac{1}{3}} = x$$

De inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ is dus $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{\frac{1}{3}}$ of ook $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$.

CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Inverse functies

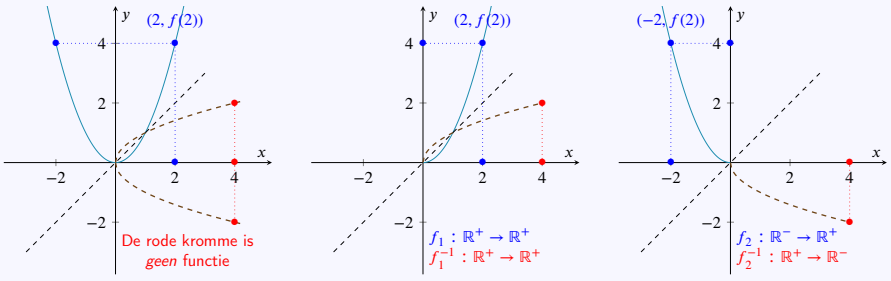


Voorbeeld 13.3.6. Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.

$$y = x^2 \iff x = \pm\sqrt{y}$$

Deze functie is *niet inverteerbaar*:

- Voor $y < 0$ bestaat de vierkantswortel niet. De oplossing voor dit probleem is het codomein beperken tot het beeld $\mathbb{R}^+$. Wanneer we het codomein wijzigen krijgen we een andere functie, dus geven we die een andere naam: $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$
- Voor $y > 0$ zijn er twee oplossingen, $x = \sqrt{y}$ en $x = -\sqrt{y}$. Er zijn 2 mogelijke manieren om toch een inverse functie te definiëren:
  - Als je het domein van $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ beperkt tot $\mathbb{R}^+$, dus $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ dan is $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$.
  - Als je het domein van $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ beperkt tot $\mathbb{R}^-$, dus $f_2 : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ dan is $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : x \mapsto -\sqrt{x}$.



Het is dus mogelijk dat een functie f geen inverse heeft, maar dat een beperking van die functie tot een kleiner (co)domein – wat een nieuwe functie oplevert – *wel* een inverse heeft.

Opmerking 13.3.3 (Grafisch criterium voor inverteerbaarheid)**.**

Uit bovenstaande voorbeelden leiden we volgend verband af tussen de inverteerbaarheid van een functie en haar grafiek:

Een functie f is *inverteerbaar*
als en slechts als

CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Inverse functies

elke horizontale rechte $y = c$ met c in het codomein van f snijdt de grafiek van f *in juist één punt*.

Als zo'n horizontale rechte in meer dan één punt snijdt met de grafiek van f dan kan je dikwijls een inverteerbare functie verkrijgen door het *domein* van f te beperken.

Als zo'n horizontale rechte geen snijpunt heeft met de grafiek van f dan kan je dikwijls een inverteerbare functie verkrijgen door het *codomein* van f te beperken.

Typische voorbeelden zijn de inverse functies van de exponentiële en goniometrische functies.

Voorbeeld 13.3.7 (Logaritmische en exponentiële functies zijn elkaars inversen)**.**

Bereken indien mogelijk de inverse van $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2^x$.

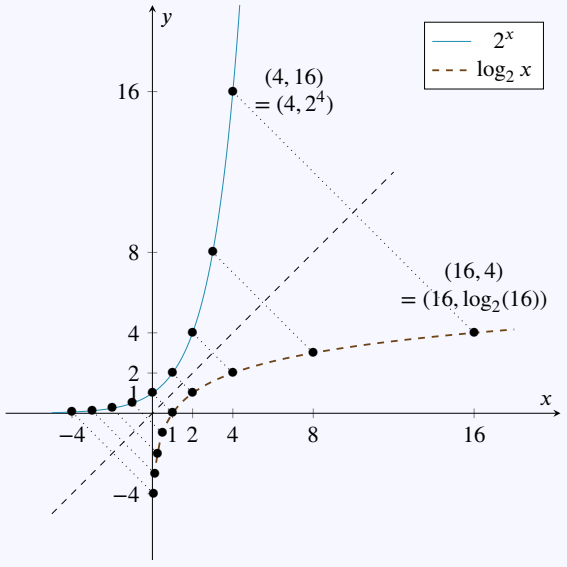
Deze functie is *niet inverteerbaar* want voor $y \leq 0$ bestaat er geen x zodat $y = 2^x$. We kunnen een inverteerbare functie vinden door het *codomein* te beperken tot het beeld van f, namelijk $\mathbb{R}_0^+$.

Dan bestaat er wel voor elk getal $y \in \mathbb{R}_0^+$ een unieke $x \in \mathbb{R}$ zodat $y = 2^x$. We noemen deze x de *2-logaritme* van y, en noteren dat als $x = \log_2(y)$. Er geldt dus

$$y = 2^x \iff x = \log_2(y)$$

De functies $\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto 2^x$ en $\log_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \log_2(x)$ zijn elkaars inverse.

De grafiek van de inverse functie is de spiegeling rond de eerste bissectrice. Inderdaad, spiegelen over de eerste bissectrice komt overeen met (x, y) vervangen door (y, x):



Voorbeeld 13.3.8 (Sinusfunctie)**.**

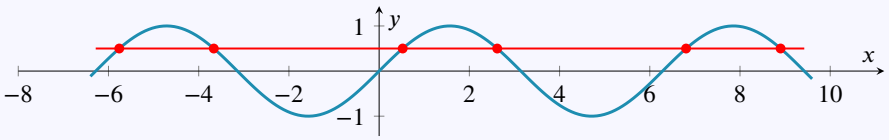
We kunnen ons afvragen of er een inverse functie bestaat voor de sinusfunctie

$$\sin : \mathbb{R} \mapsto [-1, 1] : x \mapsto \sin x\,.$$

In tegenstelling tot de meeste voorbeelden die we zijn tegengekomen, is het hier minder makkelijk om uit de formule $y = f(x)$ een verband $x = g(y)$ vinden. We kunnen hier daarentegen aantonen dat er *geen inverse* kan bestaan voor de sinusfunctie. Uit de gekende grafiek van de sinusfunctie

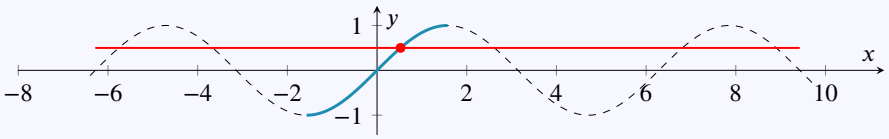
CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Inverse functies



volgt wegens vorige opmerking dat de sinus niet inverteerbaar is: iedere horizontale rechte op een hoogte tussen -1 en 1 snijdt de grafiek van de sinus immers meer dan één keer.

Het probleem kan worden opgelost door het *domein* te beperken tot een goed gekozen interval, bijvoorbeeld $[-\pi/2, \pi/2]$. Op dit interval heeft de sinus wel een inverse.



De verdere studie van dit soort inverse functies leidt tot de zogenaamde cyclometrische functies.

CC BY-NC-SA 4.0

13.3.A Oefeningen inverse functies

13.3.A.1 Niveau 2

Oefening 13.3.1. Ga na welke van de volgende functies inverteerbaar zijn. Indien een functie niet inverteerbaar is, bepaal dan het grootst mogelijke domein waarop een beperking van de functie wel inverteerbaar is. Bepaal, eventueel na het domein te beperken, de inverse functie en maak telkens een schets van de functie en haar inverse.

1. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$. Is deze functie inverteerbaar? Ja | Nee

2. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$. Is deze functie inverteerbaar? Ja | Nee

3. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto |x|$. Is deze functie inverteerbaar? Ja | Nee

4. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2 - 2x + 1$. Is deze functie inverteerbaar? Ja | Nee

5. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \mapsto \dfrac{x+2}{x-3}$. Is deze functie inverteerbaar? Ja | Nee

Oefening 13.3.2. Voor welke $m, c \in \mathbb{R}$ is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto mx + c$ inverteerbaar?

13.3.A.2 Niveau 3

Oefening 13.3.3. Zijn de volgende functies met meervoudig functievoorschrift inverteerbaar? Zo ja, bepaal dan de inverse functie. Maak om te beginnen een grafiek van de gegeven functie.

1. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{als } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{als } x > 0 \end{cases}$ is inverteerbaar | niet inverteerbaar .

2. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{als } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{als } x > 1 \end{cases}$ is inverteerbaar | niet inverteerbaar .

3. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$ is inverteerbaar | niet inverteerbaar

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

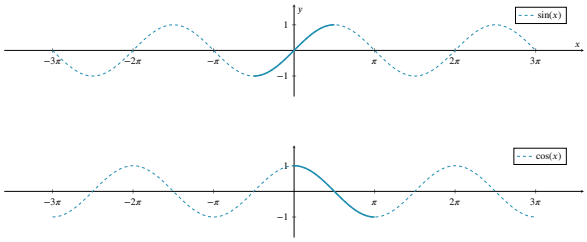
Module 14
Cyclometrische functies

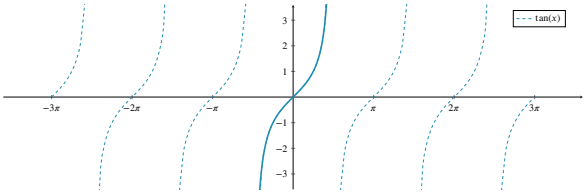
(Versie 2026/11/23H.2)

14.1 Cyclometrische functies

We bestuderen de *inverse functies* van de gekende functies sinus, cosinus en tangens. We zoeken dus niet de sinus van een bepaald getal x (dus niet r zodat $r = \sin x$), maar net het omgekeerde: we krijgen $r \in [-1,1]$ en zoeken x zodat $\sin x = r$. Dat is enigszins subtiel omdat er natuurlijk *meerdere* dergelijke getallen x bestaan. Voor $r = 0$ weten we bijvoorbeeld dat $\sin(0) = \sin(\pi) = \sin(-\pi) = \sin(2\pi) = \sin(3\pi) = 0$.

Om dit probleem op te lossen kijken we eerst naar de grafieken van sin, cos en tan:





Op de grafiek kan je zien dat, wanneer we het domein van sin beperken tot $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *wel* geldt dat voor elke $r \in [-1,1]$ er *één unieke* x is zodat $\sin x = r$. Om dezelfde reden spreken we af om het domein van cos te beperken tot $[0,\pi]$ en dat van tan tot $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

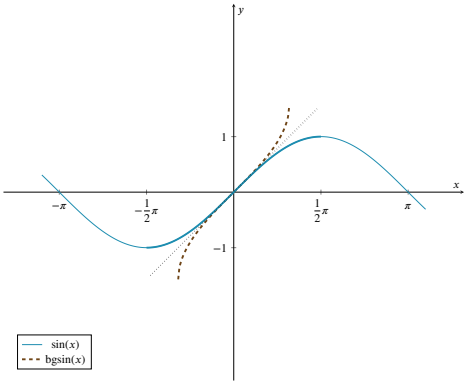
Definitie 14.1.1 (Cyclometrische functies)**.** Volgende **cyclometrische functies** zijn de inversen van de goniometrische functies als we het domein van die goniometrische functies gepast beperken:

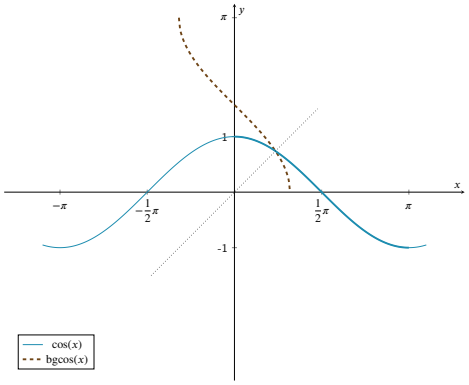
$$\text{bgsin} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : x \mapsto \text{bgsin}(x) \quad \textit{is invers van} \quad \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1] : x \mapsto \sin(x)$$

$$\text{bgcos} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] : x \mapsto \text{bgcos}(x) \qquad \cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1] : x \mapsto \cos(x)$$

$$\text{bgtan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: x \mapsto \text{bgtan}(x) \qquad \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \tan(x)$$

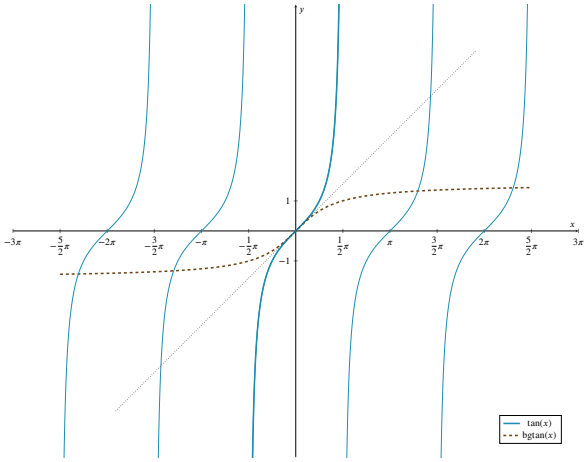
We bekomen de *grafiek* van de cyclometrische functies door het domein van de goniometrische functies te beperken, en de grafiek te spiegelen over de eerste bissectrice:



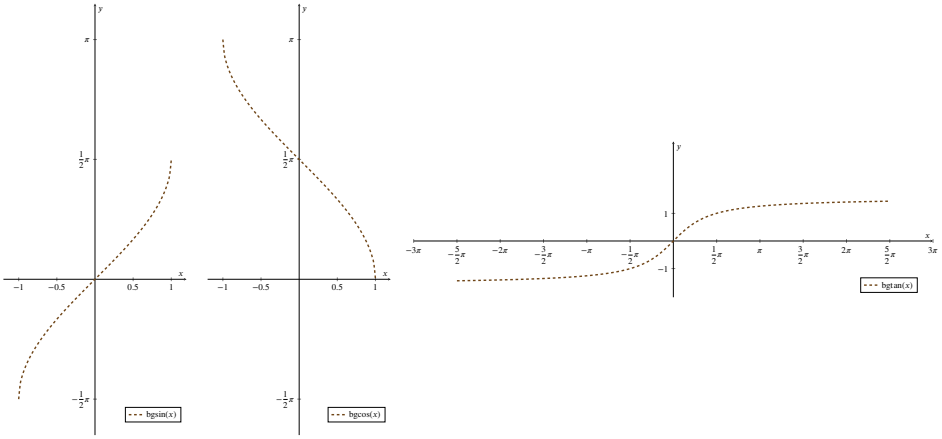


CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Cyclometrische functies



en dat resulteert in volgende grafieken van bgsin, bgcos en bgtan:



Opmerking 14.1.1.

- Cyclometrische functies geven *altijd* de waarde van een hoek uitgedrukt in radialen.
- De naam *boog*sinus komt van het feit dat de boogsinus de lengte geeft van de *boog* met een gegeven sinus. Men gebruikt zowel de notaties bgsin, Bgsin, arcsin als asin.
- De boogsinus en boogtangens is *altijd* een getal tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$, en dat is dus *altijd* een hoek in kwadrant I of IV.
- De boogcosinus van een getal is *altijd* een getal tussen 0 en π, en dat is dus *altijd* een hoek in kwadrant I of II.
- Zoals steeds voor inverse functies geldt dat de grafiek van de sin en bgsin elkaars *spiegelbeeld* zijn over de eerste bissectrice $y = x$. Idem voor cos en bgcos, en tan en bgtan.
- bgsin en bgcos zijn slechts gedefinieerd op het interval $[-1, 1]$.
- bgtan is gedefinieerd op $\mathbb{R}$.
- bgsin en bgtan zijn *stijgende* functies, bgcos is een *dalende* functie.
- Soms wordt ook de standaard wiskunde notatie voor inverse functies $\sin^{-1}(x)$ gebruikt. Meestal wordt dat echter vermeden omdat er verwarring mogelijk is met $(\sin(x))^{-1} = \dfrac{1}{\sin(x)}$ wat iets

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Cyclometrische functies

heel anders is. De verwarring is fundamenteler bij de goniometrische functies dan elders omwille van de historisch gegroeide conventie om $\sin^2(x)$ te schrijven voor $(\sin(x))^2$.

Voorbeeld 14.1.1.

- $\operatorname{bgsin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ want $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{6}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\operatorname{bgsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ want $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ en $-\frac{\pi}{6}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\operatorname{bgcos}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ want $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\frac{\pi}{4}$ ligt tussen 0 en π.
- $\operatorname{bgcos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ want $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\frac{3\pi}{4}$ ligt tussen 0 en π.
- $\operatorname{bgtan} 1 = \frac{\pi}{4}$ want $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ en $\frac{\pi}{4}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\operatorname{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ want $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$ en $-\frac{\pi}{4}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.

14.1.1 Samenstellen van goniometrische en cyclometrische functies

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Cyclometrische functies

Voorbeeld 14.1.2 (Voorbeelden boogtangens).

We kijken wat er gebeurt als we de functies bgtan en tan samenstellen. We weten bijvoorbeeld dat $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\text{bgtan}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, $\text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ en $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$. Hiermee kunnen we berekenen dat

- $\tan(\text{bgtan}(1)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Voor $x = 1$ geldt bijgevolg $\tan(\text{bgtan}(x)) = x$.
- $\tan(\text{bgtan}(-1)) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Voor $x = -1$ geldt ook $\tan(\text{bgtan}(x)) = x$.
- $\text{bgtan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \text{bgtan}(1) = \frac{\pi}{4}$. Voor $\alpha = \frac{\pi}{4}$ geldt bijgevolg $\text{bgtan}(\tan(\alpha)) = \alpha$.
- $\text{bgtan}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Voor $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ is $\text{bgtan}(\tan(\alpha)) \neq \alpha$. Hier geldt dat $\text{bgtan}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - \pi$.

In het algemeen geldt voor hoeken tussen $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{3\pi}{2}$ (hoeken in het 2de en 3de kwadrant) dat:

$$\text{bgtan}(\tan\alpha) = \alpha - \pi \text{ of dus } \alpha = \text{bgtan}(\tan\alpha) + \pi.$$

Voor hoeken in het 1ste en 4de kwadrant geldt wel $\text{bgtan}(\tan\alpha) = \alpha$.

Voor alle getallen x geldt *wel* dat $x = \tan(\text{bgtan}(x))$.

Merk op: We hebben hier bij de functie boogtangens gekozen om x als naam van de variable te nemen omdat de *boog*tangens genomen wordt van een gewoon *reëel getal*, terwijl we voor de functie *tangens* hierboven α hebben gebruikt omdat de tangens genomen wordt van de (getalwaarde van) een *hoek* (maar die is *ook* uitgedrukt als een reëel getal). De naam van de variabele kan natuurlijk vrij worden gekozen, en dikwijls wordt ook voor de tangens de letter x gebruikt.

Eigenschap 14.1.1 (Samenstellen van goniometrische en cyclometrische functies).

- Als x een getal is dan geldt

$$\begin{aligned} &\text{als } x \in [-1,1] : \sin(\text{bgsin}(x)) = x. && \text{Voor andere } x \text{ is } \text{bgsin}(x) \text{ niet gedefinieerd} \\ &\text{als } x \in [-1,1] : \cos(\text{bgcos}(x)) = x. && \text{Voor andere } x \text{ is } \text{bgsin}(x) \text{ niet gedefinieerd} \\ &\text{als } x \in \mathbb{R} : \tan(\text{bgtan}(x)) = x \end{aligned}$$

- Als α het maatgetal is van een hoek dan geldt

$$\begin{aligned} \text{als } \alpha \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] &: \text{bgsin}(\sin(\alpha)) = \alpha. \\ \text{als } \alpha \in [0,\pi] &: \text{bgcos}(\cos(\alpha)) = \alpha \\ \text{als } \alpha \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[&: \text{bgtan}(\tan(\alpha)) = \alpha \end{aligned}$$

  Voor α buiten deze intervallen gelden deze gelijkheden niet.

CC BY-NC-SA 4.0

14.1.A Oefeningen cyclometrische functies

14.1.A.1 Niveau 2

Oefening 14.1.1. Bereken volgende uitdrukkingen.

1. $\text{bgtan}(\tan\frac{\pi}{3}) = \ldots\ldots$

2. $\text{bgtan}(\tan\frac{2\pi}{3}) = \ldots\ldots$

3. $\text{bgtan}(\tan\frac{3\pi}{3}) = \ldots\ldots$

4. $\text{bgtan}(\tan\frac{4\pi}{3}) = \ldots\ldots$

5. $\text{bgtan}(\tan\frac{5\pi}{3}) = \ldots\ldots$

6. $\text{bgtan}(\tan\frac{6\pi}{3}) = \ldots\ldots$

7. $\text{bgtan}(\tan\frac{7\pi}{3}) = \ldots\ldots$

8. $\text{bgtan}(\tan\frac{8\pi}{3}) = \ldots\ldots$

14.1.A.2 Niveau 3

Oefening 14.1.2.

1. $\tan\left(\text{bgcos}\left(\frac{-1}{2}\right)\right) =$ $\boxed{-\sqrt{3}}$ $\boxed{\sqrt{3}}$ $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ $\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$ $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(Bron: IJkingstoets burgerlijk ingenieur, september 2013)

2. $\sin\left(\text{bgcos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) =$ $\boxed{-\frac{1}{2}}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$ $\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(Bron: IJkingstoets burgerlijk ingenieur, september 2014)

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

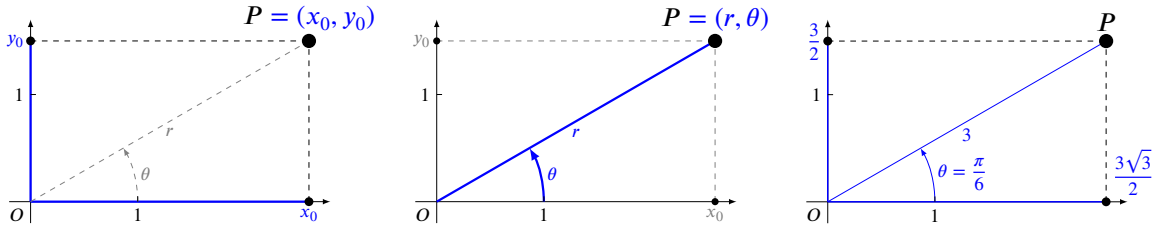
Zomercursus Wiskunde

Module 15
Poolcoordinaten

(Versie 2026/11/23H.2)

15.1 Poolcoördinaten

Gewoonlijk gebruiken we in het vlak een koppel *cartesische coördinaten* (x_0, y_0) om het punt aan te duiden dat in een gegeven assenstelsel x_0 *eenheden naar rechts* ligt van de oorsprong en y_0 *eenheden naar boven*. Er zijn echter ook alternatieve manieren om een punt in het vlak te bepalen, en in sommige toepassingen zijn die alternatieven veel handiger. De zogenaamde *poolcoördinaten* leggen een punt vast via een *hoek* en een *afstand*.



Op de eerste tekening zien we de cartesische coördinaten (x_0, y_0) van een punt P. De getallen x_0 en y_0 zijn de lengtes (met een teken) van de loodrechte projecties op respectievelijk de horizontale x-as en de verticale y-as.

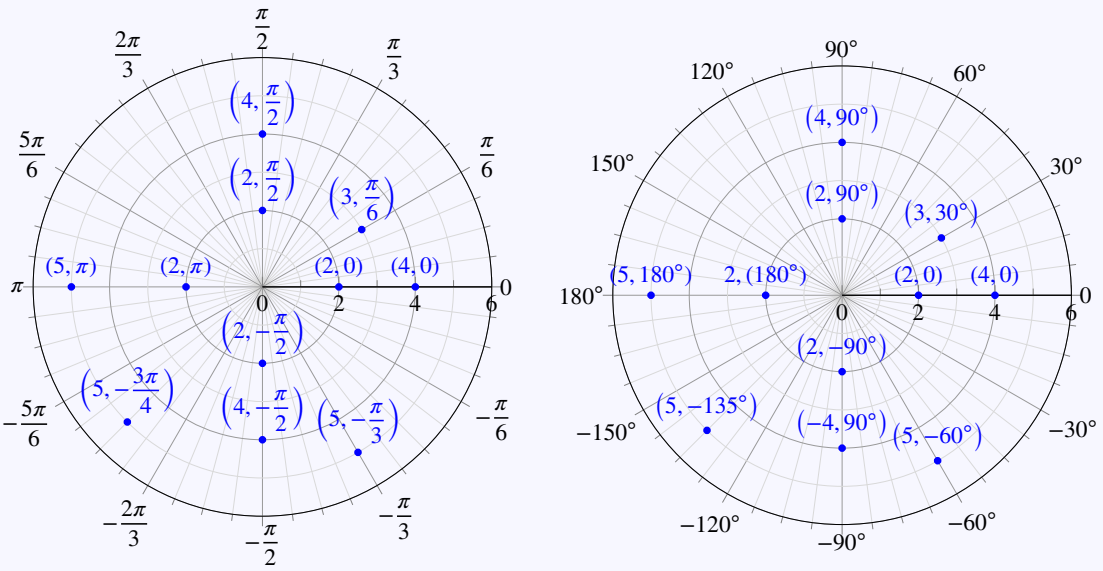
Op de tweede tekening zien we hoe je hetzelfde punt P ook kan vastleggen door de afstand r tot de oorsprong en de hoek θ met de positieve x-as. We noemen (r, θ) *pool*coördinaten van P:

Definitie 15.1.1. Poolcoördinaten van een punt P zijn elk koppel reële getallen (r, θ) waarvoor

- r de afstand is van de oorsprong O tot P (en dus $r \geq 0$)
- θ de grootte is in radialen van de (georiënteerde) hoek tussen de positieve x-as en het lijnstuk OP.

Voor een gegeven punt P ligt de afstand r vast, maar θ is slechts bepaald op een veelvoud van 2π na.

Voorbeeld 15.1.1 (Poolcoördinaten)**.**



Merk op dat de hoek θ steeds moet uitgedrukt zijn in radialen. De rechtse figuur is dus enkel bedoeld

15.1 Poolcoördinaten

als hulp voor wie (nog) niet voldoende vertrouwd is met hoeken uitgedrukt in radialen.

Oefening 15.1.1. Bij welk punt op de figuur onderaan horen volgende poolcoördinaten?

1. $(1, \frac{\pi}{6}) = \ldots\ldots$

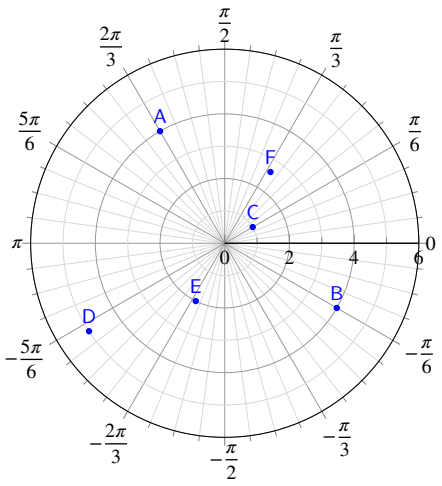
2. $(4, \frac{2\pi}{3}) = \ldots\ldots$

3. $(4, \frac{-\pi}{6}) = \ldots\ldots$

4. $(2, \frac{4\pi}{3}) = \ldots\ldots$

5. $(5, 10) = \ldots\ldots$

6. $(\frac{5\pi}{6}, 1) = \ldots\ldots$



Opmerking 15.1.1.

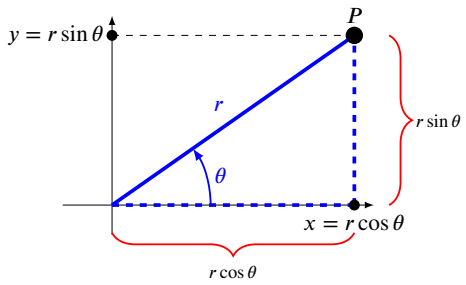
- Poolcoördinaten van een punt zijn *niet uniek bepaald*: als (r, θ) poolcoördinaten zijn van een punt P, dan zijn alle $(r, \theta + 2k\pi)$ met $k \in \mathbb{Z}$ ook poolcoördinaten van P. Soms spreekt men toch van *de* poolcoördinaten door te eisen dat bv. $\theta \in [0, 2\pi[$.
- De oorsprong heeft nog veel meer poolcoördinaten, namelijk alle koppels $(0, \theta)$ met $\theta \in \mathbb{R}$.
- De *notatie* van poolcoördinaten als een koppel (r, θ) is enigszins dubieus: de uitdrukking 'het punt $(1, \pi)$' is namelijk dubbelzinnig. Inderdaad, afhankelijk of $(1, \pi)$ de cartesische dan wel de poolcoördinaten zijn gaat het om een *ander* punt. Tenzij de precieze betekenis erg duidelijk blijkt uit de context, is het dus aangewezen om steeds te vermelden om *welke soort* coördinaten het gaat: het punt met *cartesische* coördinaten (a, b) of het punt met *pool*coördinaten (a, b).

Als een punt zowel cartesische coördinaten heeft als poolcoördinaten, ligt het voor de hand zich af te vragen of (en hoe) we de ene kunnen omrekenen naar de andere.

- Omrekenen van poolcoördinaten (r, θ) naar cartesische coördinaten (x, y) is eenvoudig want uit de *formules* van de sinus en de cosinus in de rechthoekige driehoek met hoekpunten $(0, 0), (x, 0)$ en (x, y) volgt onmiddellijk dat
$$x = r\cos\theta \text{ en } y = r\sin\theta.$$

CC BY-NC-SA 4.0

15.1 Poolcoördinaten



- Omgekeerd, stel dat cartesische coördinaten (x, y) gegeven zijn, en we willen de poolcoördinaten (r, θ) bepalen. Omdat $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$, vinden we dat $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$, en dus $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Als we $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ invullen in $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ krijgen we

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

  Dit stelsel bepaalt ondubbelzinning de hoek θ.

Volgende eigenschap vat dat samen:

Eigenschap 15.1.1 (Transformatieformules cartesische coördinaten en poolcoördinaten)**.**

Een punt P met poolcoördinaten (r, θ) heeft als cartesische coördinaten (x, y):

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Een punt P met cartesische coördinaten (x, y) heeft poolcoördinaten (r, θ) die voldoen aan:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Voorbeeld 15.1.2. Omrekenen van poolcoördinaten naar cartesische coördinaten of omgekeerd:

1. Bepaal de cartesische coördinaten van het punt met poolcoördinaten $(2, \frac{17\pi}{6})$.

Uitwerking: Uit de formule $x = r\cos\theta$ volgt dat $x = 2\cos\frac{17\pi}{6} = 2\cos\frac{5\pi}{6} = -2\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$, en uit de formule $y = r\sin\theta$ volgt dat $y = 2\sin\frac{17\pi}{6} = 2\sin\frac{5\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$.

De cartesische coördinaten zijn dus $(-\sqrt{3}, 1)$.

2. Bepaal de poolcoördinaten van het punt met cartesische coördinaten $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$ (neem $\theta \in [0, 2\pi[$).

Uitwerking: Uit de formule voor r volgt dat $r = \sqrt{2 + 6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

CC BY-NC-SA 4.0

15.1 Poolcoördinaten

Uit die voor $\cos\theta$ volgt dat $\cos\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$, dus is $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ of $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$.

Uit die voor $\sin\theta$ volgt dat $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, dus is $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ of $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$.

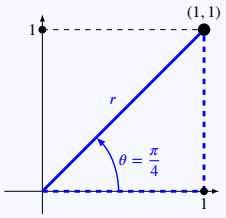
De gezochte poolcoördinaten zijn dus $(2\sqrt{2}, \dfrac{2\pi}{3})$.

De poolcoördinaten van sommige punten kunnen sneller bepaald worden op een tekening.

Voorbeeld 15.1.3. Bepaal grafisch de poolcoördinaten van het punt met cartesische coördinaten $(1,1)$ (neem $\theta \in [0, 2\pi[$).

Uitwerking: Op de tekening blijkt dat $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

De afstand tot de oorsprong berekenen we: $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.



Opmerking 15.1.2. Omrekenen tussen cartesische coördinaten en poolcoördinaten

Omrekenen van (r,θ) naar (x,y) is eenvoudig via $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$.
Omrekenen van (x,y) naar (r,θ) is ook eenvoudig voor r, want $r = \sqrt{x^2+y^2}$, maar wat moelijker voor θ.
Het stelsel

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

bepaalt ondubbelzinnig de hoek θ. Inderdaad, als we zowel de cosinus als de sinus van een hoek kennen, ligt die hoek volledig vast. Hoeken waarvan we de cosinus en de sinus kennen, zoals bijvoorbeeld $\dfrac{\pi}{3}$ kunnen we met dit stelsel gemakkelijk vinden.
Om dit stelsel in het algemeen op te lossen (voor een punt verschillend van de oorsprong) hebben we echter de cyclometrische functies boogsinus, boogcosinus of boogtangens nodig.

Als $x \neq 0$ kunnen we de tweede vergelijking delen door de eerste (waardoor de vierkantswortel wegvalt) en krijgen we

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{als } x \neq 0$$

Als $x > 0$ dan is θ een hoek in het 1ste of het 4de kwadrant en is dus per definitie van de boogtangens

$$\theta = \operatorname{bgtan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{als } x > 0$$

Als $x < 0$ dan is θ een hoek in het 2de of het 3de kwadrant en dan geldt

$$\theta = \operatorname{bgtan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \quad \text{als } x < 0$$

CC BY-NC-SA 4.0

15.1 Poolcoördinaten

Als $x = 0$, dan ligt het punt (x, y) dus op de y-as en geldt

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{als } x = 0, y > 0$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{als } x = 0, y < 0$$

Samengevat geeft dit voor θ:

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{bgtan} \frac{y}{x} & \text{als } x > 0 \\ \pi + \operatorname{bgtan} \frac{y}{x} & \text{als } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{als } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{als } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

We hernemen een vorig voorbeeld:

Voorbeeld 15.1.4. Bepaal de poolcoördinaten van het punt met cartesische coördinaten $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$ (neem $\theta \in [0, 2\pi[$).

Uitwerking: $r = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$x < 0$ dus $\theta = \pi + \operatorname{bgtan} \frac{y}{x} = \pi + \operatorname{bgtan} \frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}} = \pi + \operatorname{bgtan}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

De gezochte poolcoördinaten zijn dus $(2\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3})$.

CC BY-NC-SA 4.0

15.1.A Oefeningen poolcoördinaten

15.1.A.1 Niveau 2

Oefening 15.1.2. Omrekenen van poolcoördinaten naar cartesische coördinaten.

1. Het punt A met poolcoördinaten $(1, \pi)$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$
2. Het punt B met poolcoördinaten $(1, \frac{\pi}{2})$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$
3. Het punt C met poolcoördinaten $(2, -\frac{\pi}{2})$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$
4. Het punt D met poolcoördinaten $(2, \frac{\pi}{4})$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$
5. Het punt E met poolcoördinaten $(5, \frac{5\pi}{4})$ heeft cartesische coördinaten $x = \ldots\ldots$ en $y = \ldots\ldots$

Oefening 15.1.3. Omrekenen van cartesische coördinaten naar poolcoördinaten. (Kies de hoek θ steeds tussen 0 en 2π).

1. Het punt A met cartesische coördinaten $(-1, -1)$ heeft poolcoördinaten $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$
2. Het punt B met cartesische coördinaten $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ heeft poolcoördinaten $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

15.2 Poolvergelijkingen

Een veel gebruikte manier om krommen te beschrijven is door middel van *vergelijkingen* in cartesische coördinaten, zoals bijvoorbeeld $x^2 + y^2 = 1$ voor een cirkel. Voor sommige krommen zijn de vergelijkingen in poolcoördinaten echter veel eenvoudiger.

Voorbeeld 15.2.1. De vergelijking van een cirkel in poolcoördinaten.

Uit de stelling van Pythagoras volgt dat de punten (x, y) waarvoor $x^2 + y^2 = 4$ een cirkel vormen met straal 2 en centrum in de oorsprong. In cartesische coördinaten is de vergelijking van de cirkel $C(O, 2)$ met oorsprong O en straal 2 dus

$$C(O, 2) \leftrightarrow x^2 + y^2 = 4 \quad \text{vergelijking cirkel in cartesische coördinaten}$$

Als we een gelijkaardige voorwaarde zoeken voor de punten van de cirkel $C(O, 2)$ uitgedrukt in poolcoördinaten (r, θ) vinden we een veel eenvoudigere uitdrukking: een punt (r, θ) ligt natuurlijk op $C(O, 2)$ zodra $r = 2$. Dus

$$C(O, 2) \leftrightarrow r = 2 \quad \text{vergelijking cirkel in poolcoördinaten}$$

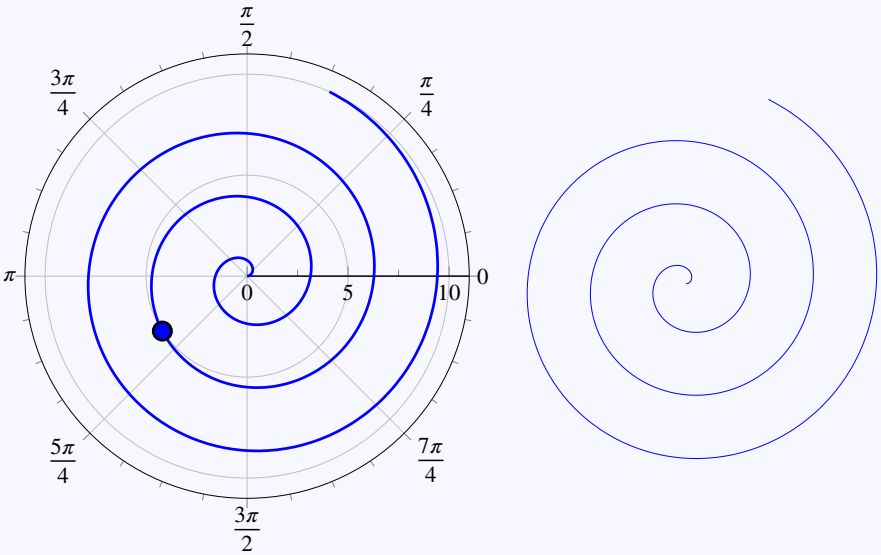
We stellen vast dat de vergelijking in poolcoördinaten veel eenvoudiger is.

Voorbeeld 15.2.2. De spiraal van Archimedes

In de figuur hieronder zijn de punten getekend die voldoen aan de poolvergelijking (met $r \geq 0$)

$$2r = \theta.$$

Deze kromme noemt men een *Archimedische spiraal*.



Het punt met poolcoördinaten $(5, 10)$ voldoet aan de vergelijking, en ligt dus op de kromme.

Uitdaging: Ligt het punt met poolcoördinaten $(5, 10 - 2\pi)$ op de kromme ? En voldoet het koppel $(5, 10 - 2\pi)$ aan de vergelijking? Is dat een probleem? Waarom wel of waarom niet?

Definitie 15.2.1 (Poolvergelijking)**.**

Een vergelijking $f(r, \theta) = 0$ in de twee poolcoördinaten r en θ wordt een **poolvergelijking** genoemd.

CC BY-NC-SA 4.0

15.2 Poolvergelijkingen

De verzameling van de punten $P(r,\theta)$ die voldoen aan de vergelijking bepaalt een kromme $\mathcal{C}$ in het vlak, en $f(r,\theta)$ is *een* poolvergelijking *van* die kromme.

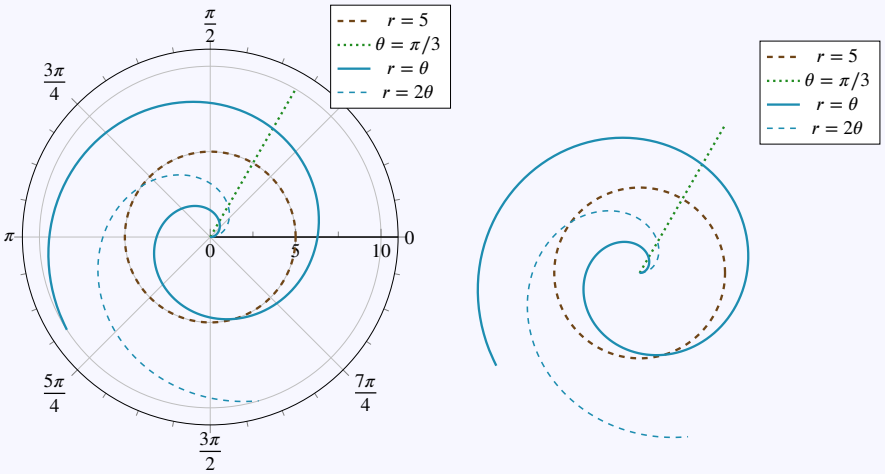
Opmerking 15.2.1.

- Een punt $P(r,\theta)$ ligt op de kromme met poolvergelijking $f(r,\theta)=0$ als en slechts als *een* stel poolcoördinaten van P voldoet aan de poolvergelijking. Dat zijn niet noodzakelijk (r,θ), maar mogelijk bv $(r,\theta-24\pi)$.

  Voorbeeld: Het punt P met poolcoördinaten $(2\pi,0)$ ligt op de kromme met vergelijking $r=\theta$ hoewel duidelijk $2\pi\neq 0$. Maar, het punt P heeft ook $(2\pi,2\pi)$ als poolcoördinaten die wel voldoen (want de tweede coördinaat θ is maar op een factor 2π na bepaald).

- θ wordt *steeds* uitgedrukt in *radialen*.

Voorbeeld 15.2.3. Enkele krommen met eenvoudige poolvergelijkingen



Met behulp van de transformatieformules ken je volgende oefeningen oplossen.

Oefening 15.2.1. Geef een poolvergelijking voor volgende krommen.

1. de rechte $x=2$: ... ...
2. de cirkel met straal a en centrum $(0,a)$: ... ...

Oefening 15.2.2. Geef een cartesische vergelijking voor volgende krommen:

1. de kromme met poolvergelijking $r=2$: ... ...
2. de kromme met poolvergelijking $r=\dfrac{1}{\cos\theta}$: ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 16
Vectoren in de fysica

(Versie 2026/11/23H.2)

16.1 Vectoren in de fysica

16.1.1 Vectoren als objecten met grootte, richting en zin

Als we de fysische wereld wiskundig willen beschrijven en bestuderen, stellen we al snel vast dat er twee essentieel verschillende *soorten* fysische grootheden bestaan.

Enerzijds zijn er grootheden als lengte, massa of temperatuur: die worden uitgedrukt door een *getal* en een *eenheid*, bijvoorbeeld 2 meter of 3,14 kilogram of 37,5 graden Celsius. Het getal duidt aan *hoeveel keer* de eenheid moet worden genomen, of correcter geformuleerd, met welke factor we de eenheid moeten *herschalen* om de concrete hoeveelheid te vinden: 2 meter betekent dat je de eenheidsmeter met een factor twee moet vermenigvuldigen (of herschalen), net zoals 3,14 kilogram betekent dat je de eenheidskilogram met een factor 3,14 moet herschalen. Dergelijke grootheden noemt men in de fysica **scalaire grootheden**.

Maar een verplaatsing, snelheid, kracht of elektrisch veld kan in het algemeen *niet* worden uitgedrukt door een getal en een eenheid. Deze grootheden hebben telkens een grootte, een richting en een zin, en men noemt ze **vectoriële grootheden**.

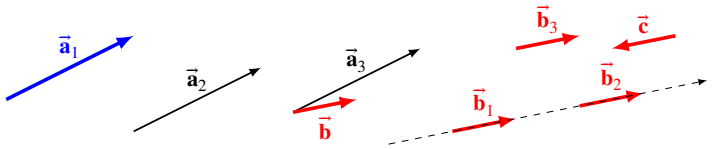
Definitie 16.1.1 (Vectoren in de fysica)**.**

Een **(vrije) vector** $\vec{\mathbf{a}}$ is een object met een *grootte*, een *richting* en een *zin*.

Twee vrije vectoren zijn aan elkaar *gelijk* zodra ze dezelfde grootte, richting en zin hebben.

De **nulvector** is de unieke vector met grootte nul.

Voor sommige fysische grootheden zoals krachten is eigenlijk zelfs nog een iets strenger begrip nodig: het aangrijpingspunt (het vertrekpunt van de pijl) is bij een kracht wel degelijk van belang. Men spreekt dan van een **gebonden vector**. De **drager** van een gebonden vector is de rechte waarop de vector ligt. Bij **vrije vectoren** die we hierboven hebben gedefinieerd, is het aangrijpingspunt *niet* van belang.



Een **vrije** vector stellen we grafisch voor door een *pijl* te tekenen vanaf een (willekeurig) *beginpunt* met de gegeven grootte, richting en zin naar een daardoor uniek bepaald *eindpunt*. Een pijl vanaf een ander beginpunt maar met dezelfde *grootte*, *richting* en *zin* stelt dan *dezelfde vrije vector* voor. Merk wel op dat het begrip richting hier in een wat speciale betekenis wordt gebruikt: in deze wiskundige context geeft de *richting* enkel aan met welke rechte(n) de vector evenwijdig is. Dat laat nog twee mogelijkheden open naar welke *kant* –in welke *zin*– de vector wijst. Er is een subtiele verschil in betekenis van de woorden richting en zin in de wiskunde ten opzichte van het gebruik in de dagelijkse taal: twee evenwijdige pijlen die een *tegengestelde kant* op wijzen hebben wiskundig gesproken *dezelfde richting* en een *tegengestelde zin*. We spreken in de wiskunde dus *nooit* over een 'tegengestelde richting', maar wel over een 'tegengestelde zin'.

In de figuur hierboven zijn $\vec{\mathbf{a}}_1, \vec{\mathbf{a}}_2$ en $\vec{\mathbf{a}}_3$ telkens *dezelfde vrije vector*, maar wel *andere gebonden vectoren*. Ook $\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{b}}_1, \vec{\mathbf{b}}_2$ en $\vec{\mathbf{b}}_3$ stellen vier keer dezelfde vrije vector voor. Vector $\vec{\mathbf{c}}$ heeft dezelfde richting, maar de omgekeerde zin van vector $\vec{\mathbf{b}}$. De gebonden vectoren $\vec{\mathbf{b}}_1$ en $\vec{\mathbf{b}}_2$ hebben dezelfde *drager* omdat ze op dezelfde rechte liggen.

Bij de nulvector heeft de pijl lengte nul, en het beginpunt en eindpunt vallen dus samen. De nulvector wordt dus grafisch voorgesteld als een punt, en er bestaat slechts één *nulvector*.

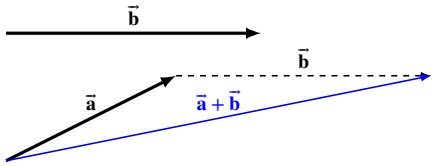
16.1.2 Basisbewerkingen met vectoren

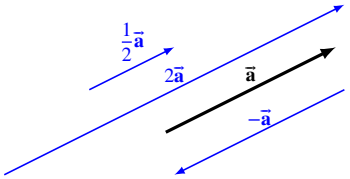
Met vrije vectoren kan je twee belangrijke bewerkingen uitvoeren:

CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Vectoren in de fysica

(a) twee vectoren bij elkaar **optellen**. De *som* $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$ van twee vectoren $\vec{\mathbf{a}}$ en $\vec{\mathbf{b}}$ bekom je door ze *achter elkaar te leggen*: je legt het *begin*punt van $\vec{\mathbf{b}}$ in het *eind*punt van $\vec{\mathbf{a}}$, en de som is dan de vector van het beginpunt van $\vec{\mathbf{a}}$ naar het eindpunt van $\vec{\mathbf{b}}$.



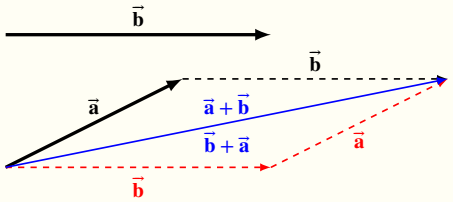


(b) een vector **scalair vermenigvuldigen** met een getal. Een vector $\vec{\mathbf{a}}$ vermenigvuldigen met een getal r geeft een nieuwe *herschaalde* vector $r\vec{\mathbf{a}}$, die *dezelfde richting* heeft als $\vec{\mathbf{a}}$ maar $|r|$ keer *groter* is. Als r positief is wordt de zin behouden en als r negatief is krijgt $r\vec{\mathbf{a}}$ de tegengestelde zin van $\vec{\mathbf{a}}$.

De scalaire vermenigvuldiging behoudt dus de richting, vermenigvuldigt de grootte met $|r|$ en behoudt al dan niet de zin naargelang het teken van r.

Opmerking 16.1.1.

- Als we de som *in de andere volgorde* zouden berekenen, dan merken we op dat we voor $\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}$ een *andere constructie* maken dan voor $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}$. We construeren inderdaad een *andere* driehoek. Toch bekomen we steeds *dezelfde resultaatvector* omdat beide driehoeken samen een parallellogram vormen, en de twee sommen allebei gelijk zijn aan dezelfde diagonaal van dat parallellogram, en dus ook gelijk aan elkaar. We zeggen dat de optelling van vectoren *commutatief* is, en men spreekt ook van de *parallellogramregel* voor het optellen van vectoren.



- Behalve de optelling en de scalaire vermenigvuldiging bestaan er nog andere bewerkingen met vectoren. Zo associeert het **inwendig product** (of scalair product) met twee vectoren een *getal* (een scalar). In de driedimensionale ruimte bestaat er ook een **vectorieel product** dat met twee vectoren een nieuwe *vector* associeert.

CC BY-NC-SA 4.0

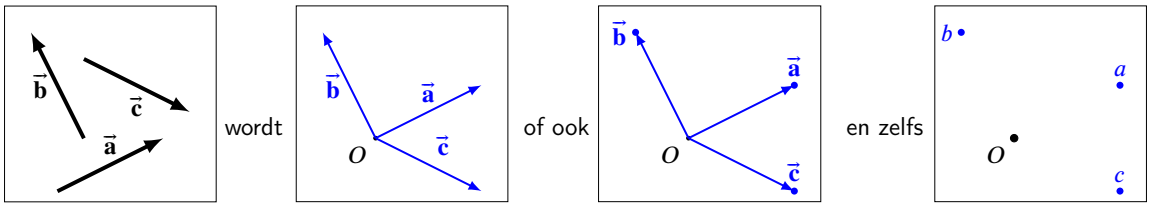
16.2 Assenstelsels en coördinaten

We zullen hier met elke vrije vector in het vlak een koppel getallen associëren, waardoor het mogelijk wordt om ook algebraïsch te rekenen met vectoren. We tonen de redenering in het vlak, maar ze werkt even goed in dimensie 3 (of in dimensie n, met $n \in \mathbb{N}$).

Door *één vast punt* te kiezen in het vlak en af te spreken om alle vrije vectoren te tekenen met dat vaste punt als aangrijpingspunt, krijgen we voor elke vrije vector een *unieke* voorstelling: de pijl die vertrekt uit dat gekozen punt. Een logische naam voor dat gekozen punt is **de oorsprong**, omdat we alle vectoren laten beginnen in dat punt. Als de oorsprong vastligt, is een vector volledig bepaald door zijn eindpunt.

Een vlak met één vast gekozen punt noemen we een **gepunt vlak**. In een gepunt vlak komt met elk *punt* een unieke *vector* overeen, en met elke *vector* een uniek *punt*. In een *gepunt* vlak kunnen we dus vectoren en punten met elkaar identificeren. Merk op dat dat in een gewoon vlak, waar *geen* oorsprong vast ligt, *niet mogelijk* is: daar heb je steeds *twee punten* nodig om een vector te bepalen. De oorsprong is dus eigenlijk een eens-en-voor-altijd afgesproken 'eerste punt' of het beginpunt van een vector.

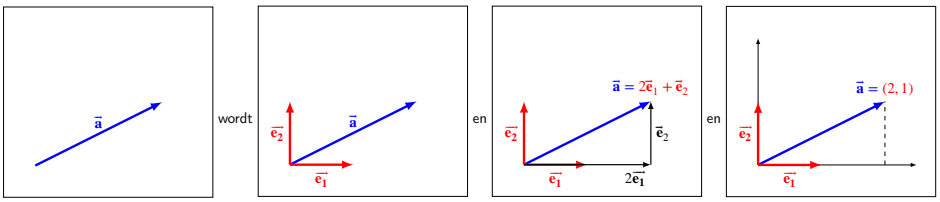
Samengevat: in *een vlak met een oorsprong* zijn *vectoren en punten* eigenlijk hetzelfde. We zullen verder zien dat hetzelfde geldt in de driedimensionale ruimte.



Vrije vectoren — 'gebonden' aan O — markeer eindpunten — beschouw als 'punten'

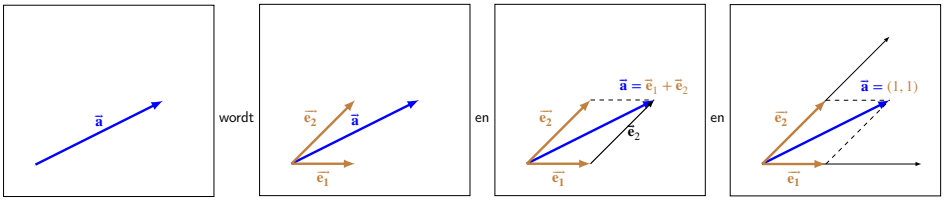
Door *twee willekeurige gebonden vectoren* $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ te kiezen met hetzelfde beginpunt en die geen veelvoud zijn van elkaar bepalen we een **assenstelsel**. De **assen** zijn de twee dragers van de vectoren en de twee vectoren $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ zelf worden de **basisvectoren** genoemd van het assenstelsel. Het gemeenschappelijke beginpunt is de **oorsprong** van het assenstelsel.

Elke vector $\vec{\mathbf{a}}$ *van het vlak* kan dan op een unieke wijze geschreven worden als $\vec{\mathbf{a}} = a_1\vec{\mathbf{e}}_1 + a_2\vec{\mathbf{e}}_2$. We noemen de getallen a_1 en a_2, of ook het koppel (a_1, a_2), de **coördinaten** of de **scalaire componenten** van de vector $\vec{\mathbf{a}}$ ten opzichte van de **basisvectoren** $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$.



Vector $\vec{\mathbf{a}}$ — Keuze $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ — $\vec{\mathbf{a}} = 2\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2$ — $\vec{\mathbf{a}} = (2, 1)$

maar ook

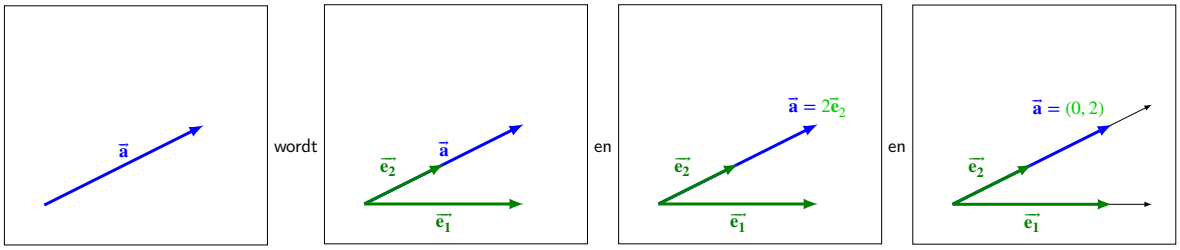


Vector $\vec{\mathbf{a}}$ — Andere $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ — $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_2$ — $\vec{\mathbf{a}} = (1, 1)$

CC BY-NC-SA 4.0

16.2 Assenstelsels en coördinaten

of



Vector $\vec{a}$ | Andere $\vec{e_1}$ en $\vec{e_2}$ | $\vec{a} = 2\vec{e_2}$ | $\vec{a} = (0, 2)$

Eigenschap 16.2.1.

De keuze van een *oorsprong* associeert aan elke vector een punt en ook aan elk punt een vector.

De keuze van een *assenstelsel* associeert aan elke vector in het vlak een koppel reële getallen, en ook aan elk koppel reële getallen een vector.

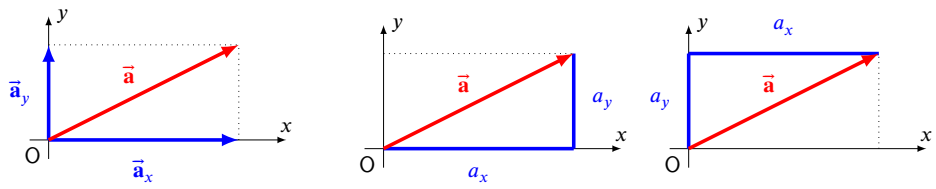
De keuze van een assenstelsel impliceert de keuze van het snijpunt van de assen als oorsprong. Zodra een oorsprong vastligt, is er eigenlijk geen onderscheid meer tussen vectoren en punten. Zodra een assenstelsel vastligt, is er geen onderscheid meer tussen vectoren, punten en koppels van getallen.

Als de basisvectoren $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ loodrecht op elkaar staan en beide lengte één hebben spreken we van een **orthonormaal**, een **euclidisch** of een **cartesiaans assenstelsel**, met bijhorende **cartesiaanse coördinaten**. Zodra je met lengtes en hoeken wil rekenen, is het van belang in een orthonormaal assenstelsel te werken.

Bij de keuze van een assenstelsel neemt men dikwijls de eerste as horizontaal en georiënteerd naar rechts. Men noemt ze de x-as. De tweede as, die er loodrecht op staat, is dan verticaal en wordt meestal naar boven georiënteerd. Dat is de y-as.

In de fysica noteert men de basisvectoren dikwijls als $\vec{\mathbf{e}}_x$ en $\vec{\mathbf{e}}_y$, en schrijft men $\vec{\mathbf{a}} = a_x\vec{\mathbf{e}}_x + a_y\vec{\mathbf{e}}_y$, met de coördinaten van $\vec{\mathbf{a}}$ dus de getallen a_x en a_y. Men gebruikt ook erg dikwijls de zogenaamde **vectorcomponenten** $\vec{\mathbf{a}}_x = a_x\vec{\mathbf{e}}_x$ en $\vec{\mathbf{a}}_y = a_y\vec{\mathbf{e}}_y$. Er geldt dan

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_x + \vec{\mathbf{a}}_y = a_x\vec{\mathbf{e}}_x + a_y\vec{\mathbf{e}}_y$$



Op bovenstaande tekening worden de scalaire componenten a_x en a_y van de vector $\vec{\mathbf{a}}$ op drie equivalente manieren weergegeven. De tekening toont ook dat de vectorcomponent $\vec{\mathbf{a}}_x$, respectievelijk $\vec{\mathbf{a}}_y$, de loodrechte projectie is van de vector $\vec{\mathbf{a}}$ op de x-as, respectievelijk de y-as. Soms gebruikt men de term component om zowel de scalaire component als de vectorcomponent aan te duiden. Merk wel op dat dit erg *verschillende* dingen zijn: een scalaire component is een *getal* (dat mogelijk negatief kan zijn), en een vectorcomponent is een *vector*.

In sommige handboeken en cursussen gebruikt men $\hat{\mathbf{i}}$ en $\hat{\mathbf{j}}$ als notatie voor de eenheidsvectoren, of $\hat{\mathbf{x}}$ en $\hat{\mathbf{y}}$. Wiskundigen kiezen eerder voor $\vec{\mathbf{e}}_1$ en $\vec{\mathbf{e}}_2$ omdat dat het makkelijkst veralgemeent naar meerdere dimensies.

Uit een tekening blijkt onmiddellijk dat de componenten van een som van vectoren gelijk zijn aan de som van de componenten, en ook dat de componenten van een scalair veelvoud gelijk zijn aan de veelvouden van de componenten. Som en scalaire veelvoud worden dus component per component berekend:

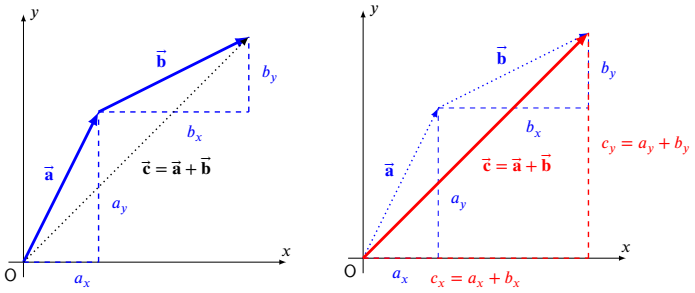
CC BY-NC-SA 4.0

16.2 Assenstelsels en coördinaten

Eigenschap 16.2.2. Als $\vec{\mathbf{a}} = a_x\vec{\mathbf{e}}_x + a_y\vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{\mathbf{b}} = b_x\vec{\mathbf{e}}_x + b_y\vec{\mathbf{e}}_y$ en $r \in \mathbb{R}$ dan geldt dat

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = (a_x + b_x)\vec{\mathbf{e}}_x + (a_y + b_y)\vec{\mathbf{e}}_y \tag{9}$$

$$r\vec{\mathbf{a}} = (ra_x)\vec{\mathbf{e}}_x + (ra_y)\vec{\mathbf{e}}_y \tag{10}$$



Voorbeeld 16.2.1. Als $\vec{\mathbf{a}} = 2\vec{\mathbf{e}}_x + 3\vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{\mathbf{b}} = 5\vec{\mathbf{e}}_x - 2\vec{\mathbf{e}}_y$ dan is

$$\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = (2+5)\vec{\mathbf{e}}_x + (3-2)\vec{\mathbf{e}}_y = 7\vec{\mathbf{e}}_x + \vec{\mathbf{e}}_y\,, \quad \text{en} \quad 2\vec{\mathbf{a}} = 4\vec{\mathbf{e}}_x + 6\vec{\mathbf{e}}_y.$$

Merk op dat de scalaire componenten van een vector afhangen van het gekozen assenstelsel: een ander assenstelsel betekent andere componenten. Maar de som en veelvouden kunnen in elk assenstelsel worden berekend, en ze zijn dus onafhankelijk van de keuze van het assenstelsel.

In de fysica is het dikwijls aangewezen om het assenstelsel zorgvuldig te kiezen of te werken *zonder* assenstelsel. Beide opties kunnen het rekenwerk enorm reduceren.

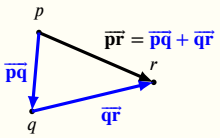
Enkel werken met grootte, richting en zin leidt bij sommige problemen, samen met wat eenvoudige meetkunde of goniometrie, sneller en eenvoudiger tot een antwoord dan uitgebreide algebraïsche berekeningen met coördinaten. Hetzelfde geldt voor het kiezen van assen evenwijdig met of loodrecht op één van de vectoren van het probleem, of volgens een symmetrie-as van het probleem.

Opmerking 16.2.1.

Een vector met beginpunt p en eindpunt q wordt soms ook voorgesteld als $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$, dus met *één* pijltje boven *twee* punten p en q. Met die afspraak geldt dat $\overrightarrow{\mathbf{op}} = \vec{\mathbf{p}}$, want $\vec{\mathbf{p}}$ is per definitie de vector met als beginpunt de oorsprong o en als eindpunt p.

De vector $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$ duidt de verschuiving aan om van beginpunt p naar eindpunt q te gaan. De optelling van vectoren krijgt dan een eenvoudige meetkundige interpretatie: eerst van p naar q verschuiven, en dan van q naar r is hetzelfde als direct van p naar r verschuiven:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{pq}} + \overrightarrow{\mathbf{qr}} = \overrightarrow{\mathbf{pr}}}$$



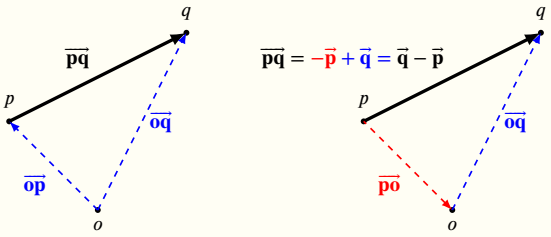
Er geldt dat $\overrightarrow{\mathbf{op}} = \vec{\mathbf{p}}$, $-\overrightarrow{\mathbf{pq}} = \overrightarrow{\mathbf{qp}}$ en $\overrightarrow{\mathbf{pp}} = \vec{\mathbf{o}}$.

Als we $\overrightarrow{\mathbf{pq}}$ willen uitdrukken in termen van de vectoren $\vec{\mathbf{p}}$ en $\vec{\mathbf{q}}$, die de verplaatsing van de oorsprong o naar p resp. q aanduiden, krijgen we

$$\overrightarrow{\mathbf{pq}} = \overrightarrow{\mathbf{po}} + \overrightarrow{\mathbf{oq}} = -\overrightarrow{\mathbf{op}} + \overrightarrow{\mathbf{oq}} = -\vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{q}} \quad \text{en dus} \quad \boxed{\overrightarrow{\mathbf{pq}} = \vec{\mathbf{q}} - \vec{\mathbf{p}}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

16.2 Assenstelsels en coördinaten



De betrekking $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$ staat ook gekend als de gelijkheid van Chasles-Möbius. Ze kan, gelezen van rechts naar links, gebruikt worden om een vector te schrijven als een som van twee andere vectoren.

CC BY-NC-SA 4.0

16.3 Vectoren in poolcoördinaten

Als we de componenten of coördinaten van een vector kennen ten opzichte van een cartesisch assenstelsel, levert de stelling van Pythagoras een eenvoudige formule op voor de grootte van die vector:

Eigenschap 16.3.1. De grootte (ook **lengte** of **norm**) van de vector $\vec{\mathbf{a}} = a_x\vec{\mathbf{e}}_x + a_y\vec{\mathbf{e}}_y$ is

$$\|\vec{\mathbf{a}}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Om een *richting* van een vector in twee dimensies aan te geven zijn er twee opties:

- met **een eenheidsvector** (dus een vector met lengte 1 met dezelfde richting en zin).

  Voor bijvoorbeeld de vector $(2,5)$ met lengte $\sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$, vinden we een eenheidsvector met dezelfde richting en zin, door te delen door de lengte: $\dfrac{1}{\sqrt{29}}(2,5)$. Een eenheidsvector noteert men soms met $\hat{\mathbf{a}}$, en dan geldt

  $$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{\|\vec{\mathbf{a}}\|}$$

- met **een hoek t.o.v. een referentierichting**:

  Als een x,y-assenstelsel gegeven is, kiest men meestal voor de hoek in tegenwijzerzin t.o.v. de positieve x-as (maar andere referentierichtingen zijn even goed). Als $a_x \neq 0$ dan geldt voor de hoek θ die een vector maakt met de positieve x-as, wegens de formules in de rechthoekige driehoek,

  $$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

  Let wel op: er zijn *twee hoeken* met dezelfde tangens, die allebei *dezelfde richting* bepalen. De *juiste* hoek wordt bepaald door de *zin*, en daarvoor moet je nagaan in welk kwadrant de vector ligt, bijvoorbeeld door het teken van de x en y componenten te bepalen, of door een figuur te maken.

  Als $a_x > 0$ dan is θ een hoek in het 1ste of het 4de kwadrant en is dus per definitie van de boogtangens

  $$\theta = \operatorname{bgtan}\frac{a_y}{a_x}$$

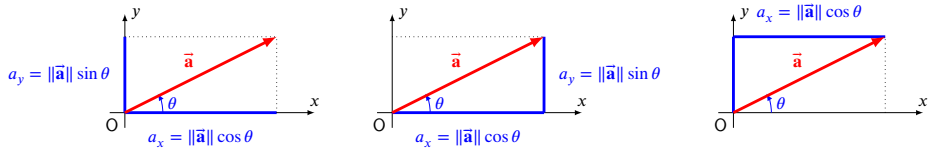
  Als $a_x < 0$ dan is θ een hoek in het 2de of het 3de kwadrant en dan geldt

  $$\theta = \operatorname{bgtan}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) + \pi$$

Voor toepassingen is het belangrijk dat je snel kan overstappen van een richting gegeven door een hoek t.o.v. een as naar een richting gegeven door een eenheidsvector.

Als de hoek θ tussen vector $\vec{\mathbf{a}}$ en de positieve x-as gekend is, volgt uit de definitie van sinus en cosinus dat

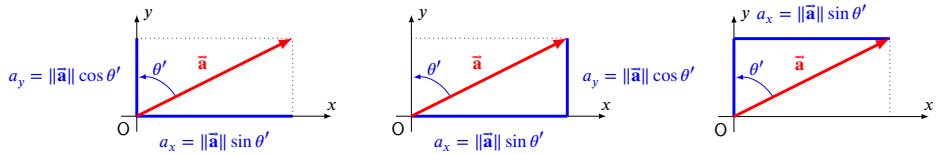
$$a_x = \|\vec{\mathbf{a}}\|\cos\theta \quad \text{en} \quad a_y = \|\vec{\mathbf{a}}\|\sin\theta$$



Als de hoek θ' tussen vector $\vec{\mathbf{a}}$ en de positieve y-as gekend is, volgt uit de definitie van sinus en cosinus dat

$$a_x = \|\vec{\mathbf{a}}\|\sin\theta' \quad \text{en} \quad a_y = \|\vec{\mathbf{a}}\|\cos\theta'$$

16.3 Vectoren in poolcoördinaten



Leer de formules echter niet uit het hoofd, maar probeer dit grafisch te zien. Dit kan zowel met het beeld van rechthoekige driehoeken, als door het beeld van de goniometrische cirkel te gebruiken. Hoe je het beeld van de goniometrische cirkel gebruikt kan je zien in de clip.

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/EsHYrhoYJHM

CC BY-NC-SA 4.0

16.3.A Oefeningen vectoren in de fysica

We werken steeds in een gegeven xy-assenstelsel, en noteren $\vec{\mathbf{e}}_x$ en $\vec{\mathbf{e}}_y$ voor de eenheidsvectoren op respectievelijk de x- en de y-as. We tekenen vrije vectoren door ze te laten aangrijpen in de oorsprong.

16.3.A.1 Niveau 1

Oefening 16.3.1. Duid op een tekening de vectoren $\vec{a} = 2\vec{\mathbf{e}}_x + \vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{b} = \vec{\mathbf{e}}_x - \vec{\mathbf{e}}_y$ aan.

Duid daarna ook de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a}$ en $-\vec{b}$ aan.

16.3.A.2 Niveau 2

Oefening 16.3.2. Teken de vectoren $\vec{a} = \vec{\mathbf{e}}_x + 2\vec{\mathbf{e}}_y$, $\vec{b} = -2\vec{\mathbf{e}}_x + 3\vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{c} = \vec{\mathbf{e}}_x - \vec{\mathbf{e}}_y$. Bereken en construeer daarna ook de vectoren

- $\vec{s} = 2\vec{a} - \vec{b}$
- $\vec{t} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - 2\vec{c}\right)$

Oefening 16.3.3. $\vec{a} = \vec{\mathbf{e}}_x - \sqrt{3}\vec{\mathbf{e}}_y$

1. $\vec{a}$ heeft grootte $||\vec{a}|| = \ldots\ldots$

2. $\vec{a}$ maakt een hoek van $\ldots\ldots$ radialen met de positieve x-as.

Oefening 16.3.4. Een gegeven vector $\vec{a}$ met lengte 10 maakt een hoek van $5\pi/4$ met de x-as. Bereken de vectorcomponenten volgens $\vec{\mathbf{e}}_x$ en $\vec{\mathbf{e}}_y$.
Antwoord: $a_x = \ldots\ldots, a_y = \ldots\ldots$

Oefening 16.3.5. Bereken de grootte van de vectoren $\vec{a} = 3\vec{\mathbf{e}}_x + 4\vec{\mathbf{e}}_y$, $\vec{b} = 4\vec{\mathbf{e}}_x - 3\vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.
Antwoord: $||\vec{a}|| = \ldots\ldots, ||\vec{b}|| = \ldots\ldots, ||\vec{c}|| = \ldots\ldots$

Geef ook eenheidsvectoren met dezelfde richting en zin als deze vectoren.

Oefening 16.3.6. Is volgende uitspraak waar: voor vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ geldt steeds dat $||\vec{a} + \vec{b}|| = ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$.
Antwoord: | Juist | Fout |

Oefening 16.3.7. De vector $\vec{a}$ heeft lengte $\sqrt{2}$ en maakt een hoek van $\pi/4$ radialen met de positieve x-as. De vector $\vec{b}$ heeft lengte 4, staat loodrecht op $\vec{a}$ en voldoet bovendien aan $b_y > 0$.
Bepaal de componenten van de vector $\vec{b}$ en teken de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.
Antwoord: $b_x = \ldots\ldots, b_y = \ldots\ldots$

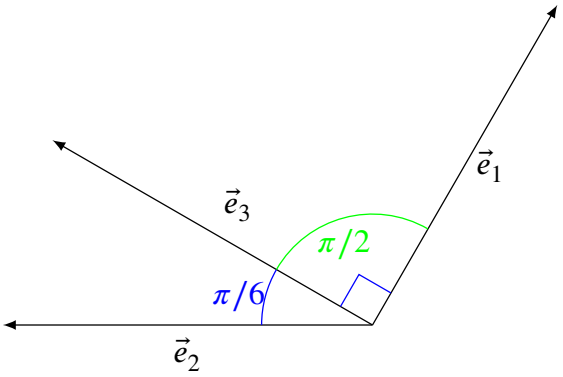
16.3.A.3 Niveau 3

Volgende oefening is een voorbeeld van het oplossen van vectorvergelijkingen.

CC BY-NC-SA 4.0

16.3.A Oefeningen vectoren in de fysica

Oefening 16.3.8. Beschouw volgende drie eenheidsvectoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ en $\vec{e}_3$ in het vlak:



Los op twee manieren volgende vectorvergelijking op naar v_2 en v_3.

$$\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 = v_3\vec{e}_3.$$

1. Meetkundig: door snijpunten van rechten te bepalen.

Antwoord: $v_2 = \ldots\ldots$ en $v_3 = \ldots\ldots$

2. Algebraïsch: door te rekenen met componenten. Je moet natuurlijk hetzelfde antwoord bekomen als hierboven.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 17
Complexe getallen

(Versie 2026/11/23H.2)

17.1 Complexe getallen

Veeltermvergelijkingen hebben niet altijd reële oplossingen. Zo hebben vierkantsvergelijkingen met een negatieve discriminant geen reële wortels. Een erg eenvoudig voorbeeld is de vergelijking $x^2 + 1 = 0$ of, anders geschreven, $x^2 = -1$. Deze vergelijking heeft geen reële wortels, omdat het kwadraat van een reëel getal nooit negatief kan zijn, en dus nooit gelijk aan -1.

De zogenaamde *complexe getallen* vormen een uitbreiding van de reële getallen. Aan de reële getallen wordt een nieuw 'getal' toegevoegd dat traditioneel i genoemd wordt, en i is *per definitie* een oplossing van de vergelijking $x^2 + 1 = 0$. Er geldt dus per definitie dat $i^2 = -1$. Het is een hoogst merkwaardig feit dat door een oplossing van deze vergelijking $x^2 + 1 = 0$ toe te voegen, ineens *alle* veeltermvergelijkingen met reële coëfficiënten oplossingen blijken te hebben.

Definitie 17.1.1.

We noemen de uitdrukking $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $i^2 = -1$ een **complex getal**. Het symbool i noemen we de **imaginaire eenheid**. De verzameling van alle complexe getallen noemen we $\mathbb{C}$.

Per definitie zijn twee complexe getallen $a + bi$ en $c + di$ enkel aan elkaar gelijk als $a = c$ en $b = d$.

We noteren een willekeurig complex getal dikwijls met z. Stel $z = a + bi$.

- We noemen a het **reëel deel** van z en noteren $\mathrm{Re}(z) \overset{\text{def}}{=} a$.
- We noemen b het **imaginair deel** van z en noteren $\mathrm{Im}(z) \overset{\text{def}}{=} b$.
- Als $b = 0$ noemen we $z = a$ een **(zuiver) reëel getal** ($\mathbb{R}$ is dus een deelverzameling van $\mathbb{C}$).
- Als $a = 0$ noemen we $z = bi$ een **(zuiver) imaginair getal**.

Voorbeeld 17.1.1. Volgende uitdrukkingen zijn allemaal complexe getallen:

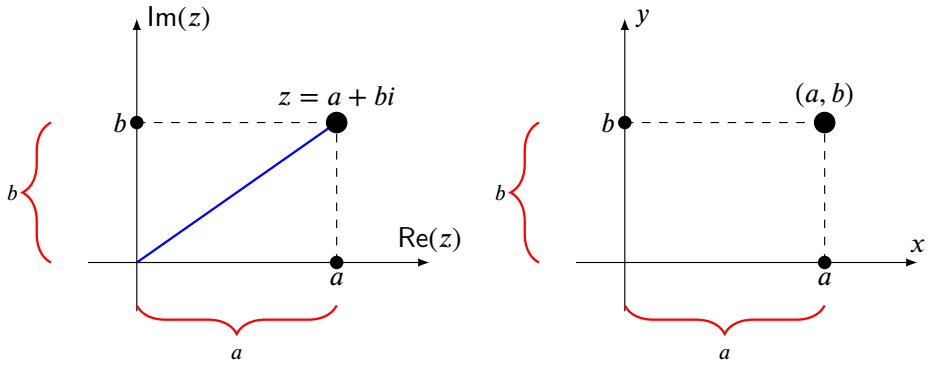
(a) $2 + 3i$ (c) $42i$ (e) $1 + i\sqrt{2}$

(b) 42 (d) $1 + \pi$ (f) $\dfrac{1 - i\sqrt{5}}{2}$

De getallen 42 en $1 + \pi$ zijn zuiver reële getallen, en $42i$ is een zuiver imaginair getal.

17.1.1 Het complexe vlak

We kunnen met elk complex getal $z = a + bi$ een uniek koppel (a, b) associëren. Op die manier kan een complex getal z ook voorgesteld worden als een punt in het vlak, met x-coördinaat a en y-coördinaat b:



CC BY-NC-SA 4.0

17.1 Complexe getallen

Als we het vlak op deze manier bekijken als de verzameling van de complexe getallen, spreken we van het **complexe vlak**. Het getal i komt daarbij overeen met het koppel $(0,1)$ op de y-as.

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/Ho_oadFkm1o

Oefening 17.1.1. Schets in het complexe vlak de gebieden omschreven door volgende vergelijkingen:

1. $\text{Im}(z) \leq 0$

2. $0 \leq \text{Re}(z) \leq 4$

17.1.2 Rekenen met complexe getallen

Voor complexe getallen kan, met de gebruikelijke rekenregels, de optelling en vermenigvuldiging gedefinieerd worden, waarbij steeds i^2 vervangen wordt door -1.

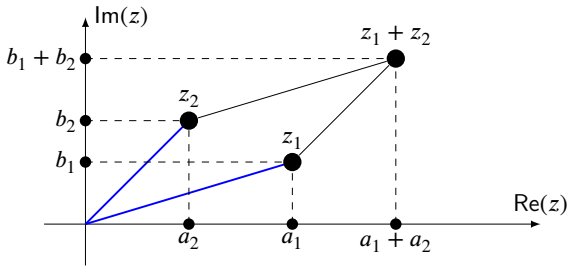
Definitie 17.1.2 (Som en product)**.**

Als $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, en dus $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ geldt:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \overset{\text{def}}{=} (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \overset{\text{def}}{=} a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \underbrace{i^2}_{i^2=-1} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Meetkundig is de optelling van complexe getallen hetzelfde als de optelling van vectoren in het vlak: het komt neer op de parallellogramregel:



Opmerking 17.1.1.

- Een complex getal kan per definitie op een unieke manier geschreven worden als $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$. Dus $1, i, 1+i, 1+3i$ zijn allemaal complexe getallen die we niet eenvoudiger kunnen schrijven. Maar $2i+3+i, i(1+i)$ en $(1+i)(1-i)$ zijn complexe getallen die we wel eenvoudiger kunnen schrijven als $2i+3+i = 3+3i, \quad i(1+i) = i+i^2 = -1+i, \quad (1+i)(1-i) = 1-i^2 = 1+1 = 2.$
- Als je twee complexe getallen kan optellen, is het ook eenvoudig om ze van elkaar af te trekken: $(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$. Je kan twee complexe getallen ook *delen* door elkaar, dit wordt later uitgelegd.
- Ingenieurs gebruiken meestal de letter j in plaats van i, onder meer om verwarring te voorkomen met de elektrische stroom i. Dan geldt dus $j^2 = -1$, en $z = a + bj \in \mathbb{C}$.
- Men kan aantonen dat de verzameling $\mathbb{C}$ **niet totaal kan geordend worden** zoals $\mathbb{Q}$ of $\mathbb{R}$. Hiermee wordt bedoeld dat het niet mogelijk is om een definitie te vinden voor $a + bi < c + di$ die zou voldoen aan dezelfde eigenschappen als de ongelijkheid $<$ in $\mathbb{R}$ of $\mathbb{Q}$. Je kan van twee

CC BY-NC-SA 4.0

17.1 Complexe getallen

complexe getallen dus niet zeggen welk het kleinste is.
In het bijzonder heeft het geen betekenis om te vragen of $2+3i$ *positief* of *negatief* is. Zo kan je ook niet zeggen dat $1+i$ *positief* is en $-1-i$ *negatief*, maar wel dat ze elkaars *tegengestelde* zijn. Hetzelfde geldt zelfs voor i: het heeft geen betekenis om te beweren dat i positief is, en $-i$ negatief. Het heeft wel betekenis om te zeggen dat i en $-i$ elkaars tegengestelde zijn.

Oefening 17.1.2.

1. $(1+2i)+(3+4i) = \ldots\ldots$

2. $(1+2i)\cdot(3+4i) = \ldots\ldots$

3. $(1+2i)\cdot(1-2i) = \ldots\ldots$

4. $(1+2i)\cdot\dfrac{1-2i}{2} = \ldots\ldots$

5. $(1+2i)\cdot i = \ldots\ldots$

6. $i^3 = \ldots\ldots$

7. $i^4 = \ldots\ldots$

17.1.3 Modulus en complex toegevoegde

Complexe getallen zijn niet alleen 'samengesteld', maar toch ook net iets 'complexer' dan reële getallen. Om ze te bestuderen beschikken we over twee nieuwe begrippen. Het eerste, de *modulus*, is een veralgemening van de absolute waarde van reële getallen. Het tweede, de zogenaamde *complex toegevoegde*, heeft niet direct een analoog voor de reële getallen:

Definitie 17.1.3 (Modulus en complex toegevoegde)**.**

De **modulus** (of **norm**) van een complex getal $z = a+bi$, genoteerd $|z|$, is het *positief reëel* getal

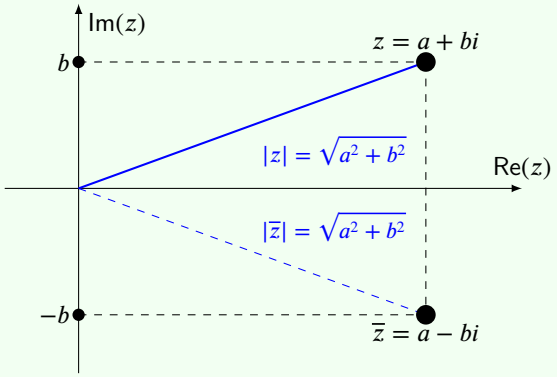
$$|z| \overset{\text{def}}{=} \boxed{|a+bi| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{a^2+b^2}}.$$

De modulus is meetkundig *de afstand tot de oorsprong*.

De **complex toegevoegde** van een complex getal $z = a+bi$, genoteerd als $\overline{z}$, is

$$\overline{z} \overset{\text{def}}{=} \boxed{\overline{a+bi} \overset{\text{def}}{=} a-bi}.$$

We noemen z en $\overline{z}$ **complex toegevoegd** (aan elkaar), en beide zijn elkaars spiegeling over de x-as.



CC BY-NC-SA 4.0

17.1 Complexe getallen

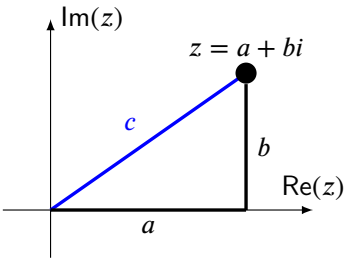
Opmerking 17.1.2. Soms noteert men ook z^* in plaats van $\overline{z}$.

Voorbeeld 17.1.2.

1. $\overline{3-4i} = 3+4i$
2. $|3-4i| = 5$
3. $|i| = 1$
4. $|-i| = 1$
5. $|-2| = 2$

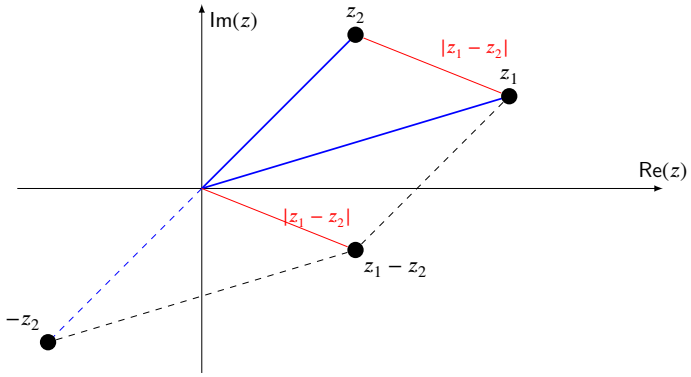
De modulus $|z|$ is de afstand van z tot de oorsprong in het complexe vlak.

Dit volgt uit de stelling van Pythagoras in onderstaande driehoek, waar $|z|^2 = c^2 = a^2 + b^2$:



$|z_1 - z_2|$ is de afstand tussen z_1 en z_2 in het complexe vlak.

Dit volgt uit het feit dat $z_1 - z_2$ wegens de parallellogramregel als vector gelijk is aan de vector tussen z_1 en z_2.



De meetkundige betekenis van de modulus en complex toegevoegde wordt ook uitgelegd in onderstaande video:

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/uSl9oLBjw1U

Eigenschap 17.1.1 (Eigenschappen modulus)**.** Voor complexe getallen $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ geldt

(a) $|z|$ is de afstand van z tot de oorsprong.

(b) $|z_1 - z_2|$ is de afstand tussen z_1 en z_2.

(c) $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.

(d) $|z| = 0 \iff z = 0$.

(e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

CC BY-NC-SA 4.0

17.1 Complexe getallen

LET OP: in het algemeen geldt niet ~~$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$~~ (want bv. $0 = |1+(-1)| \neq |1|+|-1| = 2$)

Oefening 17.1.3. Bereken voor een complex getal $z = a + bi \in \mathbb{C}$ volgende uitdrukkingen:

1. $z + \overline{z} = \ldots\ldots$
2. $z - \overline{z} = \ldots\ldots$
3. $z \cdot \overline{z} = \ldots\ldots$
4. $|z|^2 = \ldots\ldots$

Hiermee zijn volgende eigenschappen aangetoond die een complex getal combineren met zijn complex toegevoegde:

Eigenschap 17.1.2 (Eigenschappen van complex toevoegen)**.**

Voor een complex getal $z = a + bi$ geldt dat

$$\begin{array}{rclcrcl} z + \overline{z} & = & 2\mathrm{Re}(z) & \text{en} & z - \overline{z} & = & 2i\mathrm{Im}(z) \\ z\overline{z} & = & |z|^2 & & & & \end{array}$$

In het bijzonder zijn zowel de som als het product van een getal en zijn complex toegevoegde steeds *reëel*. Dat $z\overline{z}$ een reëel getal is kunnen we gebruiken om het quotiënt van twee complexe getallen te berekenen. We nemen als voorbeeld

$$\frac{3+2i}{1-5i}.$$

De deling van deze twee complexe getallen is opnieuw een complex getal. De deling uitvoeren wil zeggen $\dfrac{3+2i}{1-5i}$ schrijven in de vorm $a+bi$. Als we teller en noemer vermenigvuldigen met het complex toegevoegde van de noemer verdwijnt de i in de noemer en krijgen we een complex getal van de vorm $a + bi$:

$$\frac{3+2i}{1-5i} = \frac{(3+2i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{3+15i+2i+10i^2}{1+5i-5i-25i^2} = \frac{-7+17i}{26} = -\frac{7}{26} + \frac{17}{26}i$$

Merk op dat dit volledig analoog is met het verdrijven van wortelvormen als $2+3\sqrt{2}$ uit de noemer door teller en noemer te vermenigvuldigen met de zogenaamde *toegevoegde tweeterm* $2-3\sqrt{2}$.

Oefening 17.1.4. Schrijf volgende uitdrukkingen als een complex getal van de vorm $a + bi$:

1. $\dfrac{1}{1+2i} = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{1+2i}{3+4i} = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{3+4i}{1+2i} = \ldots\ldots$

Complex toevoegen werkt erg goed samen met de basisbewerkingen $+, -, \cdot$ en $\div$. We vermelden hier nog enkele eigenschappen:

Eigenschap 17.1.3 (Eigenschappen van complex toevoegen)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

17.1 Complexe getallen

Voor complexe getallen z_1 en z_2 geldt dat

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{en} \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad \text{en} \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

17.1.4 Vierkantsvergelijkingen

Voorbeeld 17.1.3. Bepaal alle oplossingen van volgende veeltermvergelijkingen.

1. $x^2 = 64$. Antwoord: $x = \pm 8$.

2. $x^2 = -64$

Uitwerking: We schrijven eerst -1 als i^2, dan wordt de vergelijking $x^2 = (i\,8)^2$ en vinden dan de oplossingen $x = 8i$, en $x = -8i$.

3. $x^2 = -3$

Uitwerking: We schrijven eerst -1 als i^2, dan wordt de vergelijking $x^2 = (i\sqrt{3})^2$ en vinden dan de oplossingen $x = i\sqrt{3}$, en $x = -i\sqrt{3}$.

We kunnen dus complexe getallen vinden waarvan het kwadraat een negatief reëel getal is. Stel dat we een vierkantsvergelijking hebben met negatieve disciminant D, bijvoorbeeld

$$z^2 + z + 1 = 0$$

met

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3,$$

dan zijn er geen reële oplossingen, maar kunnen we toch twee complexe oplossingen vinden. We weten dat $D = -3 = (i\sqrt{3})^2$, of ook $i\sqrt{3} = i\sqrt{-D}$ want $-D = 3$. We spreken af om het symbool $\sqrt{\cdot}$ enkel te gebruiken voor positieve reële getallen, niet voor complexe getallen, maar in andere cursussen kunnen andere afspraken gemaakt worden. De oplossingen van de vierkantsvergelijking zijn

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{en} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Inderdaad, $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ is een oplossing van $z^2 + z + 1 = 0$ want

$$\begin{aligned}(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 1 &= \frac{(-1 + i\sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3})}{4} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 1 \\ &= \frac{1 - i\,2\sqrt{3} - 3}{4} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 1 \\ &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{-2}{2} + 1 = 0.\end{aligned}$$

Met een analoge berekening kan je nagaan dat ook z_2 een oplossing is van $z^2 + z + 1 = 0$.

Zo maken de complexe getallen de theorie van het oplossen van vergelijkingen in zekere zin makkelijker. Bij vierkantsvergelijkingen moeten we geen gevalsonderscheid meer maken naargelang de waarde van de discriminant $D = b^2 - 4ac$. Bij $D < 0$ zijn de oplossingen dan geen reële getallen, maar twee complexe getallen.

CC BY-NC-SA 4.0

17.1 Complexe getallen

Eigenschap 17.1.4 (Oplossen van vierkantsvergelijkingen met negatieve discriminant)**.**

De twee oplossingen z_1 en z_2 van een vierkantsvergelijking $az^2 + bz + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ met discriminant $D = b^2 - 4ac < 0$ zijn

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$$

Oefening 17.1.5. Los volgende vergelijkingen op over de complexe getallen

1. $x^2 + 4 = 0$. Antwoord: ... ...

2. $x^2 + 2x + 5 = 0$. Antwoord: ... ...

3. $x^2 + 3x + 7 = 0$. Antwoord: ... ...

In de verzameling van de complexe getallen heeft een vierkantsvergelijking dus steeds twee al dan niet samenvallende oplossingen. Of anders geformuleerd: een tweedegraadsveelterm heeft steeds 2 al dan niet samenvallende nulpunten, indien ook complexe getallen als nulpunten toegelaten zijn. Dit kunnen we veralgemenen tot n-de graadsveeltermen, waarbij we ook toelaten dat de coëfficiënten complexe getallen zijn:

Eigenschap 17.1.5 (Hoofdstelling van de algebra)**.** Voor een veelterm $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ met coëfficiënten $a_i \in \mathbb{C}$
bestaan er n complexe getallen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, (niet noodzakelijk allemaal onderling verschillend) zodat

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 + a_0 = a_n(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n)$$

Bijgevolg zijn $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ oplossingen van de vergelijking

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

CC BY-NC-SA 4.0

17.1.A Basisoefeningen complexe getallen

17.1.A.1 Niveau 2

Oefening 17.1.6. Bereken volgende uitdrukkingen. Schrijf de complexe getallen in de vorm $a+bi$.

1. $(4+i)+(1-2i) = \ldots\ldots$
2. $(2+4i)-(6-7i) = \ldots\ldots$
3. $(2+3i)(-5+i) = \ldots\ldots$
4. $(2+i)^2 = \ldots\ldots$
5. $(2+i)+\overline{(3+2i)} = \ldots\ldots$
6. $(5-6i)(5+6i) = \ldots\ldots$
7. $|3-2i| = \ldots\ldots$
8. $|3-2i+\overline{4-2i}| = \ldots\ldots$
9. $|3+4i+4+3i| = \ldots\ldots$
10. $|3+4i|+|4+3i| = \ldots\ldots$
11. $\left|\dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}\right| = \ldots\ldots$

Oefening 17.1.7. Een complex getal z kunnen we schrijven als $z = a+bi$ met a en b reële getallen en $i^2 = -1$. Dan zijn er onder de lijst van complexe getallen

$$\frac{(1+i)^4}{4},\quad \frac{(1-i)^4}{4},\quad \frac{(1+i)^2}{2},\quad \frac{(1-i)^2}{2},\quad i^2$$

precies

0	1	2	3	4	5	42

die gelijk zijn aan -1.

Oefening 17.1.8. Schets in het complexe vlak de gebieden omschreven door volgende vergelijkingen:

1. $|z| < 1$
2. $|z| \leq 1$
3. $|z| = 1$
4. $|z-i| < 1$
5. $|z-i| \geq 1$
6. $1 < |z+2i-1| \leq 2$
7. $-1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 2$
8. $|\mathrm{Im}(z)-i| < \sqrt{2}$
9. $|\mathrm{Re}(z)-i| < \sqrt{2}$
10. $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z) > 0$

CC BY-NC-SA 4.0

17.1.A Basisoefeningen complexe getallen

Oefening 17.1.9. Voer volgende delingen uit door de opgave te schrijven in de vorm $a + bi$.

1. $\frac{7}{i} = \ldots\ldots$
2. $\frac{1}{5+2i} = \ldots\ldots$
3. $\frac{1+i}{2+3i} = \ldots\ldots$
4. $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = \ldots\ldots$

Oefening 17.1.10. Bepaal alle oplossingen van volgende veeltermvergelijkingen.

1. $x^2 + x = 0$
2. $x^3 + 16x = 0$
3. $x^2 + 5x + 2 = 0$
4. $x^2 + 4x + 5 = 0$
5. $9x^2 - 14 = 4x$
6. $x = 2x^2 + 5$

Oefening 17.1.11. Los op naar a.

1. $a^2 + ab + b^2 = 0$

Oefening 17.1.12. Geef een vierkantsvergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ die

1. enkel het getal -5 als oplossing heeft.
2. $x_1 = 3 - i$ en $x_2 = 3 + i$ als oplossingen heeft.

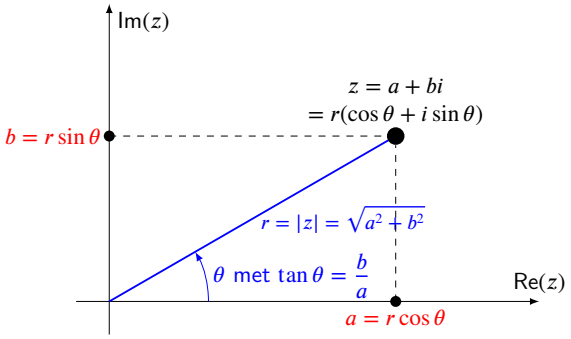
CC BY-NC-SA 4.0

17.2 De goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

Een punt z in het vlak kan volledig bepaald worden door zijn projecties op de x-as en de y-as. In het complexe vlak noemen we de x-as ook de *reële* as en de y-as de *imaginaire* as. We schrijven een complex getal als $z = a + bi$. Er is echter een alternatieve manier via zogenaamde poolcoördinaten die gebruik maken van $r = |z|$, de afstand tot de oorsprong, en θ, de hoek die de overeenkomstige vector maakt met de positieve reële as. Het koppel (r, θ) zijn de *poolcoördinaten* van het punt z. In de context van complexe getallen noemen we $r = |z|$ de **modulus** en θ het **argument** (ook wel *fase* genoemd). De hoek θ wordt gemeten in radialen, in tegenwijzerzin, en is slechts op een veelvoud van 2π na bepaald.

Deze schrijfwijze is bijvoorbeeld erg handig bij vermenigvuldigingen en machten van complexe getallen, want die worden veel eenvoudiger.

We tekenen het complexe getal z met cartesische coördinaten en met poolcoördinaten:



Omdat $a = r\cos\theta$ en $b = r\sin\theta$ kunnen we $z = a + bi$ ook schrijven als $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Dit noemen we de **goniometrische** (ook **polaire**) **schrijfwijze** van het complex getal z. We noemen $z = a + bi$ de **cartesische schrijfwijze**.

Opmerking 17.2.1.

- Omdat θ niet uniek bepaald is, heeft elk complex getal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *oneindig veel goniometrische schrijfwijzes* $z = r\,(\cos(\theta + k2\pi) + i\sin(\theta + k2\pi))$, met $k \in \mathbb{Z}$. Vaak wordt er echter voor gekozen om θ tussen 0 en 2π te geven: we kunnen ons sneller voorstellen waar de hoek $\frac{5\pi}{4}$ ligt dan de hoek $\frac{1093\pi}{4}$.
- Twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na.

Oefening 17.2.1.

Geef de goniometrische schrijfwijze van volgende complexe getallen waarvan het argument gemakkelijk grafisch gevonden kan worden:

1. $z = 1$

2. $z = i$

3. $z = 1 + i$

4. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Merk op: bij het opschrijven van de goniometrische schrijfwijze met concrete getallen moet je de sin en cos laten staan. Als je die toch zou uitrekenen, krijg je immers terug de cartesische schrijfwijze.

CC BY-NC-SA 4.0

17.2 De goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

Je kan verder experimenteren met volgende applet: Je kan $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ verplaatsen en telkens $a = \text{Re}(z)$, $b = \text{Im}(z)$, $r = |z|$ en θ aflezen.

GeoGebra link: https://www.geogebra.org/m/NwzgUCQG

Het blijkt dat sommige berekeningen eenvoudiger zijn in de cartesische schrijfwijze en andere in de goniometrische schrijfwijze. Om te switchen tussen beide schrijfwijzes herhalen we de transformatieformules van poolcoördinaten:

Eigenschap 17.2.1 (Transformatieformules cartesische en goniometrische schrijfwijze)**.**

Een complex getal z met goniometrische schrijfwijze $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ heeft als cartesische schrijfwijze $a + bi$ met:

$$a = r\cos\theta$$
$$b = r\sin\theta$$

Een complex getal z met cartesische schrijfwijze $a + bi$ heeft als goniometrische schrijfwijze $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ met:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Opmerking 17.2.2.

Als $a \neq 0$ kunnen we de tweede vergelijking delen door de eerste (waardoor de vierkantswortel wegvalt) en krijgen we

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \quad \text{als } a \neq 0$$

Als $a > 0$ dan is θ een hoek in het 1ste of het 4de kwadrant en is dus per definitie van de boogtangens

$$\theta = \text{bgtan}\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{als } a > 0$$

Als $a < 0$ dan is θ een hoek in het 2de of het 3de kwadrant en dan geldt

$$\theta = \text{bgtan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi \quad \text{als } a < 0$$

Als $a = 0$, dan ligt $z = a + bi$ op de y-as en geldt

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{als } a = 0, b > 0$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{als } a = 0, b < 0$$

Samengevat geeft dit voor θ:

$$\theta = \begin{cases} \text{bgtan}\,\dfrac{b}{a} & \text{als } a > 0 \\ \pi + \text{bgtan}\,\dfrac{b}{a} & \text{als } a < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{als } a = 0, b > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{als } a = 0, b < 0 \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

17.2 De goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

Dit alles wordt ook uitgelegd in onderstaande video:

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/_qLKTopxSXc

17.2.1 Vermenigvuldiging van complexe getallen in goniometrische schrijfwijze

In de goniometrische schrijfwijze is het niet eenvoudig om complexe getallen op te tellen: hiervoor is de cartesische schrijfwijze veel makkelijker, omdat we dan gewoon reëel en imaginair deel bij elkaar moeten optellen. Voor de vermenigvuldiging van complexe getallen is het andersom: daarvoor is er de volgende interessante formule voor de goniometrische schrijfwijze:

Als $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ twee complexe getallen zijn, dan is

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))\,, \end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap gebruik hebben gemaakt van de som- en verschilformules. Dit betekent dat de moduli r_i moeten worden vermenigvuldigd, en de argumenten θ_i moeten worden opgeteld.

Eigenschap 17.2.2 (Vermenigvuldiging van twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze)**.**

De *modulus* van het product van twee complexe getallen is het *product van de moduli* van die getallen.

Het *argument* van het product van twee complexe getallen is de *som van de argumenten* van die getallen.

CC BY-NC-SA 4.0

17.2.A Oefeningen goniometrische schrijfwijze van complexe getallen

Oefening 17.2.2. Schrijf onderstaande getallen in goniometrische vorm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Zorg er steeds voor dat θ tussen 0 en 2π ligt, dus niet $-\frac{\pi}{2}$ invullen maar $\frac{3\pi}{2}$.

1. Voor $z = 1$ is $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$
2. Voor $z = -1$ is $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$
3. Voor $z = i$ is $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$
4. Voor $z = -i$ is $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$
5. Voor $z = \sqrt{3} + i$ is $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$
6. Voor $z = -\sqrt{3} + i$ is $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$
7. Voor $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$ is $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$
8. Voor $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ is $r = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$

Oefening 17.2.3. Bepaal de modulus $|z|$ en het argument θ van volgende complexe getallen z. Geef de hoek θ in tussen 0 en 2π radialen.

1. Als $z = -7i$, dan is $|z| = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$
2. Als $z = (7i)^{-1}$, dan is $|z| = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$
3. Als $z = \overline{1+i}$, dan is $|z| = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$
4. Als $z = \frac{1-i}{1+i}$, dan is $|z| = \ldots\ldots$ en $\theta = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

17.3 Machten van complexe getallen: formule van De Moivre

Met de formules van het product van complexe getallen kunnen we natuurlijk ook het *kwadraat* van een complex getal berekenen, door eenvoudig twee keer hetzelfde getal in te vullen. In de cartesische schrijfwijze is dat mooi, maar niet spectaculair. In de goniometrische schrijfwijze vinden we iets bijzonder interessants:

Een kwadraat van een complex getal $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ is

$$z^2 = a^2 + 2abi - b^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

Als we een derde of vierde macht willen berekenen worden de formules met a en b steeds ingewikkelder, maar de formules in r en θ blijven verrassend eenvoudig:

Eigenschap 17.3.1 (Formule van De Moivre)**.**

Voor een complex getal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ en elk natuurlijk getal n geldt

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Onderstaande applet illustreert de geometrische betekenis van deze formule: $z = 1 + i$ is vast gekozen en weergegeven in het complexe vlak. De modulus van z is $|z| = r = \sqrt{2}$. Je kan met het schuivertje een macht n opgeven en daarna z^n op de figuur laten weergeven. Eerst wordt $r^n = (\sqrt{2})^n$ berekend en weergegeven op de reële as. Daarna wordt θ vermenigvuldigd met n en wordt ook z^n weergegeven.

GeoGebra link: https://www.geogebra.org/m/nglwjJ79

Voorbeeld 17.3.1. We kunnen $(1+i)^8$ op 2 manieren berekenen:

(a) $(1+i)(1+i) = 1+2i-1 = 2i$, dus $(1+i)(1+i)(1+i)(1+i) = (2i)^2 = -4$, dus $(1+i)^8 = (-4)^2 = 16$

(b) $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$, dus $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4}) = 2^4(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16(1 + i\cdot 0) = 16$

Oefening 17.3.1. Bereken met de formule van De Moivre

1. $(\sqrt{3}+i)^3 = \ldots\ldots$

2. $(-1-i)^{20} = \ldots\ldots$

3. $(1+i)^{21} = \ldots\ldots$

4. $(-\sqrt{3}+i)^5 = \ldots\ldots$

Ook vergelijkingen van de vorm: $z^n = a + bi$ met $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$ zijn met de formule van De Moivre op te lossen. Volgens de Hoofdstelling van de Algebra heeft de vergelijking $z^n = a+bi$ steeds n oplossingen. Het oplossen van de vergelijking $z^n = a + bi$ komt neer op het zoeken van de n-de machtswortels van $a + bi$.

Oefening 17.3.2. Bereken alle oplossingen van $z^2 = 1 - i$, met $z \in \mathbb{C}$.

Voorbeeld 17.3.2. Zoek alle vierdemachtswortels uit 1.

Uitwerking: We zoeken dus alle oplossingen van de vergelijking $z^4 = 1$.

We stellen $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Het linkerlid van de vergelijking wordt dan volgens de formule van De Moivre

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta).$$

CC BY-NC-SA 4.0

17.3 Machten van complexe getallen: formule van De Moivre

Voor het rechterlid 1 geldt

$$|1| = 1, \qquad \arg(1) = 0,$$

zodat

$$1 = 1(\cos 0 + i \sin 0).$$

De vergelijking $z^4 = 1$ in de onbekende z wordt zo een vergelijking in de onbekenden r en θ:

$$r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

Gelijkheid van complexe getallen leert ons dat

$$r^4 = 1 \text{ met } r \in \mathbb{R}^+ \text{ en } 4\theta = 0 + 2k\pi \text{ met } k \in \mathbb{Z}.$$

Dus $r = 1$, want $r^4 = 1$ heeft slechts 1 reële oplossing, en $\theta = k\pi/2$ met $k \in \mathbb{Z}$.
Dit levert vier verschillende wortels.
$z_1 = 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1$,
$z_2 = 1(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2) = i$,
$z_3 = 1(\cos \pi + i \sin \pi) = -1$,
$z_4 = 1(\cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2) = -i$.

Dit voorbeeld kan je veel sneller oplossen door $z^4 - 1$ te ontbinden in factoren:

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1)$$

De nulpunten hiervan zijn inderdaad 1,-1,i,-i. Ontbinden in factoren lukt echter niet meer bij bijvoorbeeld $z^5 = 1$, hiervoor moet je bovenstaande methode gebruiken.

Oefening 17.3.3. Bereken alle oplossingen van $z^3 = 8i$, met $z \in \mathbb{C}$.

CC BY-NC-SA 4.0

17.4 De exponentiële schrijfwijze van complexe getallen

We definiëren een uitbreiding van de exponentiële functie tot de verzameling van de complexe getallen.

Definitie 17.4.1. Als $z = x + iy \in \mathbb{C}$ dan is e^z het complexe getal

$$e^z = e^{x+iy} \stackrel{\text{def}}{=} e^x(\cos y + i \sin y)$$

Dit is inderdaad een uitbreiding want voor $z \in \mathbb{R}$ is e^z de reeds gekende exponentiële functie.

Met behulp van de somformules van sinus en cosinus kan je ook aantonen dat met deze definitie de gekende eigenschap van de reële exponentiële functie $e^{x+y} = e^x e^y$ voor $x, y \in \mathbb{R}$ blijft gelden in $\mathbb{C}$.

Eigenschap 17.4.1. Voor $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ geldt

$$e^{z_1+z_2} = e^{z1} e^{z2}$$

Opmerking 17.4.1. $e^x(\cos y + i \sin y)$ is van de vorm $r(\cos\theta + i \sin\theta)$, dus

- $|e^z| = e^x$
- $\arg e^z = y + 2k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$

Oefening 17.4.1. Geef modulus en argument van e^{iz} met $z = x + iy$.

Een onmiddelijk gevolg van deze definitie is wat dikwijls de mooiste wiskundige formule wordt genoemd. Deze formule geeft een erg merkwaardig verband tussen de fundamentele grootheden e, π, i en -1.

Eigenschap 17.4.2. $e^{i\pi} = -1$

Vermits $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, voor $y \in \mathbb{R}$, kunnen we een complex getal in goniometrische vorm $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ ook schrijven als $z = re^{i\theta}$. We noemen dit de **exponentiële schrijfwijze**.

Opmerking 17.4.2.

Twee complexe getallen in exponentiële schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na.

Oefening 17.4.2. Schrijf $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ in de vorm $x + iy$. $2e^{i\frac{2\pi}{3}} = \ldots\ldots$

Omdat $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$ voor $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, wordt het vermenigvuldigen van twee complexe getallen nog eenvoudiger in de exponentiële schrijfwijze.

Eigenschap 17.4.3. Als $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ en $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ twee complexe getallen zijn, dan is

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} \\ &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \end{aligned}$$

en als $z = re^{i\theta}$, dan is voor $n \in \mathbb{N}$ (formule van De Moivre)

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

CC BY-NC-SA 4.0

17.4 De exponentiële schrijfwijze van complexe getallen

Oefening 17.4.3 (Vierkantswortels). Bereken alle oplossingen van $z^2 = 1 - i$, met $z \in \mathbb{C}$.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 18
Limieten

(Versie 2026/11/23H.2)

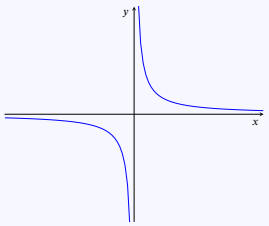
18.1 Limieten grafisch

We geven enkele voorbeelden en een intuïtieve definitie van limieten van *functies*. Daarmee bepalen we limieten van enkele eenvoudige functies. Daarna leren we om met wiskundig exacte rekenregels vanaf die basislimieten ingewikkeldere limieten te berekenen.

Limieten worden in de wiskunde gebruikt bij integralen en afgeleiden, maar ook bij asymptoten en het bestuderen van het verloop van functies.

Voorbeeld 18.1.1 (Belangrijk voorbeeld)**.**

Beschouw opnieuw de grafiek van de functie $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$:



We onderzoeken waar de functiewaarde $f(x)$ naar toe gaat als x naar een bepaalde waarde c gaat in het domein of op de rand van het domein. Voor bijvoorbeeld $c = 2$ is dat een eenvoudige vraag: als x naar 2 gaat, dan gaat $f(x)$ naar $\frac{1}{2}$. We kunnen immers $x = 2$ gewoon invullen in het functievoorschrift. We schrijven ook 'als $x \to 2$, dan $\frac{1}{x} \to \frac{1}{2}$', of nog korter

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

Een interessantere vraag is waar de functiewaarde naartoe gaat wanneer x naar $+\infty$ of $-\infty$ gaat, of wanneer we x naar $c = 0$ laten gaan, omdat we in deze gevallen $x = c$ niet meer kunnen invullen in het functievoorschrift: $+\infty$, $-\infty$ en 0 zijn de punten 'op de rand' van het domein.

Wanneer we x heel groot laten worden, wordt natuurlijk $\frac{1}{x}$ heel klein. Wanneer x *oneindig groot* is, $x = +\infty$, kunnen we x niet meer invullen in het functievoorschrift. We kunnen wel redelijkerwijs zeggen dat 'als x steeds groter wordt, $\frac{1}{x}$ steeds kleiner wordt en steeds dichter bij nul zal liggen'. We schrijven ook 'als $x \to +\infty$, dan $\frac{1}{x} \to 0$', of nog korter:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Wanneer we x naar $-\infty$ laten gaan, zal $\frac{1}{x}$ ook steeds dichter bij nul liggen:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ook $x = 0$ kunnen we niet invullen in het functievoorschrift, want delen door nul kan niet. Voor x heel klein (in de betekenis van heel dicht bij 0), lijkt het nochtans ook eenvoudig: als x naar 0 gaat, dat wordt $\frac{1}{x}$ immers oneindig groot. Maar, er is een complicatie: als x negatief is en dicht bij 0 ligt, dan wordt x niet heel groot, maar net heel klein (in de betekenis van heel erg negatief). Dus voor x dicht bij 0, kan $1/x$ ofwel heel groot zijn (als $x > 0$), ofwel net heel erg negatief (als $x < 0$). Dus het hangt er van af 'langs welke kant' we x naar 0 laten gaan, of we in $+\infty$ dan wel in $-\infty$ uitkomen.

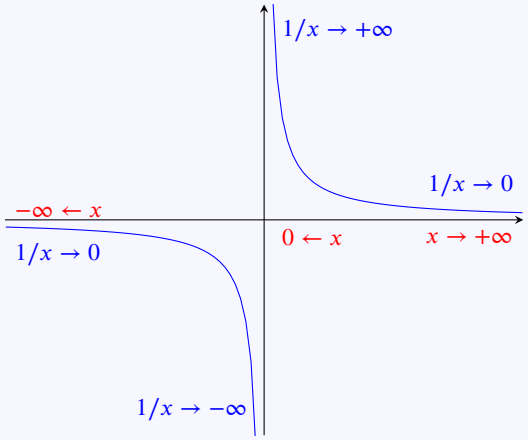
CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Limieten grafisch

We spreken in dit geval niet van een limiet: $\lim_{x\to 0} f(x)$ bestaat niet. We hebben wel een *linkerlimiet* als we 0 langs links benaderen (met $x < 0$) en een *rechterlimiet* voor naderen langs rechts (met $x > 0$). We noteren dit als:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$$

De situatie wordt verduidelijkt op volgende tekening:



Zoals in vorig voorbeeld $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ kan je ook volgende limieten eenvoudig berekenen:

Oefening 18.1.1. Bereken volgende limieten.

1. $\lim_{x\to 0} e^x = \ldots\ldots$
2. $\lim_{x\to 1}(3x^2 - 4x + 2) = \ldots\ldots$

Als f een continue functie is, $c \in \mathbb{R}$ (dus niet $+\infty$ of $-\infty$) en c geen nulpunt van de noemer is, dan geldt:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

We bestuderen verder dan ook enkel limieten

- in $c = +\infty$ of $c = -\infty$
- in nulpunten van de noemer

We beperken ons tot volgende notatie en (pseudo-)definitie in verband met het begrip limiet:

Definitie 18.1.1 (Intuïtieve pseudo-definitie van limiet)**.** Zij f een reële functie, en a en c telkens ofwel een reëel getal, ofwel één van de symbolen $+\infty$ of $-\infty$. Dan zeggen en schrijven we dat

CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Limieten grafisch

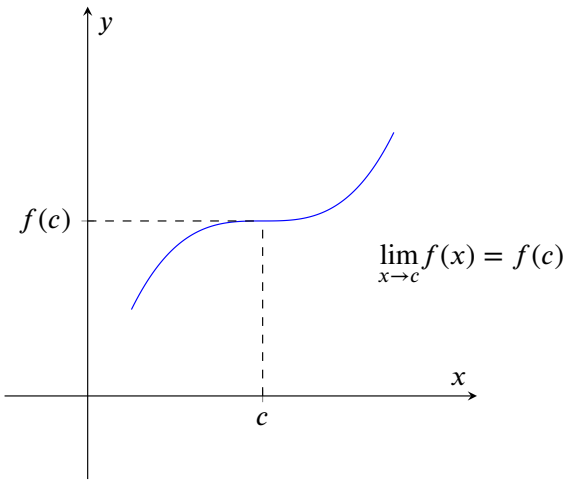
$$\lim_{x\to c} f(x) = a \iff \text{de limiet van } f \text{ als } x \text{ naar } c \text{ gaat is gelijk aan } a$$
$$\iff \text{als } x \to c, \text{ dan } f(x) \to a$$

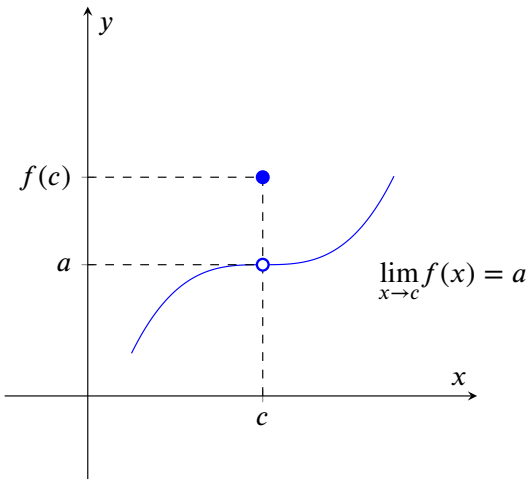
$$\lim_{\substack{x\to c\\<}} f(x) = a \iff \text{de linkerlimiet van } f \text{ als } x \text{ naar } c \text{ gaat is gelijk aan } a$$
$$\iff \text{de limiet van } f \text{ als } x \text{ langs links naar } c \text{ gaat is gelijk aan } a$$
$$\iff \text{als } x \to c \textbf{ langs links } (\text{dus } x < c), \text{ dan } f(x) \to a$$

$$\lim_{\substack{x\to c\\>}} f(x) = a \iff \text{de rechterlimiet van } f \text{ als } x \text{ naar } c \text{ gaat is gelijk aan } a$$
$$\iff \text{de limiet van } f \text{ als } x \text{ langs rechts naar } c \text{ gaat is gelijk aan } a$$
$$\iff \text{als } x \to c \textbf{ langs rechts } (\text{dus } x > c), \text{ dan } f(x) \to a$$

We illustreren enkele mogelijkheden aan de hand van onderstaande grafieken.

- In de linkse figuur zien we dat de limiet van f als x naar c gaat gelijk is aan de functiewaarde $f(c)$. In de rechtse figuur is dit echter niet het geval: de grafiek van f maakt een sprong in $x = c$. Als x de waarde c nadert, dan nadert $f(x)$ de waarde a, ook al is a verschillend van de functiewaarde $f(c)$.

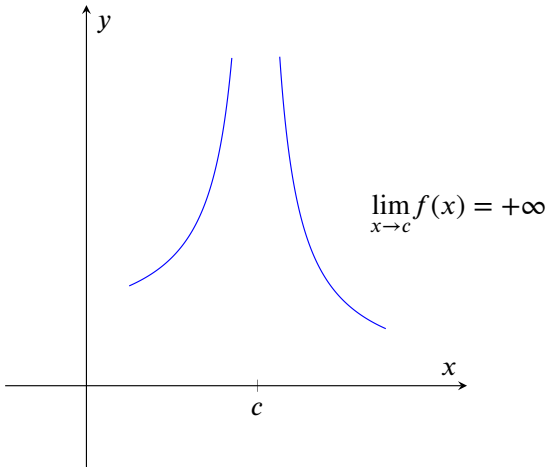


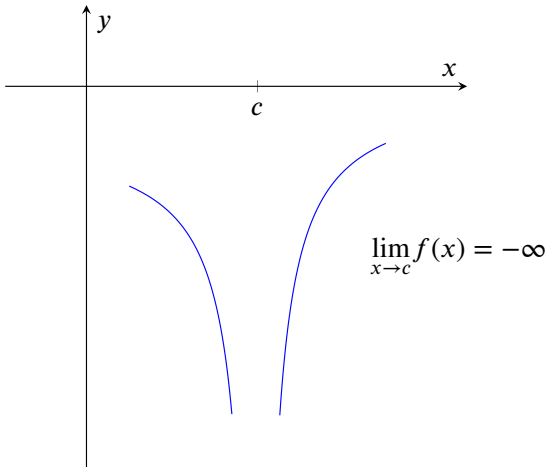


- De limiet van f als x naar c gaat is niet altijd een reëel getal, zoals de volgende figuren illustreren. In de linkse figuur wordt $f(x)$ steeds groter naarmate x de waarde c nadert. De limiet van f als x naar c gaat is dus gelijk aan $+\infty$. In de rechtse figuur wordt $f(x)$ juist steeds kleiner naarmate x de waarde c nadert. In dit geval is de limiet van f als x naar c gaat gelijk aan $-\infty$.

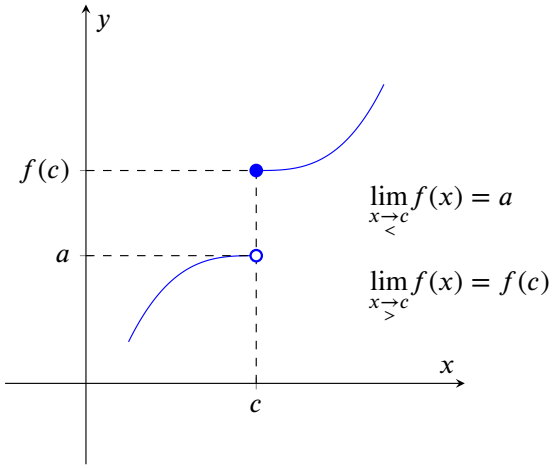
CC BY-NC-SA 4.0

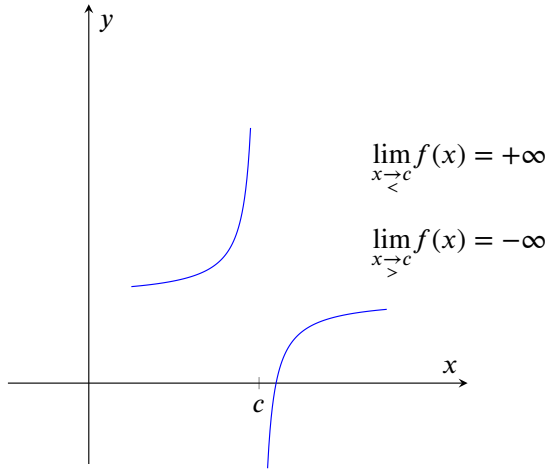
18.1 Limieten grafisch





- In sommige gevallen hangt de limiet van f als x naar c gaat af van de richting waarin x naar c gaat. De linker- en rechterlimiet zijn dan verschillend, zoals in de volgende figuren. In de linkse figuur zijn beide limieten reële getallen, maar ze zijn verschillend van elkaar. In de rechtse figuur zijn de linker- en rechterlimiet ook verschillend: de ene is gelijk aan $+\infty$, terwijl de andere gelijk is aan $-\infty$.

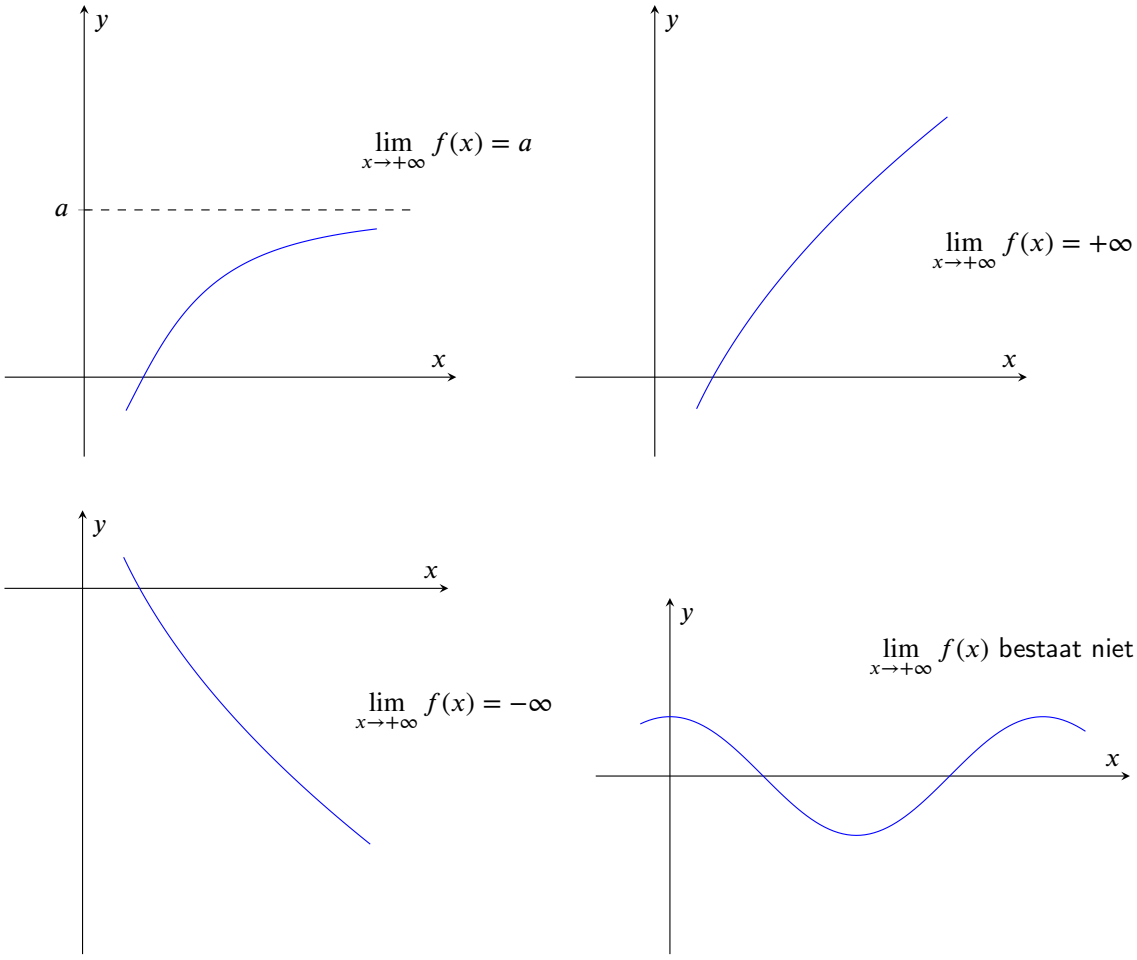




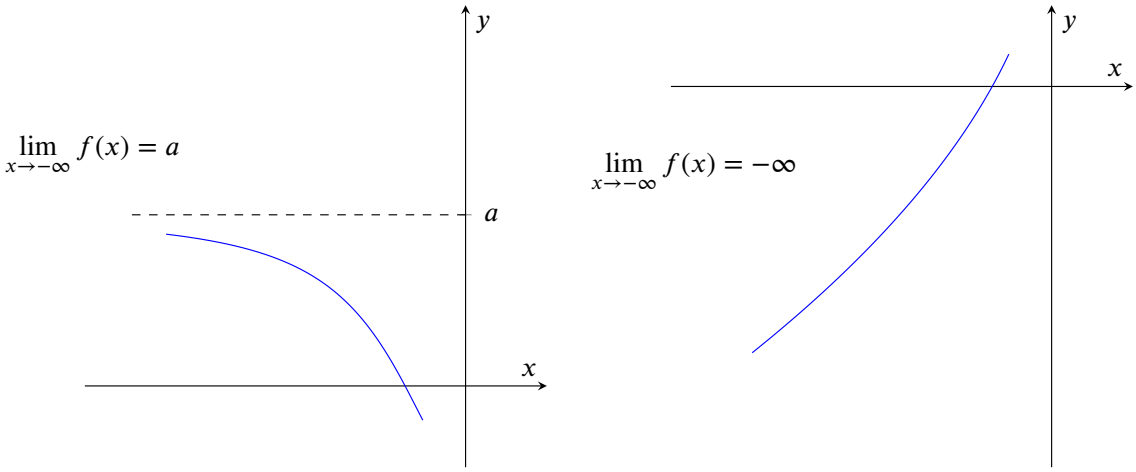
- We kunnen ook de limiet van f bepalen als x naar $+\infty$ gaat. In de figuur linksboven nadert $f(x)$ de waarde a als x steeds groter wordt. De limiet van f als x naar $+\infty$ gaat is dus gelijk aan het reële getal a. In de figuur rechtsboven blijft de grafiek stijgen als x naar $+\infty$ gaat. De limiet is in dit geval gelijk aan $+\infty$. In de figuur linksonder blijft de grafiek juist dalen als x naar $+\infty$ gaat. De limiet is in dit geval gelijk aan $-\infty$. De grafiek in de figuur rechtsonder nadert geen bepaalde waarde als x naar $+\infty$ gaat en de grafiek blijft niet stijgen of dalen, we zeggen dat de limiet van f als x naar $+\infty$ gaat niet bestaat.

CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Limieten grafisch



- Analoog kunnen we de limiet van f bepalen als x naar $-\infty$ gaat. In de linkse figuur nadert $f(x)$ de waarde a als x steeds kleiner wordt. De limiet van f als x naar $-\infty$ gaat is dus gelijk aan het reële getal a. In de rechtse figuur blijft de grafiek dalen als x naar $-\infty$ gaat. De limiet is in dit geval gelijk aan $-\infty$. Net als in het vorige geval (limiet in $+\infty$) kan het ook voorkomen dat de limiet van f als x naar $-\infty$ gaat gelijk is aan $+\infty$ of niet bestaat.



CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Limieten grafisch

Opmerking 18.1.1.

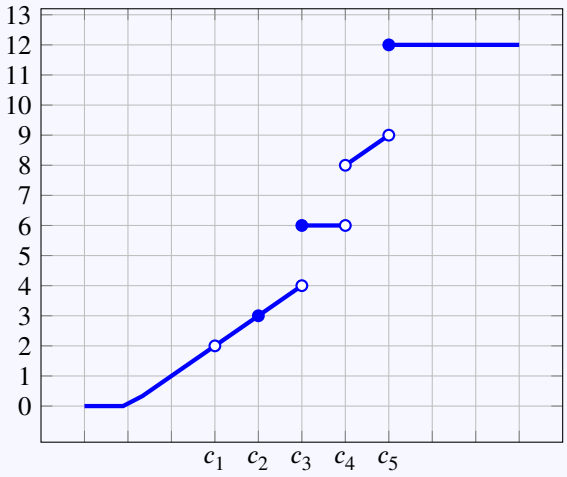
- Als we de uitdrukking $\lim_{x\to c} f(x) = a$ samen met de grafiek van f bekijken, dan bevindt c zich op de x-as (het domein van f), en bevindt a (en dus de limiet zelf) zich op de y-as (het codomein van f).
- Uit deze definitie volgt dat de limiet bestaat als en slechts als zowel de linker- als de rechterlimiet bestaan en beide aan elkaar gelijk zijn. Dus:

$$\lim_{x\to c} f(x) = a \iff \lim_{\substack{x\to c\\<}} f(x) = a \text{ en } \lim_{\substack{x\to c\\>}} f(x) = a$$

- De pseudo-definitie is bewust enigszins vaag over welke waarden c precies mag aannemen. We beperken ons tot punten of randpunten van het domein van f. Dus, we kunnen spreken van de limiet van $f(x) = \sqrt{x}$ in de punten 1 en π en 81 (punten van het domein), of van de limiet in $+\infty$ of de rechterlimiet in 0 (punten 'op de rand van het domein'), maar de limiet in de punten -1 en -314 heeft *geen* betekenis. Zo zijn bijvoorbeeld ook de limieten $\lim_{x\to-\infty} \ln x$ en $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ duidelijk niet te bepalen.

Voorbeeld 18.1.2 (Linker- en rechterlimiet)**.**

We beschouwen de functie f met onderstaande grafiek:



We hebben volgende limieten in de punten c_i:

c_1	$\lim_{\substack{x\to c_1\\<}} f(x) = 2$	$\lim_{\substack{x\to c_1\\>}} f(x) = 2$	$\lim_{x\to c_1} f(x) = 2$
c_2	$\lim_{\substack{x\to c_2\\<}} f(x) = 3$	$\lim_{\substack{x\to c_2\\>}} f(x) = 3$	$\lim_{x\to c_2} f(x) = 3$
c_3	$\lim_{\substack{x\to c_3\\<}} f(x) = 4$	$\lim_{\substack{x\to c_3\\>}} f(x) = 6$	$\lim_{x\to c_3} f(x)$ bestaat niet
c_4	$\lim_{\substack{x\to c_4\\<}} f(x) = 6$	$\lim_{\substack{x\to c_4\\>}} f(x) = 8$	$\lim_{x\to c_4} f(x)$ bestaat niet
c_5	$\lim_{\substack{x\to c_5\\<}} f(x) = 9$	$\lim_{\substack{x\to c_5\\>}} f(x) = 12$	$\lim_{x\to c_5} f(x)$ bestaat niet

CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Limieten grafisch

Voorbeeld 18.1.3 (Linker- en rechterlimiet)**.**

$\lim_{x\to 7}(-2+\sqrt{x-7})$ bestaat niet omdat x alleen langs rechts ($x > 7$) naar 7 kan gaan. De **rechterlimiet** bestaat wel:

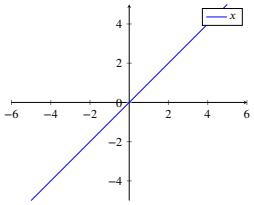
$$\lim_{\substack{x\to 7\\ >}}(-2+\sqrt{x-7}) = -2$$

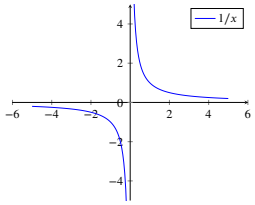
Limieten kunnen op volgende wijze worden bepaald:

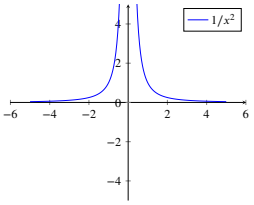
(a) enkele basislimieten lezen we af op een *grafiek*

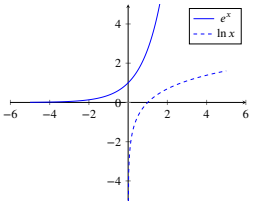
(b) voor ingewikkeldere functies gebruiken we betrouwbare *rekenregels*

Oefening 18.1.2. Bepaal de limieten op basis van de grafieken (indien ze bestaan):









1. $\lim_{x\to+\infty} x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
2. $\lim_{x\to-\infty} x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
4. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
5. $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
6. $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
8. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
9. $\lim_{x\to+\infty} e^x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
10. $\lim_{x\to-\infty} e^x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
11. $\lim_{x\to+\infty} \ln x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
12. $\lim_{x\to-\infty} \ln x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

CC BY-NC-SA 4.0

18.1 Limieten grafisch

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \ln x =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

15. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

Opmerking 18.1.2.

(a) Let op: het *berekenen* van een limiet op basis van een grafiek werkt enkel als de grafiek betrouwbaar is. In deze cursus gebruiken we de methode *enkel* voor bovenstaande basislimieten. In die gevallen kan men ook bewijzen dat de limieten wiskundig exact zijn.

(b) Let op: het *aflezen* van een limiet op een (betrouwbare) grafiek is een belangrijke vaardigheid. *Als* je een betrouwbare grafiek krijgt, moet je snel de relevante limieten kunnen aflezen.

(c) Let op: je kan dikwijls ook een limiet bepalen door enkele waarden te berekenen 'in de buurt', zoals bijvoorbeeld voor $\dfrac{\sin(0,01)}{0,01} = 0,999983\ldots$ waaruit zou kunnen blijken dat dus allicht $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Maar soms zijn berekeningen erg misleidend of volledig foutief. Zie bijvoorbeeld in de uitweiding onderaan voor $\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$.

Oefening 18.1.3. Bepaal deze limieten, indien ze bestaan, via een redenering op basis van de grafieken van de functies $e^x, \ln x$ en $\dfrac{1}{x}$. Je hoeft de grafieken van $e^{1/x}$ en $\ln(1+\dfrac{1}{x})$ hiervoor niet te kennen.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

3. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{\frac{1}{x}} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} e^{\frac{1}{x}} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+\dfrac{1}{x}) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+\dfrac{1}{x}) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln(1+\dfrac{1}{x}) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \ln(1+\dfrac{1}{x}) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

CC BY-NC-SA 4.0

18.2 Rekenregels limieten

Om efficiënt te rekenen met limieten is het belangrijk om over handige rekenregels te beschikken.

We kunnen de rekenregels samenvatten als volgt:

- de limiet van een som is de som van de limieten,
- de limiet van een verschil is het verschil van de limieten,
- de limiet van een product is het product van de limieten,
- de limiet van een quotiënt is het quotiënt van de limieten,

tenzij je daardoor een onbepaalde vorm krijgt.

Voorbeeld 18.2.1.

1. De limiet van een som is de som van de limieten
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+e^{\frac{1}{x}}\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}x\right)+\left(\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}\right)=(+\infty)+1=+\infty$$

2. De limiet van een verschil is het verschil van de limieten
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-e^{\frac{1}{x}}\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}x\right)-\left(\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}\right)=(+\infty)-1=+\infty$$

3. De limiet van een product is het product van de limieten
$$\lim_{x\to+\infty}xe^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=(+\infty)\cdot 1=+\infty$$

4. De limiet van een quotiënt is het quotiënt van de limieten
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

We bekijken nu in een voorbeeld wat we bedoelen met een onbepaalde vorm:

Voorbeeld 18.2.2 (Onbepaalde vorm)**.**

Beschouw de functies $f:x\mapsto x$ en $g:x\mapsto a-x$, met $a\in\mathbb{R}$. Dan is $f(x)+g(x)=x+(a-x)=a$ en kennen we volgende limieten op basis van de grafieken van deze eenvoudige functies:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}(a-x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\big(g(x)+f(x)\big)=\lim_{x\to+\infty}a=a$$

Stel dat volgende regel overal zou gelden

$$\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)\overset{?}{=}\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)$$

dan zou dit in dit geval willen zeggen dat

$$(+\infty)+(-\infty)\overset{?}{=}a$$

Maar a is willekeurig (of *onbepaald*): we kunnen voor a even goed 0 kiezen als 2 of $2\pi/3$ .... We noemen daarom $(+\infty)+(-\infty)$ een onbepaaldheid of een onbepaalde vorm. De regel dat de limiet van een som de som is van de limieten, $\lim\limits_{x\to c}f(x)+\lim\limits_{x\to c}g(x)=\lim\limits_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big)$, geldt enkel wanneer $\lim\limits_{x\to c}f(x)+\lim\limits_{x\to c}g(x)$ geen onbepaaldheid oplevert.

CC BY-NC-SA 4.0

18.2 Rekenregels limieten

Je kan zonder problemen rekenen met $+\infty$ en $-\infty$ zolang je zogenaamde *onbepaalde vormen* vermijdt.

Afspraak: $\pm\infty$ betekent $+\infty$ of $-\infty$, in die volgorde, zodat we verder ook kunnen schrijven dat $-(\pm\infty) = \mp\infty$.

Eerst geven we de rekenregels die gewoon werken zoals bij de reële getallen:

Eigenschap 18.2.1 (Rekenregels voor de symbolen $+\infty$ en $-\infty$)**.**

De symbolen $+\infty$ en $-\infty$ voldoen aan volgende rekenregels (waarbij $a \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} -(+\infty) &= -\infty & -(\pm\infty) &= \mp\infty \\ -(-\infty) &= +\infty & -(\mp\infty) &= \pm\infty \end{aligned} \qquad (+\infty \text{ en } -\infty \text{ zijn elkaars tegengestelde})$$

SOM en VERSCHIL

$$a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$$
$$-a + (+\infty) = (+\infty) - a = +\infty$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad ((+\infty) + X = +\infty \text{ behalve als } X = -\infty)$$

$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$$
$$-a + (-\infty) = (-\infty) - a = -\infty$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty \qquad ((-\infty) + X = -\infty \text{ behalve als } X = +\infty)$$

PRODUCT

Als $a > 0$

$$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$$
$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty \qquad (X \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \text{ als } X > 0)$$

Als $a < 0$

$$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$$
$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty \qquad (X \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \text{ als } X < 0)$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$
$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

QUOTIENT

$$\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0 \qquad (\frac{X}{\pm\infty} = 0 \text{ als } X \neq \pm\infty)$$

Het symbool X in de uitleg hierboven staat voor een reëel getal $x \in \mathbb{R}$ of $\pm\infty$.

Voorbeeld 18.2.3. Voorbeelden van het gebruik van deze rekenregels bij het berekenen van een limiet:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} + \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^2} = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (-4x) = (-4)(+\infty) = -\infty$

CC BY-NC-SA 4.0

18.2 Rekenregels limieten

3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{x} = \frac{-4}{+\infty} = 0$

4. $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Al deze regels zijn erg natuurlijk, en stellen op zich geen probleem. Maar er ontbreken enkele combinaties, namelijk de zogenaamde *onbepaalde vormen*:

Eigenschap 18.2.2 (**Onbepaalde vormen** met $\pm\infty$)**.**

Volgende uitdrukkingen zijn **onbepaalde vormen** of **onbepaaldheden**. Dit wil zeggen dat ze *geen betekenis* hebben.

$\infty - \infty$ $\quad (+\infty)+(-\infty)$ $\quad (-\infty)+(+\infty)$ $\quad (+\infty)-(+\infty)$

$0\cdot\infty$ $\quad 0\cdot(\pm\infty)$ $\quad (\pm\infty)\cdot 0$

$\frac{0}{0}$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ $\quad \frac{\pm\infty}{\mp\infty}$

Opmerking 18.2.1.

Ook 0^0, ∞^0 en 1^∞ zijn onbepaald, maar deze behandelen we voorlopig niet.

De rekenregels voor $\pm\infty$ stellen ons nu in staat de rekenregels voor het berekenen van limieten formeel te formuleren. Ook als een limiet $+\infty$ of $-\infty$ is zeggen we dat deze limiet **bestaat**.

Eigenschap 18.2.3 (Rekenregels limieten)**.**

Zij $A \subseteq \mathbb{R}, f, g : A \to \mathbb{R}$ twee continue functies, en c een punt in A of 'op de rand van A'. In het bijzonder kan eventueel $c = +\infty$ of $c = -\infty$.

Veronderstel dat de limieten $\lim_{x\to c} f(x)$ en $\lim_{x\to c} g(x)$ bestaan.

Dan gelden volgende (reken-)regels **tenzij ze een onbepaaldheid geven**:

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \qquad [\lim(\text{som}) = \text{som}(\lim\text{s})]$$

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) \qquad [\lim(\text{verschil}) = \text{verschil}(\lim\text{s})])$$

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) \qquad [\lim(\text{product}) = \text{product}(\lim\text{s})]$$

Als $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} \qquad [\lim(\text{quotient}) = \text{quotient}(\lim\text{s})]$$

Voorbeeld 18.2.4.

Deze rekenregels kunnen dus niet gebruikt worden wanneer ze een onbepaaldheid geven. Zo is

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} + \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^2} = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.2 Rekenregels limieten

maar

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}-\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x^2}$$

want dit geeft de onbepaaldheid $(+\infty)-(+\infty)$.

CC BY-NC-SA 4.0

18.3 Limieten in ±∞

Voorbeeld 18.3.1. Bereken $\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)$.

Als we proberen de regel 'limiet van de som is som van de limieten' te gebruiken, krijgen we

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2) &= \lim_{x\to+\infty}3x^2-\lim_{x\to+\infty}4x+\lim_{x\to+\infty}2\\ &= 3\cdot(+\infty)-4\cdot(+\infty)+2\\ &= \infty-\infty, \text{ en dus ONBEPAALD}\end{aligned}$$

Conclusie: we mogen de rekenregel *niet* toepassen. We hebben een fout gemaakt. De eerste gelijkheid geldt niet:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2) \neq \lim_{x\to+\infty}3x^2-\lim_{x\to+\infty}4x+\lim_{x\to+\infty}2$$

Er is echter een manier om de onbepaaldheid te omzeilen, en de limiet *toch* te berekenen met behulp van de rekenregels. We kunnen namelijk *de hoogstegraadsterm buiten haakjes te brengen*, en daardoor de limiet van een som omzetten in de limiet van een product. Verder gebruiken we dan de rekenregel voor limieten van een product. We beginnen de berekening met:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2) = \lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$$

We weten dat

$$\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}(3)-\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=3+0+0=3$$

dus als we de limiet van dit product van functies schrijven als het product van de limieten krijgen we geen onbepaalde vorm:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2) &= \lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\\ &= (+\infty)\cdot 3=+\infty, \text{ en dus GEEN onbepaaldheid}\end{aligned}$$

Oefening 18.3.1. Bereken $\lim_{x\to+\infty}\left(2x^3-5x^2\right)$. Schrijf al je tussenstappen op!

Als de rekenregels voor limieten een onbepaaldheid opleveren, probeer je de onbepaaldheid te *omzeilen*. Een mogelijke oplossing bij de limiet in $c=\pm\infty$ van een som is om de term die het snelst naar oneindig gaat buiten haakjes te brengen en zo een som om te zetten in een product. Bij de limiet van een veelterm is dit de hoogstegraadsterm. We zetten enkel de macht van x buiten haakjes, de coëfficiënt laten we binnen haakjes staan. Dit idee beperkt zich echter niet tot veeltermen. We geven nog enkele voorbeelden:

Voorbeeld 18.3.2. Bereken $\lim_{x\to+\infty}\left(2e^{3x}-5e^{2x}\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2e^{3x}-5e^{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{3x}\left(2-\frac{5}{e^x}\right)=(+\infty)\cdot 2=+\infty$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.3 Limieten in $\pm\infty$

Voorbeeld 18.3.3. Bereken $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-6x+1}{2x^2+11x-8}$.

Dit is de limiet van een quotiënt, maar het quotiënt van de limieten geeft $\frac{+\infty}{+\infty}$, en dus kunnen we de gewone rekenregel niet toepassen. We zetten nu zowel in teller als in noemer de hoogstegraadsterm buiten haken:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-6x+1}{2x^2+11x-8} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(3-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{11}{x}-\frac{8}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{11}{x}-\frac{8}{x^2}} = \frac{3}{2}$$

Oefening 18.3.2. Bereken $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-1}{x-1}$. Schrijf al je tussenstappen op!

Opmerking 18.3.1.

- Door het toepassen van de rekenregels zie je dat de limiet voor $x \to \pm\infty$ gelijk is aan de limiet van de hoogstegraadsterm voor een veeltermfunctie, en gelijk is aan de limiet van het quotiënt van de hoogstegraadstermen in teller en noemer voor een rationale functie. In de oefeningen wordt echter verwacht dat je niet gewoon het eindresultaat opschrijft, maar dat je telkens met de rekenregels uitwerkt hoe je hier aan komt.
- Het heeft geen zin om de termen die het snelst naar oneindig gaan buiten haken te brengen bij een limiet in een nulpunt van de noemer zoals bijvoorbeeld:

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{x^2+x-1}{x-1}$$

Ook bij irrationale functies zetten we de term die het snelst naar oneindig gaat buiten haken:

Voorbeeld 18.3.4. Bereken $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+7x}+3x\right)$.

Dit is de limiet van een som, maar de som van de limieten geeft $\infty-\infty$, en dus kunnen we deze rekenregel niet toepassen. We zetten stap voor stap de hoogste macht van x buiten haken:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+7x}+3x\right) &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{7}{x}\right)}+3x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3\right) \\
&= \left(\lim_{x\to-\infty} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3\right)\right) \\
&= (-\infty)\cdot\left(-\sqrt{4}+3\right) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.3 Limieten in $\pm\infty$

Merk op: we hebben $|x|$ vervangen door $-x$ omdat we de limiet in $-\infty$ moeten berekenen, en voor negatieve x is inderdaad $|x| = -x$.

Opmerking 18.3.2.

Let op bij het berekenen van limieten met vierkantswortels:

$\sqrt{x^2} = |x|$ dus

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to+\infty} |x| = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to-\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} -x = -(-\infty) = +\infty$

Deze techniek werkt echter niet altijd. We nemen een voorbeeld dat erg lijkt op het vorige voorbeeld, maar toch op een heel andere manier uitgerekend moet worden:

Voorbeeld 18.3.5. Bereken $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right) &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{7}{x}\right)}+2x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right) \\
&= \left(\lim_{x\to-\infty} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)\right) \\
&= (-\infty)\cdot\left(-\sqrt{4}+2\right) \\
&= (-\infty)\cdot 0
\end{aligned}$$

Met deze berekeningen krijgen we een onbepaaldheid, dus moeten we een andere techniek gebruiken om deze limiet te kunnen uitrekenen. We vermenigvuldigen teller en noemer met de toegevoegde tweeterm. De toegevoegde tweeterm nemen wil zeggen dat we het plusteken tussen de twee termen

CC BY-NC-SA 4.0

18.3 Limieten in $\pm\infty$

vervangen door een minteken, of omgekeerd.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+7x}+2x)(\sqrt{4x^2+7x}-2x)}{\sqrt{4x^2+7x}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+7x-4x^2}{\sqrt{4x^2+7x}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{7x}{|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{7x}{-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{7}{-\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2}\\
&= \frac{7}{-\sqrt{4}-2} = -\frac{7}{4}
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Limieten in nulpunten van de noemer

1. Limieten van de vorm $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$

We hebben in het inleidend voorbeeld gezien dat $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{1}{x}=-\infty$ en dat $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ niet bestaat.

Analoog kunnen we volgende situaties tegenkomen bij het berekenen van $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$, $c\in\mathbb{R}$:

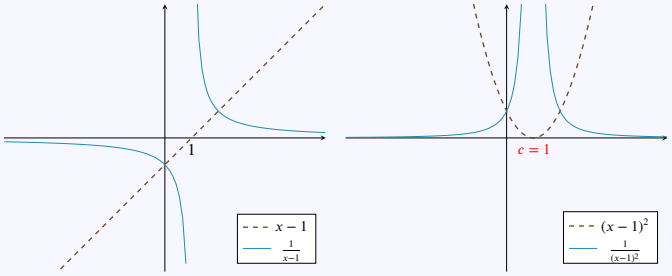
- Als $f(x)>0$ in een omgeving van c dan is $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.
- Als $f(x)<0$ in een omgeving van c dan is $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.
- Als $f(x)>0$ voor $x>c$ en $f(x)<0$ voor $x<c$ dan is $\lim_{\substack{x\to c\\ >}}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ en $\lim_{\substack{x\to c\\ <}}\frac{1}{f(x)}=-\infty$
- Als $f(x)<0$ voor $x>c$ en $f(x)>0$ voor $x<c$ dan is $\lim_{\substack{x\to c\\ >}}\frac{1}{f(x)}=-\infty$ en $\lim_{\substack{x\to c\\ <}}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

Om deze limieten te berekenen moet je dus het tekenverloop van de noemer $f(x)$ zoeken in de buurt van c. Je hoeft hiervoor niet het gehele tekenverloop van $f(x)$ op te stellen, in de buurt van c volstaat.

Voorbeeld 18.4.1.

1. $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{1}{x-1}=+\infty$ want de noemer $x-1$ is positief voor $x>1$.
2. $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{1}{x-1}=-\infty$ want de noemer $x-1$ is negatief voor $x<1$.
3. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$ bestaat niet, want de noemer $x-1$ verandert van teken rond $x=1$.
4. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$, want de noemer $(x-1)^2$ is positief voor $x\neq 1$.

Ter illustratie geven we bij deze eenvoudige voorbeelden ook de grafieken van $\frac{1}{f(x)}$ en van $f(x)$. In het algemeen echter hebben functies met nulpunten in de noemer geen eenvoudige grafieken en gebruik je niet de grafiek om de limiet af te lezen maar bereken je juist de limieten in deze nulpunten van de noemer om meer te weten te komen over de grafiek van de functie.



Opmerking 18.4.1.

18.4 Limieten in nulpunten van de noemer

Merk op dat $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$ steeds $+\infty$ of $-\infty$ is als de limiet bestaat.

Als de linker- en rechterlimiet verschillen, dan bestaat $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ niet.

2. Limieten van de vorm $\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}$ met $f(c)=0$

(a) **c is geen nulpunt van de teller**

In dit geval is c dus een nulpunt van de noemer maar geen nulpunt van de teller.
Dan kunnen we de limiet als volgt herschrijven:

$$\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to c}g(x)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=g(c)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}.$$

Dit is geen onbepaalde vorm vermits $g(c)\neq 0$. Om de limiet verder uit te rekenen moeten we het teken van $g(c)$ kennen en de limiet $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ berekenen. Het tekenverloop van de *teller* moet je niet zoeken, enkel het *teken* van $g(c)$ heeft belang.

Voorbeeld 18.4.2.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{x^2+x-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}(x^2+x-1)\cdot\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{1}{x-1}=(1^2+1-1)\cdot(+\infty)=(1)\cdot(+\infty)=+\infty$$

(b) **c is een nulpunt van teller en noemer**

Dit geval leidt tot de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$.

Bij **rationale functies** kunnen we in dit geval teller en noemer ontbinden in factoren en de factor $x-c$ wegdelen in teller en noemer.

Voorbeeld 18.4.3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

Bij sommige **irrationale functies** kunnen we teller en noemer vermenigvuldigen met de toegevoegde uitdrukking van teller of noemer.

Voorbeeld 18.4.4.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Opmerking 18.4.2. Men kan limieten die de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$ geven ook berekenen met de regel van de l'Hôpital.

CC BY-NC-SA 4.0

18.4 Limieten in nulpunten van de noemer

Samengevat wordt dit:

Eigenschap 18.4.1. De limiet in een nulpunt van de noemer bereken je als volgt:

1.	$\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)}$	met $f(c) = 0$:	**tekenverloop** van $f(x)$ in de buurt van c
1.a	als	$f(x) > 0$ rond c	limiet is $+\infty$
1.b		$f(x) < 0$ rond c	limiet is $-\infty$
1.c		$f(x)$ verandert van teken in c	linker- en rechterlimiet zijn verschillend
2.	$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)}$	met $f(c) = 0$:	
2.a	als	$g(c) \neq 0$:	**reduceer tot geval 1** want $\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to c} g(x) \cdot \lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = g(c) \cdot \lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)}$.
2.b	als	$g(c) = 0$:	onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ wegwerken via
		met f en g veeltermen	**gemeenschappelijke factor** $x - c$ wegdelen
		met f *of* g som van wortels	vermenigvuldigen met **toegevoegde tweeterm**
		met f en g afleidbaar	**l'Hôpital** toepassen

CC BY-NC-SA 4.0

18.4.A Oefeningen limieten

18.4.A.1 Niveau 2

Bij de oefeningen op limieten is het niet enkel van belang de uitkomst te vinden, maar ook om correct te kunnen uitleggen **hoe** je deze uitkomst vindt.

Oefening 18.4.1. Bereken volgende limieten in $\pm\infty$ met behulp van de rekenregels:

1. $\lim_{x\to+\infty}(-4x^5+7x^4-11)=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

2. $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+3x-2}{3x-7}=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-3}{x^3-x+2}=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

5. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x-1}=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

6. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6+5x^2+1}{x^4-x^6}=\ldots\ldots$

7. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-7x}+3x)=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

8. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+3}-x)=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

9. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+3}-x)=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

10. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x-1}=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

11. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x-1}=\ldots\ldots$

12. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

13. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{16x^2+9x}+4x)=\ldots\ldots$

14. $\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right)=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

Oefening 18.4.2. Bereken de volgende limieten in een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt is van de teller:

1. $\lim_{\substack{x\to2\\<}}\frac{1}{x-2}=$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

CC BY-NC-SA 4.0

18.4.A Oefeningen limieten

2. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

3. $\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{1}{\sqrt{x-2}} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

4. $\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{4x-20}{2x-6} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

5. $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

6. $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{x-3}{x^2-1} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

7. $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x-3}{x^2-1} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

8. $\lim_{\substack{x\to \pi\\ <}} \frac{x}{\sin x} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

Oefening 18.4.3. Bereken de volgende limieten in een nulpunt van teller en noemer:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

2. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

3. $\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{x-3}{|x-3|} = \ldots\ldots$

4. $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} = \ldots\ldots$

5. $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x^3-1}{x-1} = \ldots\ldots$

6. $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x^3-3x+2}{(x-1)^3} = \ldots\ldots$

7. $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \ldots\ldots$

8. $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9} = \ldots\ldots$

Oefening 18.4.4. Bereken volgende limieten met behulp van de rekenregels:

1. $\lim_{x\to -\infty} \left(12x^{503} + 7x^{404} + 25x^{200}\right) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

2. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2+42x-12}{2x^2-17} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

CC BY-NC-SA 4.0

18.4.A Oefeningen limieten

3. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{6x^2-7x}+20x) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

4. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

5. $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x-2} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

18.4.A.2 Niveau 3

Oefening 18.4.5. Bereken volgende limieten met parameters $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+ax}{\sqrt{x^2+2}} = \ldots\ldots$

2. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+ax}{\sqrt{x^2+2}} = \ldots\ldots$

3. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{ax+b}{7x-\sqrt{x^2+10}} = \ldots\ldots$

4. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+ax) = \ldots\ldots$

5. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+7x}+ax) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 19
Afgeleiden

(Versie 2026/11/23H.2)

19.1 Definitie van afgeleide

We illustreren eerst aan de hand van enkele voorbeelden wat we bedoelen met *veranderingen* van functiewaarden en *verhoudingen* van *veranderingen* van *functiewaarden*.

Voorbeeld 19.1.1 (Eenvoudige voorbeelden)**.**

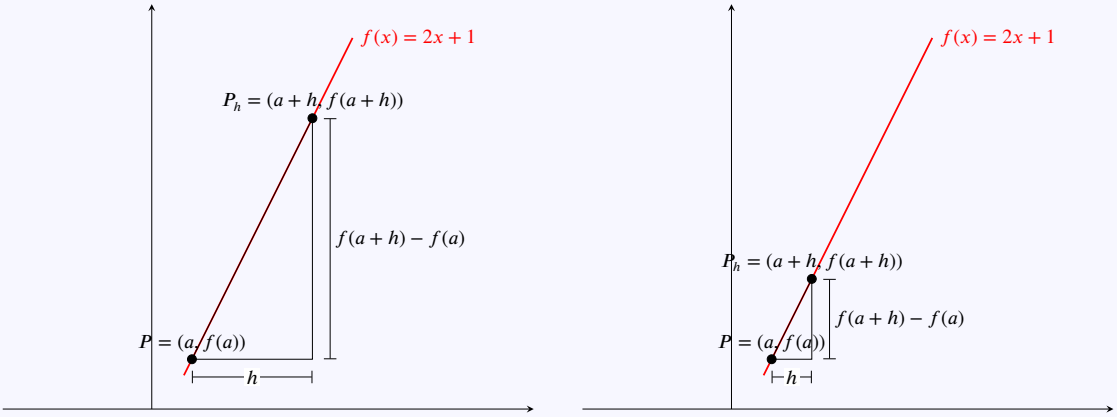
We onderzoeken hoe de functiewaarden van enkele functies veranderen als de onafhankelijke variabele (lichtjes) verandert in de omgeving van een bepaald punt.

1. Onderzoek de verandering van $f : x \mapsto 2x+1$ in de omgeving van het punt $a = 3$.

Uitwerking:

In een punt $a+h$ in de buurt van a is de functiewaarde van f gelijk aan $f(a+h)$. We berekenen voor enkele steeds kleiner wordende h telkens de functiewaarden in a en in $a+h$ en verandering $f(a+h)-f(a)$ die hoort bij deze h. Zoals te verwachten was, wordt de verandering $f(a+h)-f(a)$ ook erg klein zodra h klein wordt. Maar het is erg interessant op te merken dat de *verhouding* $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *niet* noodzakelijk klein wordt!

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
3	1	4	7	9	2	$\frac{2}{1}=2$
3	0.5	3.5	7	8	1	$\frac{1}{0.5}=2$
3	0.1	3.1	7	7.2	0.2	$\frac{0.2}{0.1}=2$
3	0.01	3.01	7	7.02	0.02	$\frac{0.02}{0.01}=2$
3	0.001	3.001	7	7.002	0.002	$\frac{0.002}{0.001}=2$



Voor een willekeurige h zien we dat $f(a+h) = 2(a+h)+1 = 2a+1+2h = f(a)+2h$. Dit maakt duidelijk dat f hier steeds met $2h$ toeneemt als x met h toeneemt. De verhouding tussen de toename in y en de toename in x is dus steeds $\dfrac{2h}{h} = 2$, wat ook precies de richtingscoëfficiënt is van de rechte met vergelijking $y = 2x+1$.

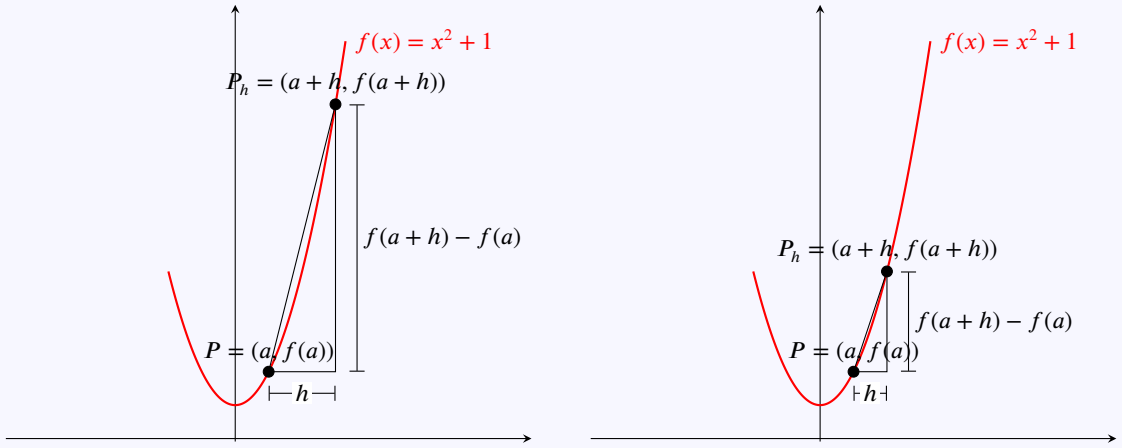
2. Onderzoek de verandering van $f : x \mapsto x^2+1$ in de omgeving van het punt $a = 1$.

Uitwerking:

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
1	1	2	2	5	3	3
1	0.5	1.5	2	3.25	1.25	2.5
1	0.1	1.1	2	2.21	0.21	2.1
1	0.01	1.01	2	2.0201	0.00201	2.01
1	0.001	1.001	2	2.0020	0.00020	2.001

CC BY-NC-SA 4.0

19.1 Definitie van afgeleide

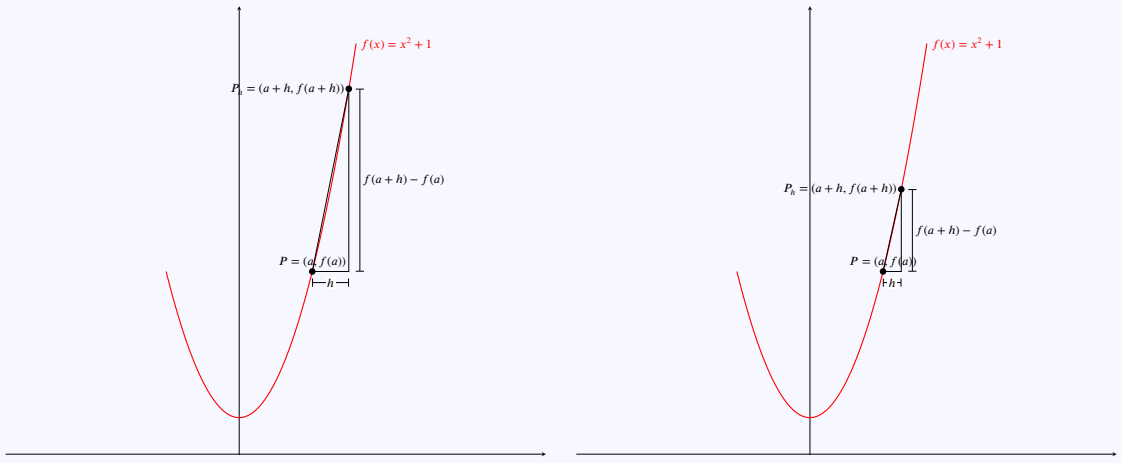


We zien in de tabel dat de verhouding $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ hier afhangt van h, wat niet het geval was in het vorige voorbeeld. Maar als h kleiner wordt, ligt de verhouding steeds dichter bij 2. 2 is ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme $y = x^2 + 1$ in het punt met x-coördinaat 1.

3. Onderzoek de verandering van $f : x \mapsto x^2 + 1$ in de omgeving van het punt $a = 3$.

Uitwerking:

a	h	$a+h$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+h)-f(a)$	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
3	1	4	10	17	7	7
3	0.5	3.5	10	13.25	3.25	6.5
3	0.1	3.1	10	10.61	0.61	6.1
3	0.01	3.01	10	10.0601	0.0601	6.01
3	0.001	3.001	10	10.006	0.006001	6.001



Hier hangt de verhouding $\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ ook af van h, maar als h kleiner wordt, ligt de verhouding steeds dichter bij 6. Dat is ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de kromme $y = x^2+1$ in het punt met x-coördinaat 3.

Voorbeeld 19.1.2. We onderzoeken de *helling van de raaklijn aan de grafiek* van een functie f in een punt $(a, f(a))$.

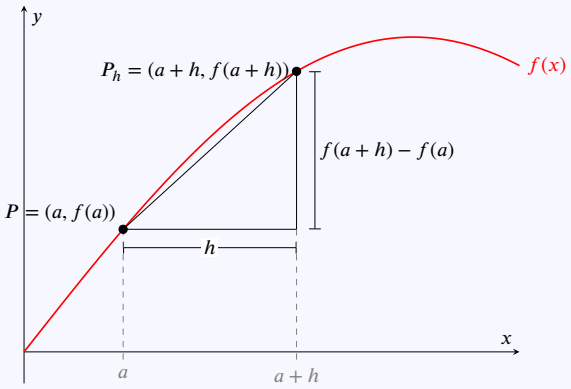
CC BY-NC-SA 4.0

19.1 Definitie van afgeleide

De richtingscoëfficiënt van de rechte in het vlak door de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) (met $x_1 \neq x_2$) is:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Op onderstaande figuur staat de grafiek van een functie f en een willekeurig punt met x-coördinaat a.



De rico van de rechte door de punten $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$, twee punten op de grafiek van f, is

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Die rico hangt af van h (en van a, maar a is vast gekozen). Als we h kleiner laten worden, dan beweegt het punt $(a+h, f(a+h))$ op de grafiek van f naar het punt $(a, f(a))$. De rechte door $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ draait en heeft als limietstand de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$.
De rico van de raaklijn is dus gelijk aan

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en deze limiet noemen we *de afgeleide van f in a*.

In het algemeen is het niet eenvoudig om die limiet uit te rekenen, want hij is van de vorm $\frac{0}{0}$, en dat is een onbepaaldheid. Maar het zal blijken dat er relatief eenvoudige technieken zijn om afgeleiden toch te berekenen.

Definitie 19.1.1 (Afgeleide in een punt)**.**

We noemen een reële functie f **afleidbaar** of **differentieerbaar** in een punt a van haar domein als de limiet $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *bestaat* en *eindig* is.

In dat geval noemen we die limiet de **afgeleide van f in a** en we noteren

$$f'(a) \overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Opmerking 19.1.1.

CC BY-NC-SA 4.0

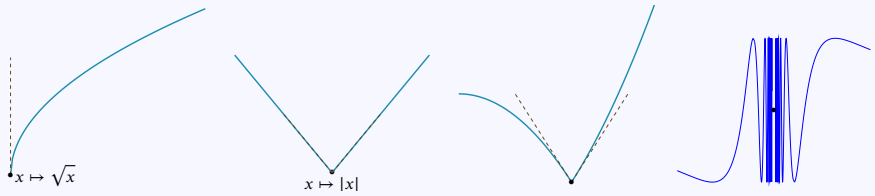
19.1 Definitie van afgeleide

Je kan de limiet in de definitie van afgeleide ook schrijven als

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

door $b = a + h$ te stellen, en dus $h = b - a$.

Voorbeeld 19.1.3. Niet alle functies zijn overal afleidbaar:



(a) Het is mogelijk dat de limiet $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ *oneindig* wordt. In dat geval noemen we de functie *niet afleidbaar* in a. We hebben dan een verticale raaklijn aan de grafiek van f in a. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de functie $x \mapsto \sqrt{x}$ in het punt $a = 0$. (figuur linksboven)

(b) De limiet bestaat in sommige gevallen niet omdat de linkerlimiet verschilt van de rechterlimiet in een punt a. Er bestaat dan geen raaklijn aan de grafiek van f in a omdat de grafiek een knik maakt in a. Ook dan noemen we de functie *niet afleidbaar* in a. Dat is bijvoorbeeld het geval voor de absolute waarde $x \mapsto |x|$ in het punt $a = 0$. (figuur midden boven) Hier is

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{-h}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} (-1) = -1 \qquad \text{en} \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{h}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} 1 = 1.$$

(c) In andere gevallen bestaat de limiet mogelijk niet omdat de functie f te erg trilt in de buurt van a. Er bestaan zelfs functies die *nergens* afleidbaar zijn. Hier gaan we niet verder op in.

De vergelijking van de rechte door het punt (x_1, y_1) met rico m is $y - y_1 = m(x - x_1)$. Deze vergelijking gebruiken we om de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van een functie op te stellen.

Eigenschap 19.1.1 (Vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f)**.**

De *afgeleide* in een punt is de *rico* van de raaklijn aan de grafiek in dat punt (Zie voorbeeld 19.1.2). De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ is dus

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

We berekenen nu *als voorbeeld* enkele afgeleiden van eenvoudige functies rechtstreeks op basis van deze definitie. In de praktijk zal je deze afgeleiden echter altijd met *rekenregels* berekenen.

Voorbeeld 19.1.4. Bepaal op basis van de definitie de afgeleide van volgende functies:

1. $f : x \mapsto 2x + 1$ in het punt $a = 3$

CC BY-NC-SA 4.0

19.1 Definitie van afgeleide

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2(3+h)+1-(2\cdot 3+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{6+2h+1-7}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2 \end{aligned}$$

2. $f : x \mapsto 2x+1$ in een willekeurig punt a

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2(a+h)+1-(2a+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = 2 \end{aligned}$$

3. $f : x \mapsto x^2+1$ in het punt $a = 3$

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2+1-(3^2+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2+1-9-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6 \end{aligned}$$

4. $f : x \mapsto x^2+1$ in het punt $a = 4$

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2+1-(4^2+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{16+8h+h^2+1-16-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{8h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(8+h) = 8 \end{aligned}$$

5. $f : x \mapsto x^2+1$ in een willekeurig punt a

Uitwerking:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2+1-(a^2+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2+1-a^2-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

19.1 Definitie van afgeleide

We kunnen nu de afgeleide van f in *elk* punt a proberen berekenen. Op die manier verkrijgen we een nieuwe functie die we de afgeleide functie noemen:

Definitie 19.1.2 (Afgeleide functie)**.** Zij f een reële functie.

In de punten waar de afgeleide bestaat definiëren we de **afgeleide functie van** f, genoteerd f', als:

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

Het is mogelijk dat de afgeleide functie gedefinieerd is op een kleiner domein dan de functie zelf, omdat in een aantal punten de afgeleide niet bestaat.

Voorbeeld 19.1.5. Bepaal de afgeleide functie van volgende functies:

(a) $f : x \mapsto 2x + 1$

We hebben boven gezien dat voor willekeurige a, de afgeleide van $f : x \mapsto 2x + 1$ in a gelijk is aan 2. De afgeleide functie is dus $f' : x \mapsto 2$.

(b) $f : x \mapsto x^2 + 1$

We hebben boven gezien dat voor willekeurige a, de afgeleide van $f : x \mapsto x^2 + 1$ in a gelijk is aan $2a$. De afgeleide functie is dus $f' : x \mapsto 2x$.

Om historische en praktische redenen worden er in de literatuur en de verschillende wetenschappen een aantal verschillende notaties gebruikt voor afgeleiden.

Definitie 19.1.3 (Notaties afgeleide)**.**

Men gebruikt ook volgende notatie voor de afgeleide functie van een functie f:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f \overset{\text{def}}{=} f' \quad \text{(Leibniz notatie)}$$

of

$$Df \overset{\text{def}}{=} f' \quad \text{(Euler notatie)}$$

Voor de afgeleide van f in a wordt dat:

$$f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$$

Voorbeeld 19.1.6. We kunnen dus afgeleiden van functies op meerdere manieren schrijven:

(a) $(\sin x)' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \dfrac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}\sin}{\mathrm{d}x}(x)$

(b) $(x^5 + 4x^4 + 1)' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^5 + 4x^4 + 1) = \dfrac{\mathrm{d}(x^5 + 4x^4 + 1)}{\mathrm{d}x}$

Opmerking 19.1.2.

- We schrijven in het vervolg zowel f' als $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$ als $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Deze schrijfwijzen worden door elkaar gebruikt en hebben dezelfde betekenis.
- We gebruiken de notatie met f' alleen als de variabele waarnaar wordt afgeleid duidelijk is uit de context. In de praktijk is die variabele meestal x, maar t, u of y komt ook voor. Als

CC BY-NC-SA 4.0

19.1 Definitie van afgeleide

verwarring mogelijk is, gebruikt je beter de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ (of $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}$).

- Als een functie geschreven wordt als $y = f(x)$ (in deze cursus gebruiken we de notatie $f : x \mapsto f(x)$), wordt ook y' gebruikt voor de afgeleide. Dat is zeker bij differentiaalvergelijkingen erg gebruikelijk.
- Onder andere in cursussen fysica gebruikt men ook $\dot{y}$ voor de afgeleide van een functie $y = f(x)$.

CC BY-NC-SA 4.0

19.2 Definitie differentiaal

Om technische redenen voeren we hier ook al het begrip *differentiaal* in. Een differentiaal is 'een wiskundig object' waarvan we hier *niet* uitleggen *wat* het precies is. Je kan het dus voorlopig beschouwen als een extra notatie. Later zal het erg handig blijken bij het bestuderen en berekenen van integralen. Ook in de fysica en vele andere toepassingen is het handig om vlot met differentialen te kunnen rekenen.

Definitie 19.2.1 (Pseudo-definitie differentiaal)**.**

De **differentiaal van** x is een nieuw symbool dx.

De **differentiaal van** f, genoteerd df, is het (formeel) product:

$$df \overset{\text{def}}{=} f'(x) \cdot dx$$

Voorbeeld 19.2.1.

$d(x^2+1) = 2x\,dx$ want $(x^2+1)' = 2x$.

Opmerking 19.2.1.

- De *afgeleide functie* van f, genoteerd als f' of $\frac{df}{dx}$, is in elk punt gedefinieerd als een limiet.

  De *differentiaal* van f, genoteerd df, is een nieuw soort object, waarbij het verband met afgeleiden wordt gegeven in de definitie: $df = f'(x)\,dx$.

  Je kan deze formule lezen als 'de differentiaal van f is gelijk aan de afgeleide van f vermenigvuldigd met het *symbool* dx'.

- Dikwijls beschouwt men $\frac{df}{dx}$ gewoon als een andere notatie voor f'. Via het begrip differentiaal kunnen we $\frac{df}{dx}$ echter ook *beschouwen als een breuk of een verhouding*, namelijk een breuk of verhouding van *differentialen*: in de definitie $df \overset{\text{def}}{=} f'(x) \cdot dx$ beide leden formeel delen door dx levert de gekende gelijkheid $\dfrac{df}{dx} = f'(x)$.

  De afgeleide is dus de *verhouding* van de twee *differentialen* df en dx. En deze verhouding is blijkbaar een functie in x, en wel precies de *afgeleide functie* van f. Als je differentialen zou interpreteren als 'verandering', dan geeft de afgeleide het verband tussen de verandering df van de functie f ten gevolge van een verandering dx in de onafhankelijke variabele x.

- Merk op dat sommige handboeken en cursussen *andere afspraken* maken, en dat volgens die afspraken $\frac{df}{dx}$ mogelijk *geen breuk is*. Dit is meestal het geval omdat die handboeken niet spreken over *differentialen*.

- Merk op dat dx dus een totaal ander symbool is dan ax: bij dx denk je direct aan differentiaal, bij ax, kx en rx denk je direct aan een product van a, k of r met x. Uitzonderlijk kan d toch een getal voorstellen en dan is dx dus toch d keer x.

Voorbeeld 19.2.2. In de fysica worden functies dikwijls genoteerd als $y = y(x)$. Als de snelheid v een functie is van de tijd t schrijft men dat als $v = v(t)$. De differentiaal dt wordt in de fysica beschouwd als een oneindig kleine verandering van de tijd t, en dv als de (ook oneindig kleine) verandering van de snelheid. De *verhouding* tussen die oneindig kleine veranderingen is precies de afgeleide (en dus versnelling):

$$v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

CC BY-NC-SA 4.0

19.3 Begintest berekening afgeleiden

Indien gewenst kan je eerst de rekenregels bekijken. De afgeleiden van exponentiële, logaritmische, goniometrische en cyclometrische functies kan je gebruiken in de oefeningen.

Rekenregels.

Eigenschap19.3.1.

De afgeleide van de som $f+g$ en het scalair veelvoud cf van afleidbare functies f en g (met $c \in \mathbb{R}$) wordt gegeven door:

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g'$$

Eigenschap19.3.2.

De afgeleide van constante en machtsfunctie $x \mapsto c$ en $x \mapsto x^r$ (met $c, r \in \mathbb{R}$) zijn:

$$(x^r)' = rx^{r-1} \qquad (c)' = 0$$

Eigenschap19.3.3.

De afgeleide van het product $f \cdot g$ en het quotiënt $\dfrac{f}{g}$ van twee afleidbare functies f en g wordt gegeven door:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \textbf{(productregel)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

Opmerking19.3.1.

De formule voor product kan je veralgemenen naar een product van meerdere factoren:

$$\begin{aligned}(f \cdot g \cdot h)' &= (f \cdot (g \cdot h))' \\ &= f' \cdot (g \cdot h) + f \cdot (g \cdot h)' \\ &= f' \cdot (g \cdot h) + f \cdot (g' \cdot h + g \cdot h') \\ &= f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'\end{aligned}$$

Dus: je leidt *elke* factor af en vermenigvuldigt telkens die afgeleide met de andere factoren. Daarna tel je al die producten op.

Eigenschap19.3.4Kettingregel.

De *afgeleide van de samenstelling* van twee afleidbare functies f en g is gelijk aan:

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \textbf{(kettingregel)}$$

Eigenschap 19.3.5 (Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

19.3 Begintest berekening afgeleiden

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = 1/x \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Eigenschap 19.3.6 (Afgeleiden goniometrische en cyclometrische functies)**.**

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\text{bgsin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgcos } x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\text{bgtan } x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Indien je volgende oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je het berekenen van Afgeleiden verder overslaan. De regel van de l'Hôpital en minimum maximum problemen worden hier nog niet behandeld.

Oefening 19.3.1. Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^2) = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^7) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^x) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot \ln x \cdot \sin x) = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\ln x}{\sin x} = \ldots\ldots$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^3(4x^2 - 7) = \ldots\ldots$

Oefening 19.3.2.

1. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie

$$f(x) = \ln g(x).$$

in termen van de functie g en de afgeleide functie g'.

$\ldots\ldots$

2. Bereken de tweede afgeleide: $\frac{d^2}{dx^2}(\text{bgsin } x + x) = \ldots\ldots$

3. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de functie $f(x) = 4x^{-4} - 1$ in het punt met als x-coördinaat 1. $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

19.4 Basisregels

De meest eenvoudige regels voor het berekenen van afgeleiden gaan over afgeleiden van machten, sommen en scalaire veelvouden. Die basisregels moeten later worden aangevuld met de regels voor producten en quotiënten en voor samenstellingen.

Er worden telkens drie versies gegeven van de regels: eerst de notatie met f', vervolgens de notatie met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, en tenslotte een notatie met differentialen.

Het is belangrijk om na verloop van tijd met elke notatie vertrouwd te worden. Bij het begin van je studie kan je *zelf kiezen* welke notatie voor jou het meest duidelijk is. We vermelden hier niet de notatie Df die in vele handboeken van het secundair onderwijs voorkomt, maar als je er vertrouwd mee bent kan je die natuurlijk ook nog toevoegen.

Eigenschap 19.4.1 (Basisregels voor afgeleiden)**.**

De afgeleide van constante en machtsfunctie $x \mapsto c$ en $x \mapsto x^r$ (met $c, r \in \mathbb{R}$) zijn:

$$(x^r)' = rx^{r-1} \qquad (c)' = 0$$

Dezelfde regel kan geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = 0$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}x^r = rx^{r-1}\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}c = 0$$

Merk op dat de machtregel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1}$ niet alleen geldt voor natuurlijke getallen r als exponent, maar voor *alle* exponenten $r \in \mathbb{R}$.

Oefening 19.4.1.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7) = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi^2) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3) = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{n+42}) = \ldots\ldots$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\pi) = \ldots\ldots$

Opmerking 19.4.1. We begrijpen deze regels als volgt:

- de afgeleide van een constante functie $x \mapsto c$ is de nulfunctie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5+\sqrt{2}) = 0$
- de identieke functie $x \mapsto x$ is de functie $x \mapsto x^r$ met $r = 1$, dus de afgeleide functie van de identieke functie is de functie $x \mapsto 1x^0$, wat de constante functie $x \mapsto 1$ is
- bij de afgeleide van een macht $x \mapsto x^r$ komt een kopie van de exponent naar voor en wordt de exponent zelf met 1 verminderd: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^5 = 5x^4$

Voorbeeld 19.4.1. Berekening afgeleiden van rationale machten:

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-2}) = (-2)\cdot x^{-2-1} = -2x^{-3}$

CC BY-NC-SA 4.0

19.4 Basisregels

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-42}) = (-42)\cdot x^{-42-1} = -42x^{-43}$

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\cdot x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Oefening 19.4.2. Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1/2}) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{\sqrt{x}}) = \ldots\ldots$

Er zijn ook eenvoudige regels voor de som en scalaire veelvouden:

Eigenschap 19.4.2 (Lineariteit van afleiden)**.** De afgeleide van de som $f+g$ en het scalair veelvoud cf van afleidbare functies f en g (met $c \in \mathbb{R}$) wordt gegeven door:

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f'+g'$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cf) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}(cf) = c\,\mathrm{d}f \qquad \mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$$

Oefening 19.4.3.

1. $(7x)' = \ldots\ldots$
2. $(7x^2)' = \ldots\ldots$
3. $(7x+1)' = \ldots\ldots$
4. $(7x^2+7x)' = \ldots\ldots$
5. $(x(x+1))' = \ldots\ldots$

Opmerking 19.4.2. We begrijpen deze regels als volgt:

- de afgeleide van een scalair veelvoud is het scalair veelvoud van de afgeleide
  Dus: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 5\cdot 1 = 5$
- je kan de formule $(cf)' = cf'$ ook lezen als: 'constanten mag je bij afgeleiden buiten brengen'.
- de afgeleide van een som is de som van de afgeleiden
  Dus: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7+5x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}7 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) = 0+5 = 5$
- je kan de formule $(f+g)' = f'+g'$ ook lezen als: 'afgeleiden mag je term per term berekenen'.

CC BY-NC-SA 4.0

19.4 Basisregels

- deze twee regels zijn equivalent met volgende regel:

$$(af+bg)' = af' + bg' \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af+bg) = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g \qquad \mathrm{d}(af+bg) = a\mathrm{d}f + b\mathrm{d}g$$

die we lezen als:
de afgeleide van een lineaire combinatie is de lineaire combinatie van de afgeleiden

Met deze beperkte set van regels kunnen de afgeleiden van *alle* veeltermen berekend worden.

Oefening 19.4.4. Bereken volgende afgeleiden van veeltermen:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) \overset{\text{(somregel)}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 \overset{\text{(rekenregels)}}{=} 0 + 1 + 2x = 1 + 2x$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 = 0 + 1 + 2x + 3x^2 = 1 + 2x + 3x^2$

Maar je kan ook het resultaat van vorige oefening gebruiken: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3 = 1 + 2x + 3x^2$

En je kan dit antwoord ook in één keer opschrijven, door term per term af te leiden: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3) = (0+)1 + 2x + 3x^2$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+x^2+x^3+x^4) = \ldots\ldots$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+2x^2+3x^3+4x^4) = \ldots\ldots$

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(17+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3) = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(17+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3) = 0 + 1 + \frac{1}{2}\cdot 2x + \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = 1 + x + x^2$

6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{\pi}+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4) = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{\pi}+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4) = 0 + 1 + \frac{1}{2!}\cdot 2x + \frac{1}{3!}\cdot 3x^2 + \frac{1}{4!}\cdot 4x^3 = 1 + \frac{1}{2}\cdot 2x + \frac{1}{3\cdot 2!}\cdot 3x^2 + \frac{1}{4\cdot 3!}\cdot 4x^3 = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3$

Oefening 19.4.5. Bereken volgende afgeleiden

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x^2+8x+9) = \ldots\ldots$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x^2+8x+3^2) = \ldots\ldots$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((2x)^2+8x+3^2) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

19.4 Basisregels

4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x(x+2)+3^2) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

19.5 Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide functie kan men volgende formules aantonen (met $a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$).

Eigenschap 19.5.1 (Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies)**.**

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a$$
$$(\ln x)' = 1/x \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x \ln a$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}e^x = e^x \,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}a^x = a^x \ln a \,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}(\ln x) = \frac{\mathrm{d}x}{x} = x^{-1}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\log_a x) = \frac{\mathrm{d}x}{x \ln a}$$

Opmerking 19.5.1. We begrijpen deze regels als volgt:

- de afgeleide van e^x is terug e^x. Dit is een erg handige en belangrijke eigenschap van de functie e^x en ze kan beschouwd worden als de *definitie* van het getal e. Er is een unieke exponentiële functie $x \mapsto a^x$ waarvoor $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x$. Het grondtal van deze functie is per definitie e.
- de afgeleide van $\ln x$ is $1/x$. Het lijkt wat merkwaardig dat in de mooie reeks van afgeleiden-van-een-macht-is-terug-een-macht (namelijk $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^r = r x^{r-1}$) ineens een vreemde eend opduikt: ook de afgeleide van $\ln x$ blijkt een macht te zijn (namelijk x^{-1}).
- de afgeleide van *willekeurige* exponentiële of logaritmische functies is een *herschaling* (met een factor $\ln a$) van de afgeleide van e^x en $\ln x$.

Voorbeeld 19.5.1.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^x) = 7^x \ln 7$. Verwar dit niet met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^7) = 7x^6$.

Oefening 19.5.1. Bereken de afgeleiden van volgende exponentiële en logaritmische functies.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi^x) = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(25 \cdot 7^x) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((a+7)^x) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^2) = \ldots\ldots$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x^r) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

19.6 Afgeleiden van goniometrische en cyclometrische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide functie kan men volgende formules aantonen.

Eigenschap 19.6.1 (Afgeleiden goniometrische en cyclometrische functies).

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(\mathrm{bgsin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\mathrm{bgcos}\, x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\mathrm{bgtan}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

Eigenschap 19.6.2 (Afgeleiden goniometrische en cyclometrische functies).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{bgsin}\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{bgcos}\, x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{bgtan}\, x = \frac{1}{1+x^2}$$

of met differentialen:

Eigenschap 19.6.3 (Afgeleiden goniometrische en cyclometrische functies).

$$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(\tan x) = \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \qquad \mathrm{d}(\cot x) = -\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{bgsin}\, x) = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}(\mathrm{bgcos}\, x) = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}(\mathrm{bgtan}\, x) = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Opmerking 19.6.1. We begrijpen deze regels als volgt:

- de afgeleide van de sinus is de cosinus en de afgeleide van de cosinus is *min* de sinus.
- omdat $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ kan men ook schrijven dat

  $$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

  en dat is soms handig omdat het de afgeleide van de tangens terug schrijft in functie van een tangens.
- we zullen verder zien hoe de formules voor tangens en cotangens kunnen worden berekend

CC BY-NC-SA 4.0

19.7 Product- en quotiëntregel

We tonen hoe je *producten en quotiënten* van functies kan afleiden. Later volgt nog een regel over de *samenstelling* van functies. Met deze technieken kunnen dan de afgeleiden van ongeveer alle afleidbare functies die in de praktijk voorkomen worden berekend. We geven de regels in de drie notaties.

Eigenschap 19.7.1 (Productregel en quotiëntregel)**.**

De afgeleide van het product $f \cdot g$ en het quotiënt $\frac{f}{g}$ van twee afleidbare functies f en g wordt gegeven door:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \textbf{(productregel)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g + f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \quad \textbf{(productregel)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g - f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}(f \cdot g) = (\mathrm{d}f) \cdot g + f \cdot (\mathrm{d}g) \quad \textbf{(productregel)} \qquad \mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\mathrm{d}f) \cdot g - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

Voorbeeld 19.7.1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto x^4 \ln x$.

We zoeken de afgeleide van het product van x^4 en $\ln x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4 \cdot \ln x\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4\right) \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) \\ &= 4x^3 \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} = x^3(4 \ln x + 1)\,.\end{aligned}$$

Voorbeeld 19.7.2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \frac{2x+3}{4x+5}$.

We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $2x+3$ en $4x+5$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2x+3}{4x+5} &= \frac{2(4x+5) - 4(2x+3)}{(4x+5)^2} \\ &= \frac{8x + 10 - 8x - 12}{(4x+5)^2} = \frac{-2}{(4x+5)^2}\end{aligned}$$

Voorbeeld 19.7.3. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \frac{\ln x}{\sin x}$.

CC BY-NC-SA 4.0

19.7 Product- en quotiëntregel

We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln x}{\sin x}\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)\cdot \sin x - \ln x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\frac{\sin x}{x} - \ln x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{x\,\sin x} - \frac{\ln x\,\cos x}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Oefening 19.7.1.

1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (x^3+27)(x^4-1)$
2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$
3. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (x^{42}+x^{13}+1)(x^{2020}-1)$

Opmerking 19.7.1. We begrijpen deze regels als volgt:

- om de afgeleide van een *product* te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de eerste factor, en je vermenigvuldigt die afgeleide met de tweede factor. Daarbij tel je de afgeleide van de tweede factor vermenigvuldigd met de eerste factor op.

  Dus: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2\cdot\sin x) = (2x)\cdot\sin x + x^2\cdot\cos x = x(2\sin x + x\cos x)$

- om de afgeleide van een *quotiënt* te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de teller, en vermenigvuldigt die afgeleide met de noemer. Daarvan trek je de afgeleide van de noemer vermenigvuldigd met de teller af. Vervolgens deel je het verschil door het kwadraat van de noemer.

  Dus: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{x^2}{\sin x} = \dfrac{(2x)\cdot\sin x - x^2\cdot(\cos x)}{\sin^2 x} = \dfrac{x(2\sin x - x\cos x)}{\sin^2 x}$

- de formule voor product kan je naar keuze schrijven en begrijpen als:

  $$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g' \quad \text{of} \quad (f\cdot g)' = f'\cdot g + g'\cdot f$$

  Dus:

  (*afgeleide* eerste factor) maal (tweede factor) plus (eerste factor) maal (*afgeleide* tweede factor)
  dan wel
  (*afgeleide* eerste factor) maal (tweede factor) plus (*afgeleide* tweede factor) maal (eerste factor)

Eigenschap 19.7.2. De formule voor product kan je veralgemenen naar een product van meerdere factoren:

$$\begin{aligned}(f\cdot g\cdot h)' &= (f\cdot(g\cdot h))' \\ &= f'\cdot(g\cdot h) + f\cdot(g\cdot h)' \\ &= f'\cdot(g\cdot h) + f\cdot(g'\cdot h + g\cdot h') \\ &= f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

19.7 Product- en quotiëntregel

Dus: leid *elke* factor af, vermenigvuldig die afgeleide met de andere factoren en tel al de producten op.

Voorbeeld 19.7.4. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto x \cdot \ln x \cdot \sin x$.

We zoeken de afgeleide van het product van x,$\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot \ln x \cdot \sin x) &= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x)(\ln x \cdot \sin x) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x)(x \cdot \sin x) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x)(x \cdot \ln x) \\ &= \ln x \sin x + \sin x + x \ln x \cos x.\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

19.8 Kettingregel

De zogenaamde *kettingregel* laat toe om de afgeleide te berekenen van *samengestelde* functies.

Eigenschap 19.8.1 (Kettingregel)**.**

De *afgeleide van de samenstelling* van twee afleidbare functies f en g is gelijk aan:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \textbf{(kettingregel)}$$

Dezelfde kettingregel kan ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) \quad \textbf{(kettingregel)}$$

of met differentialen:

$$d(f(g(x))) = f'(g(x))\, dg(x) = f'(g(x))\, g'(x)\, dx \quad \textbf{(kettingregel)}.$$

Opmerking 19.8.1. We hebben in de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie de afgeleide van f toch genoteerd als f' om de notatie eenvoudig te houden. De kettingregel kan ook geformuleerd worden als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}(f(g)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$$

De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 19.8.1.

(a) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (5x+2)^2$:

Merk allereerst op dat je in dit voorbeeld de kettingregel niet *moet* gebruiken. Je kan ook het kwadraat eerst uitrekenen:

$$((5x+2)^2)' = (25x^2 + 20x + 4)' = 50x + 20$$

Je *mag* de kettingregel wel gebruiken en je vindt uiteraard hetzelfde resultaat.

We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

- De functie $x \mapsto (5x+2)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto 5x+2$$

dan is $f(g(x)) = f(5x+2) = (5x+2)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto 5$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{5x+2}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{5x+2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{5}^{g'(x)} = 10(5x+2) = 50x+20$$

CC BY-NC-SA 4.0

19.8 Kettingregel

waarbij $f'(g(x)) = f'(5x+2) = 2(5x+2)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((5x+2)^2)' = 2(5x+2)\cdot 5 = 10(5x+2)$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^2 = 2(5x+2)\cdot 5.$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(5x+2)^2 = 2(5x+2)\,d(5x+2) = 2(5x+2)5\,dx = 10(5x+2)\,dx$$

(b) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin^2 x$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder het kwadraat met haakjes: $x \mapsto (\sin x)^2$.
We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

- De functie $x \mapsto (\sin x)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto \sin x$$

dan is $f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto \cos x$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{\sin x}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{\sin x}^{g(x)})}_{f'(g(x))}\cdot \overbrace{\cos x}^{g'(x)} = 2\sin x\cos x$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(\sin x) = 2(\sin x)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((\sin x)^2)' = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)^2 = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(\sin x)^2 = 2(\sin x)\,d(\sin x) = 2(\sin x)\cos x\,dx = 2\sin x\cos x\,dx$$

(c) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin x^2$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder haakjes rond het kwadraat: $x \mapsto \sin(x^2)$.
We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

CC BY-NC-SA 4.0

19.8 Kettingregel

- De functie $x \mapsto \sin(x^2)$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto \sin x$$
$$g : x \mapsto x^2$$

dan is $f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$. Omdat

$$f' : x \mapsto \cos x$$
$$g' : x \mapsto 2x$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{\sin\big(\overbrace{x^2}^{g(x)}\big)}_{f(g(x))} \Big)' = \underbrace{\cos\big(\overbrace{x^2}^{g(x)}\big)}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{2x}^{g'(x)} = 2x\cos x^2$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(x^2) = \cos(x^2)$

Je *moet* de samenstellende functies geen namen geven. Je kan ook sneller rekenen als volgt:

$$(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$$

- Je kan ook de notatie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken, dat geeft

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x^2) = \cos x^2 \cdot 2x$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(\sin x^2) = \cos x^2 d(x^2) = \cos x^2\, 2x dx$$

Oefening 19.8.1.

1. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 5^{x^2} = \ldots\ldots$

2. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie

$$f(x) = \ln g(x)$$

in termen van de functie g en de afgeleide functie g'.

Opmerking 19.8.2. We begrijpen deze kettingregel als volgt:

- Om de afgeleide van een samenstelling $f(g(x))$ te berekenen, bereken je eerst de afgeleide van de *buitenste* functie f en die evalueer je in de enige waarde waar dat betekenis heeft: de functiewaarde van de binnenste functie g. Vervolgens vermenigvuldig je dat resultaat met de afgeleide van de binnenste functie. Dus: afleiden doe je *van buiten naar binnen*, stap per stap, en je vermenigvuldigt de tussenresultaten met elkaar.
- Indien je nog niet zo vertrouwd bent met de kettingregel kan je de samenstellende functies f en g expliciet opschrijven, of je kan werken met extra variabelen (*substitutie*). We geven een

CC BY-NC-SA 4.0

19.8 Kettingregel

voorbeeld met extra variabelen in de notatie met differentialen:

$$\mathrm{d}\sin(x^2) \overset{x^2=u}{=} \mathrm{d}\sin(u) = \cos(u)\mathrm{d}u \overset{u=x^2}{=} \cos(x^2)\mathrm{d}x^2 = \cos(x^2)\cdot 2x\mathrm{d}x = 2x\cos x^2\mathrm{d}x$$

en

$$\mathrm{d}(\sin^2 x) = \mathrm{d}(\sin x)^2 \overset{\sin x=v}{=} \mathrm{d}v^2 = 2v\,\mathrm{d}v \overset{v=\sin x}{=} 2\sin x\cdot \mathrm{d}\sin x = 2\sin x\cos x\mathrm{d}x$$

Zodra je vertrouwd bent met de kettingregel is het niet meer nodig om de extra variabele expliciet op te schrijven.

Eigenschap 19.8.2. De *ketting*regel berekent de afgeleide van een ketting of *keten* van samenstellingen:

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$$

Dus je leidt de samenstellende functies af *van buiten naar binnen* en vermenigvuldigt de afgeleiden.

Voorbeeld 19.8.2. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^3(4x^2-7)$.

We gebruiken weer de kettingregel, maar nu hebben we een samenstelling van drie functies: $f(x)=x^3$, $g(x)=\cos x$ en $h(x)=4x^2-7$.

$$f(g(h(x))) = f(g(4x^2-7)) = f(\cos(4x^2-7)) = \cos^3(4x^2-7)$$

In de eerste stap van de berekening gebruiken we:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(h(x)))] = f'(g(h(x)))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(g(h(x)))]$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos^3\left(4x^2-7\right)\right] &= 3\left(\cos\left(4x^2-7\right)\right)^2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos\left(4x^2-7\right)\right]\\ &= 3\cos^2\left(4x^2-7\right)\left(-\sin\left(4x^2-7\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[4x^2-7\right]\right)\\ &= -3\cos^2\left(4x^2-7\right)\sin\left(4x^2-7\right)\cdot 8x\\ &= -24x\sin\left(4x^2-7\right)\cos^2\left(4x^2-7\right).\end{aligned}$$

Oefening 19.8.2.

1. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{\sin^3(e^{x^2})} = \ldots\ldots$

Opmerking 19.8.3.

De Leibniz notatie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ is bijzonder handig als x op zijn beurt afhankelijk wordt van een andere variabele (bijvoorbeeld van de tijd, of bij een substitutie) en wordt dan ook vaak gebruikt in de fysica.

Stel dat bij een functie $x\mapsto f(x)$ blijkt dat x eigenlijk afhangt van t. Dan is x dus zelf een functie van t, dus $x : t\mapsto x(t)$. Dan wordt natuurlijk ook f een functie van t, namelijk $t\mapsto f(x(t))$. We

CC BY-NC-SA 4.0

19.8 Kettingregel

krijgen dan volgende functies:

$$f : x \mapsto f(x)$$
$$x : t \mapsto x(t)$$
$$f \circ x : t \mapsto f(x(t))$$

en die functies hebben respectievelijk als afgeleide

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f : x \mapsto f'(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x : t \mapsto x'(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ x) : t \mapsto (f \circ x)'(t)$$

Een concreet voorbeeld: je rijdt met de auto van $A_{ntwerpen}$ naar B_{russel}. Je schrijft de afgelegde afstand in kilometer als x en je noemt $f(x)$ het aantal liter benzine in je tank na x km. Veronderstel dat je vertrekt met een volle tank van 50 liter en je auto 5 liter verbruikt per honderd kilometer, dan is

$$f(x) = 50 - \frac{5}{100}x.$$

Veronderstel dat je aan een constante snelheid van 75 km/u rijdt, dan is de afgelegde weg x na t uur dus $x(t) = 75 \cdot t$ km. De samengestelde functie $f(x(t))$ is dan

$$f(x(t)) = 50 - \frac{5}{100}x(t) = 50 - \frac{5}{100} \cdot 75 \cdot t = 50 - \frac{75 \cdot 5}{100}t$$

en die formule drukt uit hoeveel benzine je nog hebt na t uur, in plaats van na x kilometer.

De kettingregel zegt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = f'(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$$

of anders geschreven:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)}$$

Als we schrijven dat $x = x(t)$ en $y = f(x)$, dus ook $y = f(x(t))$ wordt dat soms korter genoteerd als:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

We kunnen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)$$

ook met gebruik van andere letters formuleren. Bijvoorbeeld met functie $u(x)$ in plaats van $x(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(u(x))) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(u(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)$$

of met de functies u en v in plaats van f en x:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(v(x))) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}(v(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x)$$

maar het betekent natuurlijk allemaal hetzelfde.

CC BY-NC-SA 4.0

19.8.A Basisoefeningen afgeleiden

19.8.A.1 Niveau 1

Oefening 19.8.3. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\left(x^{1/3}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(x^{-1/3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(x^4\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(9x^9\right)' = \ldots\ldots$
5. $(x^4 - 4x)' = \ldots\ldots$
6. $(x + \sin x)' = \ldots\ldots$
7. $(x - \cos x)' = \ldots\ldots$
8. $(7e^x)' = \ldots\ldots$
9. $(7 + e^x)' = \ldots\ldots$
10. $(\sin x + e^x)' = \ldots\ldots$

Oefening 19.8.4. Bereken de afgeleide van volgende functies op twee manieren:

1. $(x^2 \cdot x^2)' = \ldots\ldots$
2. $\left((3x+5)^2\right)' = \ldots\ldots$

Oefening 19.8.5. Bereken de afgeleide van volgende rationale functies.

1. $\left(\dfrac{x-4}{x}\right)' = \ldots\ldots$
2. $\left(\dfrac{x}{x+3}\right)' = \ldots\ldots$
3. $\left(\dfrac{1}{x+5}\right)' = \ldots\ldots$
4. $\left(\dfrac{4-x}{3-x}\right)' = \ldots\ldots$

19.8.A.2 Niveau 2

Oefening 19.8.6. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((1+x)\ln x) = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2 \cos t) = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{-1}{t^2}\right) = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{3t-1}{2t+2}\right) = \ldots\ldots$
5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(4x+5) = \ldots\ldots$
6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(7t^2) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

19.8.A Basisoefeningen afgeleiden

7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{4x^3+1}{3x} = \ldots\ldots$
8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan\frac{1}{x} = \ldots\ldots$
9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(-8x^2-1) = \ldots\ldots$
10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^3 3x = \ldots\ldots$
11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2-7x+8} = \ldots\ldots$
12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln t\,\sin(t^2)) = \ldots\ldots$
13. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1-t^2) = \ldots\ldots$
14. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[3]{(x^2+3)^4} = \ldots\ldots$

Oefening 19.8.7. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^{-2} = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3-2\sqrt{x}+5x-2) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5-x^4) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2x^{-n} = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((1+x)(x+2)\big) = \ldots\ldots$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big((x+2)^3e^x\big) = \ldots\ldots$
7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t^{-3}(t+5)^7\big) = \ldots\ldots$
8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\sin t^2} = \ldots\ldots$
9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{4}{1+2\cos\theta}\right) = \ldots\ldots$
10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^{\sin x+2x} = \ldots\ldots$
11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sqrt{1-2\theta} = \ldots\ldots$
12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+\tan x} = \ldots\ldots$
13. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right) = \ldots\ldots$
14. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(2\theta^{1/2}+\frac{3}{2}\theta^{2/3}+\frac{4}{3}\theta^{3/4}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

19.8.A Basisoefeningen afgeleiden

15. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sin(3x)\cdot\cos(2x)\big) = \ldots\ldots$

16. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\sqrt{2x-1} = \ldots\ldots$

Oefening 19.8.8. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie f in termen van g en van de afgeleide van de functie g voor volgende functies f:

1. Als $f(x) = 2g(x)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

2. Als $f(x) = (g(x))^2$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

3. Als $f(x) = g(x^2)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

4. Als $f(x) = \mathrm{bgtan}\, g(x)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

5. Als $f(x) = g(3x) + 3g(x) + (g(x))^3 + g(x) + g(3) + xg(3) + g(3^x) + 3^{g(x)}$,
dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 19.8.9. Zij $a, b, c \in \mathbb{R}$ constanten. Bepaal dan de afgeleide van onderstaande functies.

1. Als $s(t) = a + b\sin(bt - c)$, dan is $s'(t) = \ldots\ldots$

2. Als $s(\theta) = ab\theta + c\theta^2$, dan is $s'(\theta) = \ldots\ldots$

3. Als $s(x) = b[1 - \cos(a^2x)]$, dan is $s'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 19.8.10. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de functie f in het gegeven punt.

1. $f(x) = 4x^{-4} - 1$ in het punt met als x-coördinaat 1. $\ldots\ldots$

2. $f(x) = 1 - \cos x$ in het punt met als x-coördinaat $\frac{\pi}{2}$. $\ldots\ldots$

3. $f(x) = 1 - x^2$ in het punt met als x-coördinaat 2. $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

19.9 Hogere orde afgeleiden

Omdat de afgeleide van een functie $f : x \mapsto f(x)$ opnieuw een functie $f' : x \mapsto f'(x)$ is, houdt niets ons tegen om te proberen ook f' af te leiden.

Definitie 19.9.1 (Hogere orde afgeleiden)**.**

Als voor een afleidbare reële functie f ook de afgeleide functie f' opnieuw afleidbaar is, dan is de **tweede afgeleide** van f, genoteerd $f'' = \dfrac{d^2 f}{dx^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right)$ de afgeleide van de afgeleide functie f'.

Opmerking 19.9.1.

Analoog kan je ook derde afgeleide f''' van f definiëren. Meer algemeen kan je ook de n-de afgeleide ($n \in \mathbb{N}_0$) van een functie f definiëren. Die noteren we als $f^{(n)}$ of $\dfrac{d^n f}{dx^n}$. De notatie met het accent wordt meestal beperkt tot f', f'' en f''', vanaf de vierde afgeleide wordt de notatie met het haakje $f^{(4)}$ gebruikt. Merk op dat de haakjes *niet* mogen worden weggelaten in bijvoorbeeld $f^{(5)}$, want anders zou voor de sinus verwarring mogelijk zijn tussen $\sin^5(x)$ en de vijfde afgeleide $\sin^{(5)}(x)$.

Voorbeeld 19.9.1.

Bereken de tweede afgeleide van $f(x) = \operatorname{bgsin} x + x$.

We berekenen eerst de eerste afgeleide

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1,$$

en daarna de tweede afgeleide

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right)' \\ &= -\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-3/2} \cdot \left(1-x^2\right)' + 0 \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}\,(-2x) \\ &= \frac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}. \end{aligned}$$

We kunnen dit ook noteren als $\dfrac{d^2}{dx^2}(\operatorname{bgsin} x + x) = \dfrac{x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$

Oefening 19.9.1.

1. Bereken de derde afgeleide van $f(x) = 2\,e^{x^2-1} - \sin 3x + \dfrac{x^3}{2} + 4x^2 - 6x - \dfrac{12}{5}$.

Oplossing: … …

CC BY-NC-SA 4.0

19.9.A Oefeningen hogere orde afgeleiden

19.9.A.1 Niveau 2

Oefening 19.9.2. Bereken de tweede afgeleide van volgende functies:

(a) $f(x) = \ln(x^2)$. $f''(x) = \ldots\ldots$

(b) $f(\theta) = \theta\cos\theta$ $f''(\theta) = \ldots\ldots$

(c) $f(t) = \sin(t^4)$ $f''(t) = \ldots\ldots$

Oefening 19.9.3. Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{d^2}{dx^2}x^3 = \ldots\ldots$
2. $\frac{d^3}{dx^3}6x^3 = \ldots\ldots$
3. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}(314x^9 + x^5 + \frac{\pi}{2}) = \ldots\ldots$
4. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}314^{15} = \ldots\ldots$
5. $\frac{d}{dx}\sin x = \ldots\ldots$
6. $\frac{d^2}{dx^2}\sin x = \ldots\ldots$
7. $\frac{d^3}{dx^3}\sin x = \ldots\ldots$
8. $\frac{d^4}{dx^4}\sin x = \ldots\ldots$
9. $\frac{d^{12}}{dx^{12}}\sin x = \ldots\ldots$
10. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}\sin x = \ldots\ldots$
11. $\frac{d^{120}}{dx^{120}}\sin x = \ldots\ldots$
12. $\frac{d^n}{dx^n}x^n = \ldots\ldots$
13. $\frac{d}{dx}x^{n+1} = \ldots\ldots$
14. $\frac{d^n}{dx^n}x^{n+1} = \ldots\ldots$
15. $\frac{d}{dx}x^{n!} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

19.10 Afgeleide van de inverse functie

Voor een inverteerbare functie f geldt voor elke x in het domein dat

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

Omdat de functies $x \mapsto f^{-1}(f(x))$ en $x \mapsto x$ gelijke functies zijn, zijn ook hun afgeleiden indien deze bestaan aan elkaar gelijk:

$$(f^{-1}(f(x)))' = x'$$

Uit de kettingregel volgt dan (omdat $x' = 1$)

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \text{ of dus } (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = (f'(x))^{-1}$$

en dit verklaart volgende eigenschap:

Eigenschap 19.10.1.

De inverse van een inverteerbare afleidbare functie f met $f'(x) \neq 0$ is afleidbaar in het punt $y = f(x)$, met afgeleide gelijk aan de omgekeerde van de afgeleide van f in x:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \textbf{(afgeleide inverse)}$$

of met $y = f(x)$, en dus $x = f^{-1}(y)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \textbf{(afgeleide inverse)}$$

Opmerking 19.10.1.

- Merk op dat de exponent $^{-1}$ in deze formules in twee verschillende betekenissen wordt gebruikt:

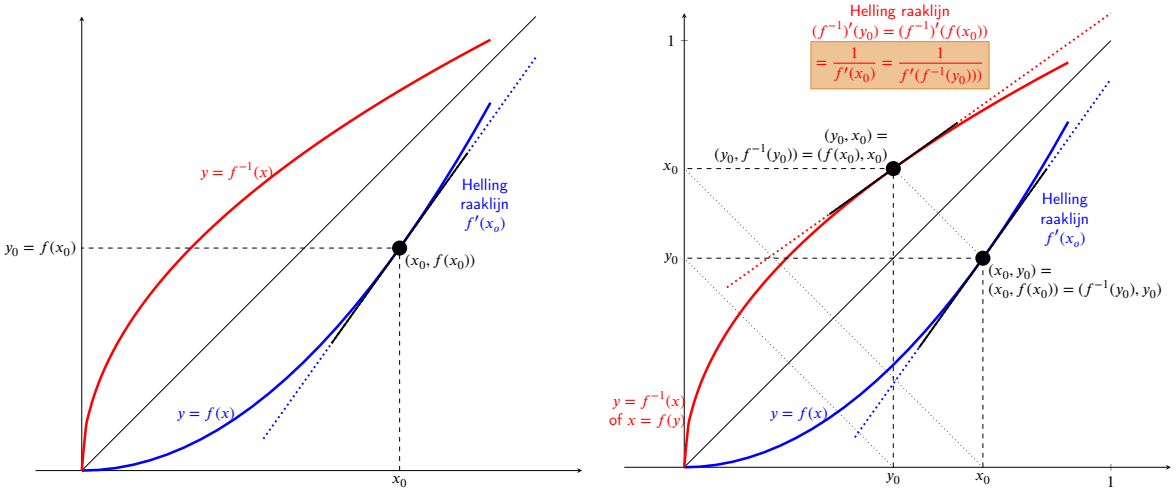
$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\iff x = f(y) && \text{de inversie van een } \textit{functie} \\ (f(x))^{-1} = y &\iff \frac{1}{f(x)} = y && \text{het omgekeerde van een } \textit{getal} \end{aligned}$$

- Merk op dat het hier belangrijk is onderscheid te maken tussen de variabele voor de functie f en de variabele voor de inverse functie f^{-1}.

Op onderstaande grafiek kan je zien dat er *geen verband* is tussen de raaklijnen van f en f^{-1} boven het punt x_0. Er is wel een duidelijk verband tussen de raaklijn aan f in het punt $(x_0, f(x_0))$ en de raaklijn aan de gespiegelde grafiek f^{-1} boven het *gespiegelde punt* $(f(x_0), x_0)$: die raaklijn wordt natuurlijk gewoon mee gespiegeld, en gespiegelde rechten hebben omgekeerde hellingen.

CC BY-NC-SA 4.0

19.10 Afgeleide van de inverse functie



De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 19.10.1.

(a) De inverse van de functie $f : x \mapsto x + a$ is de functie $f^{-1} : x \mapsto x - a$. Beide hebben functies hebben als afgeleide functie de constante functie $f' = (f^{-1})' = 1$, en er geldt inderdaad $1 = 1^{-1}$.

(b) De inverse van de functie $f : x \mapsto 2x$ is de functie $f^{-1} : y \mapsto y/2$. De afgeleide van f is de constante functie $f' : x \mapsto 2$, en de afgeleide van f^{-1} is de constante functie $(f^{-1})' : y \mapsto 1/2$ en er geldt inderdaad dat $(f^{-1})'(y) = 1/2 = 2^{-1} = (f'(x))^{-1}$.

Bovenstaande voorbeelden zijn beide bedrieglijk eenvoudig omdat de afgeleiden telkens *constante* functies zijn.

Voorbeeld 19.10.2. De afgeleide van de inverse van $f : x \mapsto x^2$

De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ is niet inverteerbaar, en heeft dus geen inverse op gans haar domein $\mathbb{R}$.

De functie $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ heeft als inverse $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$ en de functie $f_2 : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ heeft als inverse $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : x \mapsto -\sqrt{x}$. In een punt x_0 is de afgeleide van zowel f_1 als f_2 gelijk aan $2x_0$, en de raaklijn in $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^2)$ heeft dus helling $2x_0$.

In het punt $y_0 = x_0^2$ is de afgeleide van $f_1^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : y \mapsto \sqrt{y}$ gelijk aan

$$(f_1^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f_1'(f_1^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f_1'(\sqrt{y_0})} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}},$$

en de raaklijn in $(y_0, \sqrt{y_0}) = (x_0^2, x_0)$ heeft dus een helling $\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}} = \dfrac{1}{2x_0}$.

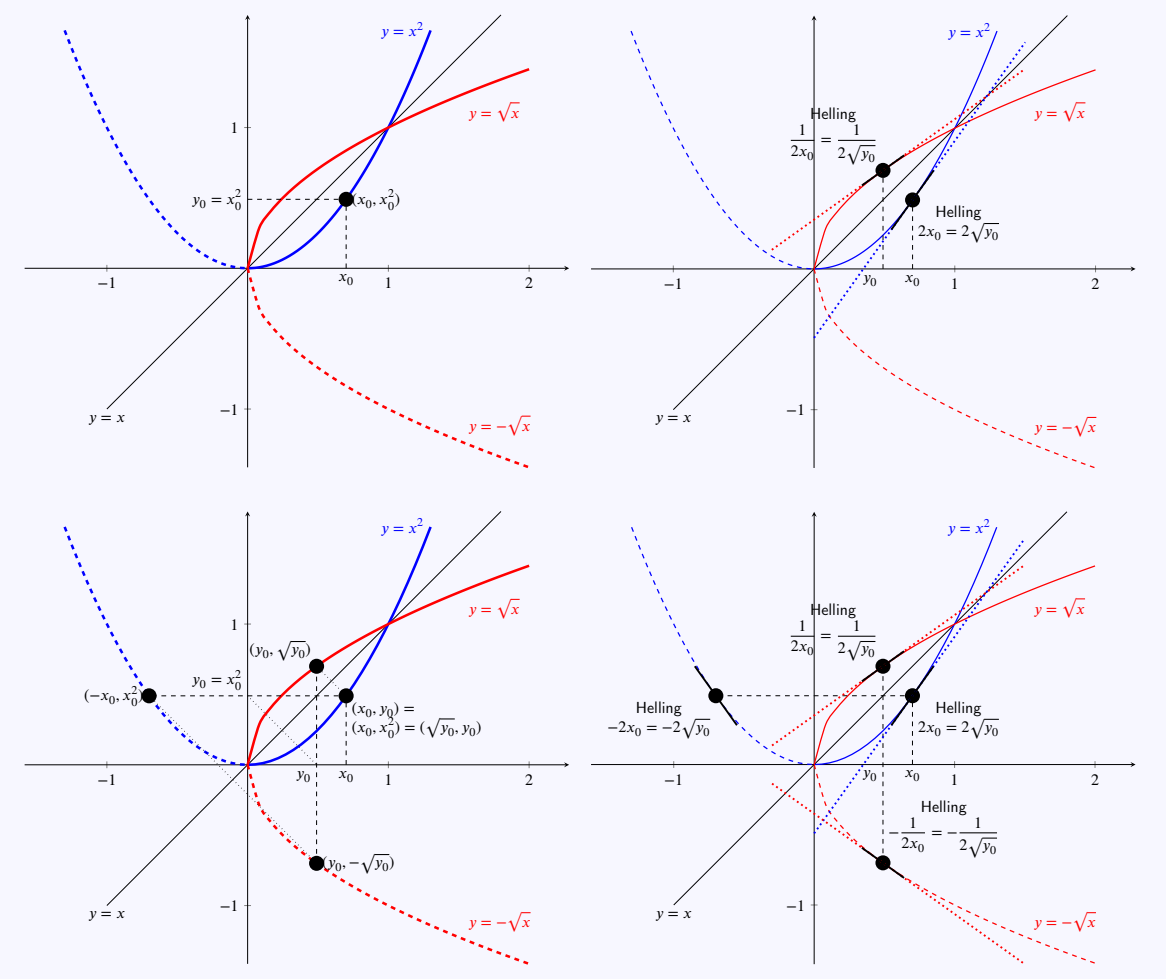
In het punt $y_0 = x_0^2$ is de afgeleide van $f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : y \mapsto -\sqrt{y}$ gelijk aan

$$(f_2^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f_2'(f_2^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f_2'(-\sqrt{y_0})} = -\frac{1}{2\sqrt{y_0}},$$

en de raaklijn in $(y_0, -\sqrt{y_0}) = (x_0^2, -x_0)$ heeft dus een helling $-\dfrac{1}{2\sqrt{y_0}} = -\dfrac{1}{2x_0}$.

CC BY-NC-SA 4.0

19.10 Afgeleide van de inverse functie



Opmerking 19.10.2.

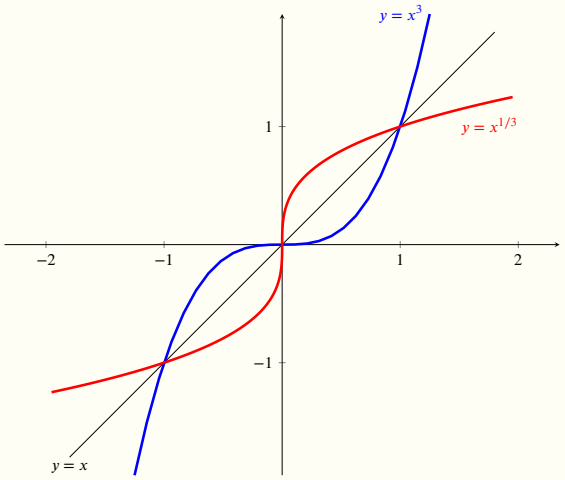
- De raaklijn in $(x_0, f(x_0))$ aan graf f is de spiegeling ten opzichte van de eerste bissectrice van de raaklijn in $(f(x_0), x_0)$ aan graf f^{-1}. Dit is evident, omdat de grafieken elkaars spiegelbeeld zijn, en dus geldt dat ook voor de *raaklijnen* aan de grafieken.
- Als $f'(x_0) = 0$, dan is de inverse functie in het punt $f(x_0)$ niet afleidbaar (want de afgeleide zou gelijk moeten zijn aan $\frac{1}{f'(x_0)}$). Dat komt overeen met het feit dat de spiegeling van een horizontale rechte (helling 'nul') een verticale rechte is (helling 'oneindig').

  Neem als voorbeeld $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ en $x_0 = 0$. In dit geval is $f'(x_0) = 3x_0^2 = 0$. De inverse functie is $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \mapsto y^{1/3}$.

  Deze inverse is niet *afleidbaar* in 0: de afgeleide van $x \mapsto x^{1/3}$ is $x \mapsto \frac{1}{3}x^{-2/3}$, en dat wordt 'oneindig groot' in $x = 0$. Dus, $x \mapsto x^{1/3}$ is niet afleidbaar in de oorsprong omdat de raaklijn er verticaal is.

CC BY-NC-SA 4.0

19.10 Afgeleide van de inverse functie



CC BY-NC-SA 4.0

19.11 Regel van de l'Hôpital

Het berekenen van limieten leidt soms tot zogenaamde *onbepaaldheden* zoals $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$. Er bestaat een handige techniek om die onbepaaldheden te omzeilen via het nemen van *afgeleiden*. De held van dit verhaal is de Fransman de l'Hôpital, die zijn naam gaf aan de techniek. Hij heeft aangetoond dat een limiet $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ die leidt tot een onbepaaldheid van de vorm $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ onder bepaalde voorwaarden gelijk is aan de limiet van de verhouding *van de afgeleiden* $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Er zijn enkele technische beperkingen die de exacte formulering van de regel van de l'Hôpital wat ingewikkeld maken, maar in de praktijk is aan de technische voorwaarden meestal voldaan.

Eigenschap 19.11.1 (Regel van de l'Hôpital)**.** Voor twee reële functies f en g waarbij

- f en g afleidbaar zijn in een omgeving van c (met $c \in \mathbb{R}$ of $c = \pm\infty$),
- $f(c) = g(c) = 0$ ofwel $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ en $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$,
- $g'(x) \neq 0$ voor $x \neq c$ in een omgeving van c en
- $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ bestaat, geldt dat:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \left(\text{als } \frac{f(c)}{g(c)} \text{ van de vorm } \frac{0}{0} \text{ of } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Opmerking 19.11.1.

- Men schrijft soms $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ om het gebruik van de regel van de l'Hôpital aan te duiden.
- Met de notatie $\frac{\infty}{\infty}$ worden volgende 4 situaties bedoeld: $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$ of $\frac{-\infty}{-\infty}$.
- De regel van de l'Hôpital werkt ook voor limieten in oneindig.
- De regel van de l'Hôpital werkt ook voor rechter- en linkerlimieten.
- Let op: bereken de afgeleide van teller en noemer afzonderlijk, *niet* de afgeleide van de breuk.

Voorbeeld 19.11.1. Bereken $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$.

We gaan na of de regel van de l'Hôpital toegepast kan worden met $f(x) = \sin x$ en $g(x) = x$. Omdat $f(0) = 0$ en $g(0) = 0$ komen we de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ uit. We moeten nagaan of de limiet van het quotiënt van de afgeleiden bestaat: $(\sin x)' = \cos x$ en $x' = 1$, dus

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0}\cos x = \cos(0) = 1$$

De limiet van de afgeleiden bestaat, en in een omgeving van $c = 0$ is $g'(x) = 1 \neq 0$ en dus geldt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

We beperken ons in deze cursus tot oefeningen waarbij het volstaat om de voorwaarde $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ na

CC BY-NC-SA 4.0

19.11 Regel van de l'Hôpital

te gaan en noteren dit voorbeeld korter:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1.$$

Voorbeeld 19.11.2. Bereken $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{2x}}$.

Omdat $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ en $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ bekomen we de onbepaaldheid $\frac{\infty}{\infty}$ en kunnen we de regel van de l'Hôpital toepassen.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = 0\,.$$

Soms is niet meteen duidelijk of $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ bestaat en moet je meerdere keren na elkaar de regel van de l'Hôpital toepassen:

Voorbeeld 19.11.3. Bereken $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x-\sin(x)}$.

Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ dus kunnen we de regel van de l'Hôpital toepassen.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x-\sin(x)} &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x)-2\cos(2x)}{1-\cos(x)} && \text{(nog steeds } \tfrac{0}{0}\text{)}\\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin(x)+4\sin(2x)}{\sin(x)} && \text{(nog steeds } \tfrac{0}{0}\text{)}\\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\cos(x)+8\cos(2x)}{\cos(x)} && \text{(niet langer } \tfrac{0}{0}\text{)}\\
&= \frac{-2+8}{1} = 6
\end{aligned}$$

De regel van de l'Hôpital kan soms ook worden gebruikt voor onbepaaldheden van de vorm $0\cdot\infty$. Inderdaad, als de limiet van $f(x)\cdot g(x)$ leidt tot de onbepaaldheid $(+\infty)\cdot 0$, dan kan door één van de twee functies om te keren de regel van de l'Hôpital mogelijk worden toegepast via $f(x)\cdot g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ of $f(x)\cdot g(x) = \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$.

Voorbeeld 19.11.4. Bereken $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln(x)$.

Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $0\cdot(-\infty)$. In plaats van $\ln x$ te vermenigvuldigen met x, kunnen we $\ln x$ ook delen door $1/x$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $\frac{-\infty}{+\infty}$ en kan dus worden berekend met de regel van de l'Hôpital:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(-x) = 0$$

Merk op dat de onbepaaldheid $0\cdot(-\infty)$ bij het product $x\cdot\ln x$ dus blijkbaar 0 wordt. Maar het product $x\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)$ gaat naar -1 voor $x \underset{>}{\to} 0$, terwijl $-\frac{1}{x}$ ook oneindig negatief wordt, en het product $x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$ wordt oneindig negatief voor $x \underset{>}{\to} 0$. Dit is precies de betekenis van de bewering '$0\cdot\infty$ is onbepaald': naargelang het geval neemt de limiet van $f(x)\cdot g(x)$ met $f(x)\to 0$ en $g(x)\to\infty$ allerlei verschillende waarden aan.

CC BY-NC-SA 4.0

19.11 Regel van de l'Hôpital

Net zoals limieten van functies die leiden tot een onbepaaldheid van de vorm $0 \cdot \infty$ herschreven kunnen worden zodat je de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ verkrijgt en dus de regel van de l'Hôpital kan toepassen, is het soms ook mogelijk bij de onbepaaldheid $\infty - \infty$ om de functie te herschrijven om $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$ te verkrijgen.

Voorbeeld 19.11.5. Bereken $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $\infty - \infty$. Door op gelijke noemer te brengen krijgen we de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ en kunnen we de regel van de l'Hôpital toepassen.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{\sin x - x}{x \sin x} \right) \\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \right) \\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{-\sin x}{\cos x + (\cos x - x \sin x)} \right) \\ &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(\frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \right) = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

Opmerking 19.11.2.

Ook limieten die leiden tot onbepaaldheden van de vorm 0^0, ∞^0 en 1^∞ kunnen soms herschreven worden zodat de regel van de l'Hôpital toegepast kan worden.

CC BY-NC-SA 4.0

19.11.A Oefeningen de l'Hôpital

19.11.A.1 Niveau 2

Oefening 19.11.1. Bereken volgende limieten.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^2 + x} = \ldots\ldots$
2. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{3e^x - 1}{3e^x} = \ldots\ldots$
3. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(7x)}{x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \ldots\ldots$
4. $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \ldots\ldots$ met $a > 0$

19.11.A.2 Niveau 3

Oefening 19.11.2. Bereken volgende limieten.

1. $\lim_{x\to +\infty} x^4 e^{-x^2} = \ldots\ldots$
2. $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2x \ln x = \ldots\ldots$
3. $\lim_{x\to +\infty} x \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \ldots\ldots$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} = \ldots\ldots$
5. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \ldots\ldots$
6. $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

19.12 Minimum-Maximumproblemen

In heel wat wetenschappelijke problemen zoeken we het *maximum* of het *minimum* van een zekere grootheid. Deze grootheid kan van wiskundige, fysische, economische of andere aard zijn, bijvoorbeeld een maximale of minimale inhoud, oppervlakte of afstand, minimale kosten of maximale winst. Dergelijke minimum-maximumproblemen worden ook wel optimalisatieproblemen genoemd, en *afgeleiden* spelen een belangrijke rol bij het vinden van de oplossingen. We herhalen kort de theoretische achtergrond en geven enkele voorbeelden.

Definitie 19.12.1 (Minimum en maximum van een functie)**.**

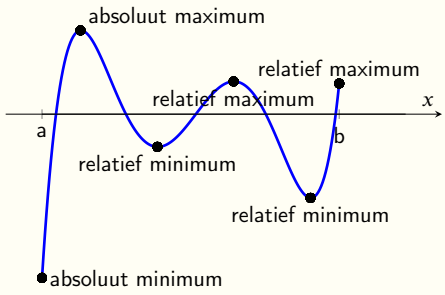
Een reële functie f gedefinieerd op $A \subseteq \mathbb{R}$

- bereikt een **absoluut maximum** in een punt $p \in A$ indien voor elke $x \in A$ geldt: $f(p) \geq f(x)$.
- bereikt een **absoluut minimum** in een punt $p \in A$ indien voor elke $x \in A$ geldt: $f(p) \leq f(x)$.
- bereikt een **relatief** of **lokaal maximum** in een punt $p \in A$ indien er een open interval I rond p bestaat zodat voor elke $x \in I \cap A$ geldt: $f(p) \geq f(x)$.
- bereikt een **relatief** of **lokaal minimum** in een punt $p \in A$ indien er een open interval I rond p bestaat zodat voor elke $x \in I \cap A$ geldt: $f(p) \leq f(x)$.

Een **extremum** is ofwel een maximum ofwel een minimum.

Opmerking 19.12.1.

Merk op dat een functie gedefinieerd op een interval $[a, b]$ ook een lokaal extremum kan bereiken in de randpunten a en b. Zo bereikt onderstaande functie een absoluut minimum in a en een relatief maximum in b.



Een *absoluut* maximum is dus steeds ook een *relatief* maximum, een *absoluut* minimum is steeds ook een *relatief* minimum.

Maak steeds onderscheid tussen de x-waarde(n) *waar een maximum wordt bereikt*, en *het maximum zelf*, dat een functiewaarde, dus een y-waarde is.

Bij het bepalen van de extrema van een functie f speelt de afgeleide f' een belangrijke rol:

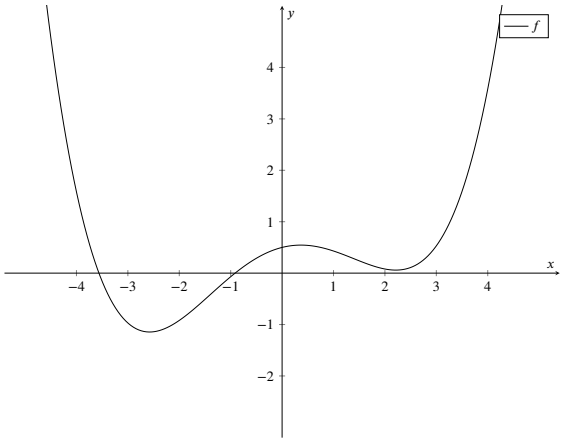
Eigenschap 19.12.1. Voor een continue functie f op $[a, b]$ die afleidbaar is op $]a, b[$ geldt:

- als $f'(x) > 0$ voor elke $x \in]a, b[$, dan is f *strikt stijgend* in $[a, b]$
- als $f'(x) < 0$ voor elke $x \in]a, b[$, dan is f *strikt dalend* in $[a, b]$
- als $f'(c) = 0$ voor een $c \in]a, b[$, dan heeft de grafiek van f in $(c, f(c))$ een *horizontale raaklijn*.

CC BY-NC-SA 4.0

19.12 Minimum-Maximumproblemen

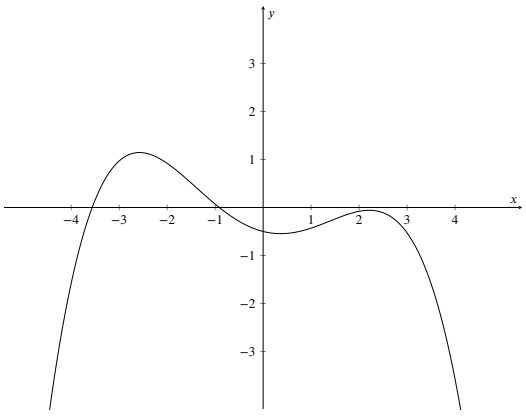
Oefening 19.12.1. Hieronder zie je de grafiek van een functie f.



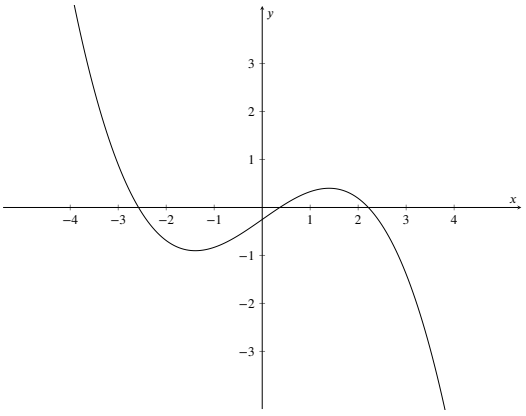
Welke van de volgende figuren is de grafiek van de afgeleide functie f'?

Meerkeuze:

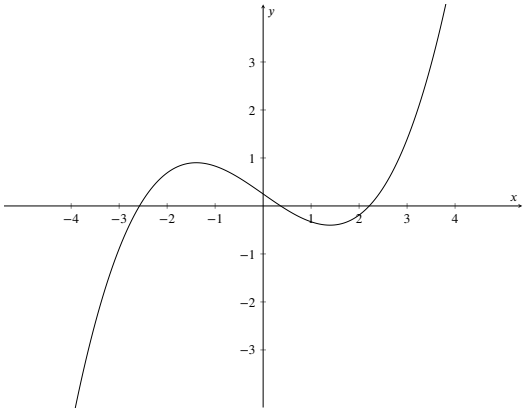
(a)



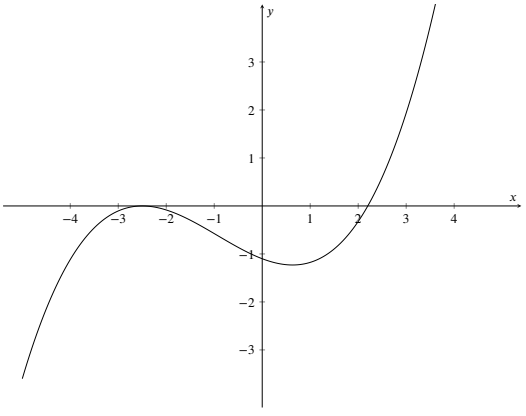
(c)



(b)



(d)



Definitie 19.12.2. Als $f'(c) = 0$ noemen we c een **kritiek punt** of een **stationair punt** van f.

Een *kritiek punt van f* is dus gewoon een andere naam voor *een nulpunt van de afgeleide van f*.

CC BY-NC-SA 4.0

19.12 Minimum-Maximumproblemen

De kritieke punten en het tekenverloop van de afgeleide f' geven ons heel wat informatie over het verloop van f.

Voorbeeld 19.12.1. Onderzoek via de afgeleide het dalen en stijgen van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en bepaal de extrema.

We berekenen eerst de afgeleide:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

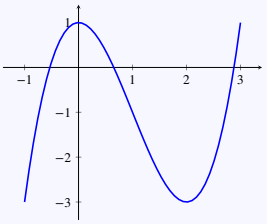
en bepalen daarvan de nulpunten (en dus de kritieke punten van f):

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = 2$$

Vervolgens maken we een *tabel* met

- op de eerste lijn de x-waarden die tot het domein van de functie behoren, met van klein naar groot alle *kritieke punten*,
- op de tweede lijn het *tekenverloop van* f': schrijf nul onder de kritieke punten, en plustekens/-mintekens daartussen naargelang het teken van f'. In dit voorbeeld kunnen we deze tekens vinden als het tekenverloop van een tweedegraadsveelterm.
- op de derde lijn *het verloop van de grafiek van* f: Waar $f'(x) > 0$ stijgt f en waar $f'(x) < 0$ daalt f. We gebruiken het symbool $\nearrow$ voor stijgend en $\searrow$ voor dalend.
- waar de functie overgaat van stijgend naar dalend, is er een relatief maximum, waar ze overgaat van dalend naar stijgend is er een relatief minimum.

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	rel max	$\searrow$	rel min	$\nearrow$



In dit voorbeeld is er geen absoluut minimum omdat $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ en geen absoluut maximum omdat $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Opmerking 19.12.2.

- Als het domein een begrensd interval [a,b] is, vermeld je in de tabel op de eerste lijn ook de randpunten a en b.
- Om extrema te bepalen is het niet nodig of nuttig *de nulpunten van de functie* f te bepalen.

In bovenstaand voorbeeld zijn de twee relatieve extrema ook de twee kritieke punten van f. Dat is echter *niet altijd* het geval.

Eigenschap 19.12.2. Voor een functie f op $[a, b]$ en een punt $c \in]a, b[$ met f afleidbaar in c geldt:

als f een relatief extremum bereikt in c **dan** is $f'(c) = 0$

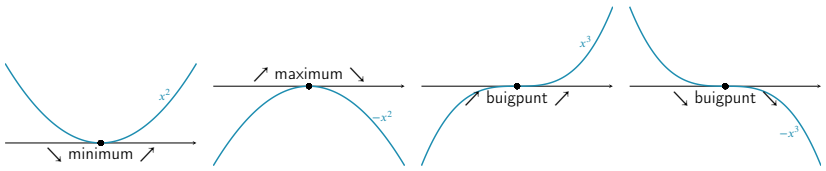
Wat kunnen we besluiten uit deze eigenschap? We zijn op zoek naar de relatieve extrema van een functie.

CC BY-NC-SA 4.0

19.12 Minimum-Maximumproblemen

De kritieke punten kunnen we gemakkelijk berekenen. Volgens deze eigenschap zijn, onder de punten van $]a,b[$ waar de functie f een afgeleide heeft, de kritieke punten de enige *kandidaat-extrema*. Er zijn echter twee vervelende subtiliteiten: een kritiek punt is niet altijd een extremum, en randpunten en punten waar de functie niet afleidbaar is kunnen extrema zijn zonder kritieke punten te zijn.

Een kritiek punt is ofwel een extremum ofwel *een buigpunt*.



Om te weten of een kritiek punt een relatief minimum, relatief maximum of een buigpunt is zijn er twee methodes:

- Het *tekenverloop van de afgeleide* f' bepaalt of er een minimum, een maximum dan wel een buigpunt optreedt. Er zijn de volgende mogelijkheden:

x		c	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	relatief max	↘

x		c	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	relatief min	↗

x		c	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	geen extremum	↗

x		c	
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	geen extremum	↘

- Je kan ook het *teken van de tweede afgeleide* $f''(c)$ gebruiken als die bestaat, maar de techniek van de tweede afgeleide test behandelen we hier niet. Deze techniek kan wel nuttig zijn wanneer het moeilijk is om het tekenverloop van f' te vinden.

Je moet niet beide methodes toepassen, één van beide volstaat.

Voorbeeld 19.12.2. Onderzoek via de afgeleide het dalen en stijgen van de functie $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ en bepaal de extrema.

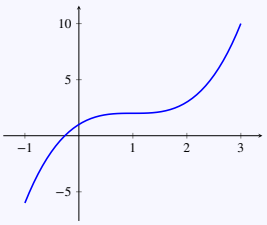
We berekenen eerst de afgeleide:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$$

en bepalen daarvan de nulpunten (en dus de kritieke punten van f):

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x		1	
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	↗	buigpunt	↗



De functie gaat in het kritiek punt over van stijgend naar stijgend. We hebben dus geen relatief maximum en ook geen relatief minimum, we hebben een buigpunt.

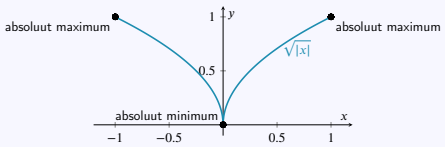
CC BY-NC-SA 4.0

19.12 Minimum-Maximumproblemen

Extrema van functies kunnen *toch* voorkomen in punten die geen kritieke punten zijn.

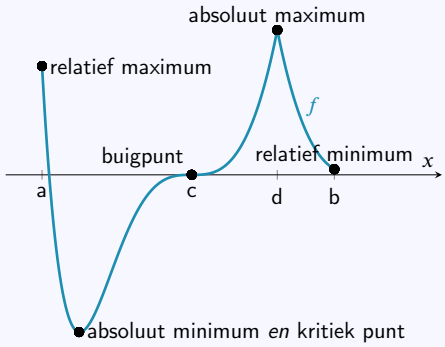
Extrema kunnen namelijk voorkomen in een *randpunt a of b van het interval* $[a, b]$ of in een punt waar de *functie niet afleidbaar* is.

Voorbeeld 19.12.3. De functie $x \mapsto \sqrt{|x|}$ op het interval $[-1, 1]$ heeft twee maxima en één minimum, en geen enkel van die drie punten zijn kritieke punten (ze behoren dus *niet* tot de punten waar de afgeleide nul is). De punten -1 en 1 zijn randpunten van $[-1, 1]$, en in 0 is de functie niet afleidbaar.



Volgend voorbeeld geeft een visueel overzicht van extrema die geen kritiek punt zijn en van kritieke punten die geen extremum zijn:

Voorbeeld 19.12.4. Onderstaande functie f, gedefinieerd op een interval $[a, b]$, bereikt een relatief maximum in a, een relatief minimum in b, een absoluut maximum in d, en een buigpunt in c. De punten a en b zijn *randpunten* (extrema, maar geen kritieke punten), de functie is *niet afleidbaar* in d (extremum, maar geen kritiek punt), en heeft een *buigpunt* in c (kritiek punt, maar geen extremum):



Opmerking 19.12.3.

- Wanneer je extrema zoekt van een functie gedefinieerd op een gesloten interval moeten de randpunten zeker bekeken worden.
- Voor functies die niet afleidbaar zijn in sommige punten van hun domein, moet je op een andere manier de extrema onderzoeken, bijvoorbeeld door de grafiek van de functie te tekenen.

In oefeningen en toepassingen zoeken we vaak geen *relatieve* extrema maar *absolute* extrema.

Eigenschap 19.12.3 (Algoritme voor absolute extrema)**.**

Voor begrensde functies is het absolute maximum het grootste van alle relatieve maxima, het absolute minimum is het kleinste van alle relatieve minima.

Voor een afleidbare functie f gedefinieerd op $[a, b]$ bepaal je absolute extrema door de *functiewaarde* te berekenen in elk relatief extremum en in de randpunten a en b. De grootste van die functiewaarden is het absolute maximum, de kleinste is het absolute minimum.

Volgende voorbeelden illustreren de werkwijze voor het vinden van extrema bij vraagstukken. Vooraleer

CC BY-NC-SA 4.0

19.12 Minimum-Maximumproblemen

je kritieke punten kan zoeken moet je eerst de veranderlijken, de functie die minimaal of maximaal moet zijn en het domein van deze functie vastleggen. In sommige vraagstukken zijn hievoor meerdere keuzes mogelijk.

Voorbeeld 19.12.5.

Toon aan dat van alle rechthoeken met gegeven oppervlakte $S \neq 0$ het vierkant (met oppervlakte S) de kleinste omtrek heeft.

Uitwerking:

- **Kies veranderlijken**: We noteren met x en y de lengtes van de zijden van een rechthoek met oppervlakte S.
- **Bepaal het domein**: Omdat x en y lengtes voorstellen en $S \neq 0$ weten we dat $x > 0$ en $y > 0$.
- **Bepaal de functie** die minimaal moet zijn:
  - Je zoekt het minimum van de omtrek, dus van $2x + 2y$. Deze uitdrukking bevat echter twee veranderlijken, en daarvoor werkt bovenstaande theorie niet. Je moet proberen één van de veranderlijken uit te drukken in termen van de andere.
  - Uit het gegeven halen we dat $S = x.y$ dus $y = \frac{S}{x}$. Dit geeft het **verband tussen de twee variabelen**.
  - We schrijven deze omtrek als een functie van één variabele $f(x)$, door het verband tussen beide variabelen te gebruiken:
    $f(x) = 2x + 2\frac{S}{x} = 2(x + \frac{S}{x})$ met $x > 0$
- **Zoek het (absolute) minimum van deze functie** f:
  - $f'(x) = 2(1 - \frac{S}{x^2})$
  - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{S}$
  - Omdat $x > 0$ behoud je verder alleen $\sqrt{S}$. Met behulp van het tekenverloop onderzoek je welk soort kritiek punt dit is.

x		$\sqrt{S}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	relatief min	$\nearrow$

    Nemen we $x > \sqrt{S}$, dan is $x^2 > S$, dus $1 > \frac{S}{x^2}$, dus $1 - \frac{S}{x^2} > 0$ en dus is f' groter dan 0. Vandaar het plusteken bij het tekenverloop van f'. Met een analoge redenering vind je het minteken voor $x < \sqrt{S}$.

    Omdat de functie $f(x)$ daalt tot $\sqrt{S}$ en dan stijgt, bereikt de omtrek f een *relatief minimum* in $x = \sqrt{S}$. Aangezien dit het enige minimum is voor $x > 0$ is dit ook het gezochte absolute minimum.
- **Besluit**: Als $x = \sqrt{S}$ dan is ook $y = \sqrt{S}$, en de gezochte rechthoek is dus een vierkant.

Voorbeeld 19.12.6.

Een draad van 4 meter wordt in 2 stukken geknipt. Met één stuk wordt een vierkant gemaakt, met het andere een cirkel. We willen de ingesloten oppervlakte voor beide figuren samen maximaliseren. Hoeveel draad gebruik je best voor de cirkel?

Uitwerking:

CC BY-NC-SA 4.0

19.12 Minimum-Maximumproblemen

- **Kies veranderlijken**: We noteren met x de omtrek van de cirkel, dan is $4-x$ de omtrek van het vierkant.
- **Domein:** Uit de opgave volgt dat $x \in [0,4]$.
- **Bepaal de functie** die maximaal moet zijn:
  - De oppervlakte van een vierkant is het kwadraat van de zijde, en de omtrek is vier keer zijde. De oppervlakte van het vierkant is dus $\frac{(4-x)^2}{4^2} = \frac{(4-x)^2}{16}$
  - De oppervlakte van een cirkel is π maal de straal in het kwadraat, de omtrek is 2π maal de straal. De straal is dus $\frac{x}{2\pi}$ en bijgevolg is de oppervlakte van de cirkel $\frac{x^2}{4\pi}$

  We zoeken bijgevolg het maximum van $f(x) = \frac{(4-x)^2}{16} + \frac{x^2}{4\pi}$ met $x \in [0,4]$
- **Zoek het (absolute) maximum van deze functie** f:
  - $f'(x) = -\frac{2(4-x)}{16} + \frac{2x}{4\pi} = -\frac{1}{2} + (\frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi})x$
  - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{\pi+4}$
  - Hieruit mogen we niet meteen besluiten dat $x = \frac{4\pi}{\pi+4}$ het gezochte maximum is. Met behulp van het tekenverloop gaan we na welk soort kritiek punt dit is.

x	0		$\frac{4\pi}{\pi+4}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	relatief min	$\nearrow$	

  Dus bereikt f een relatief *minimum* in $x = \frac{4\pi}{\pi+4}$, en dit is bijgevolg **niet** het gezochte punt.
  - Uit het tekenverloop hierboven volgt dat de maxima van f te vinden zijn in de *randpunten van het domein* $[0,4]$. We berekenen de functiewaarden in deze randpunten om te weten waar het absolute maximum zich bevindt.

x	0		$\frac{4\pi}{\pi+4}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	relatief min	$\nearrow$	$\frac{4}{\pi}$

- **Besluit:** We vinden het maximum van f in 4. De omtrek van de cirkel moet dus 4 meter zijn, deze van het vierkant 0. De ingesloten oppervlakte is dus maximaal als de draad volledig voor de cirkel gebruikt wordt.

Oefening 19.12.2. De som van twee positieve getallen a en b is 100, waarbij $a \leq b$. Zoek deze getallen als

1. hun product maximaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

2. de som van hun kwadraten minimaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

3. de som van hun kwadraten maximaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

4. het product van het kwadraat van een getal met de derde macht van het andere getal maximaal moet zijn: $a = \ldots\ldots$ en $b = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 20
Integralen

(Versie 2026/11/23H.2)

20.1 Definitie onbepaalde integraal

We zetten een volgende stap in de wiskundige processie van *definieer-iets-nieuws* gevolgd door *en-keer-het-proces-om*. We leerden optellen, en kort daarna aftrekken. We leerden vermenigvuldigen, en kort daarna delen. Hetzelfde voor kwadrateren gevolgd door vierkantswortel trekken, en exponentiële functies gevolgd door logaritmische functies. Nu zullen we leren het proces van afgeleiden berekenen *omkeren*: we zoeken niet de afgeleide f' van een functie f, we zoeken van welke functie F deze functie f de afgeleide *is*.

Gegeven een functie f, zoeken we dus (alle) functies F zodat $F' = f$. Later zullen we uitleggen *waarom* deze omkering-van-de-afgeleide een erg belangrijk begrip is in de wiskunde en in alle wetenschappen.

Voorbeeld 20.1.1.

Geef voor volgende functies f telkens één of meerdere functies F zodat $F' = f$.

1. Een functie met als afgeleide functie $f : x \mapsto e^x$ is $F : x \mapsto e^x$

Uitwerking: Inderdaad, want $(e^x)' = e^x$. Merk op dat ook $(e^x + 7)' = e^x$. De afgeleide van elke functie $F_c : x \mapsto F_c(x) = e^x + c$, met $c \in \mathbb{R}$ is telkens gelijk aan $f : x \mapsto f(x) = e^x$.

2. Een functie met als afgeleide functie $f : x \mapsto x$ is $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

Uitwerking: Inderdaad, want $(\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2}2x = x$. Merk op dat ook $(\frac{1}{2}x^2 + 3)' = x$. De afgeleide van elke functie $F_c : x \mapsto F_c(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$, met $c \in \mathbb{R}$ is telkens gelijk aan $f : x \mapsto f(x) = x$.

We hebben een nieuwe naam nodig voor 'een functie waarvan de afgeleide f is'. We noemen dergelijke functie een *primitieve* functie van f, waarbij het woord primitief gebruikt wordt in de betekenis van *oorspronkelijk*. Een primitieve functie is dus een *oorspronkelijke* functie waarvan je vertrokken bent bij het afleiden.

Definitie 20.1.1 (Primitieve functie)**.**

Een **primitieve functie** van een functie f is een functie F waarvoor geldt dat

$$F' = f.$$

Voorbeeld 20.1.2.

1. $x \mapsto e^x$ is een primitieve functie van $x \mapsto e^x$

2. $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ is een primitieve functie van $x \mapsto x$

3. $x \mapsto x^3$ is een primitieve functie van $x \mapsto 3x^2$

4. $x \mapsto 42x$ is een primitieve functie van $x \mapsto 42$

Opmerking 20.1.1.

Volgens deze definitie kunnen we ook zeggen dat een afleidbare functie f een primitieve functie is van f'. Bijvoorbeeld $f(x) = x^3$ is een primitieve functie van $f'(x) = 3x^2$.

We moeten er rekening mee houden dat een functie meerdere primitieve functies kan hebben. Uit de rekenregels van afgeleiden volgt dat twee functies die op een constante na gelijk zijn aan elkaar dezelfde afgeleide hebben: $(F + c)' = F' + c' = F'$. Als F een primitieve functie is van f, dus als $F' = f$, dan geldt ook $(F + c)' = F' = f$. Bijgevolg zijn ook de functies $F + c$ allemaal primitieve functies van f. Zijn dit *alle* primitieve functies van f? Het antwoord is ja, zoals blijkt uit volgende eigenschap:

CC BY-NC-SA 4.0

20.1 Definitie onbepaalde integraal

Eigenschap 20.1.1 (Functies met gelijke afgeleiden zijn gelijk op een constante na)**.**

Twee afleidbare functies F_1 en F_2 op een interval I met *gelijke afgeleiden*

$$F_1'(x) = F_2'(x) \quad \text{voor alle } x \in I,$$

zijn *gelijk op een constante na*. Dat betekent dat er een constante $c \in \mathbb{R}$ bestaat zodat

$$F_1(x) = F_2(x) + c \quad \text{voor alle } x \in I.$$

Met *één* primitieve functie F van f kennen we dus *alle* primitieve functies van f: ze zijn allemaal van de vorm $F + c$, met $c \in \mathbb{R}$. Omdat er geen *unieke* primitieve functie is van f, spreken we over de *verzameling* van alle primitieve functies van f:

Definitie 20.1.2 (Onbepaalde integraal)**.**

De **onbepaalde integraal** van een functie f, genoteerd $\int f(x)\,dx$, is de *verzameling van alle primitieve functies* van f. Omdat alle primitieve functies van f aan elkaar gelijk zijn op een constante na noteren we ook

$$\int f(x)\,dx \overset{\text{notatie}}{=} F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

met F een (willekeurige) primitieve functie van f.

We noemen $f(x)$ de **integrand**, x de **integratievariabele** en c de **integratieconstante**.

Het zoeken (of 'berekenen') van $\int f(x)\,dx$ noemt men het **primitiveren** of **integreren** van $f(x)$.

Voorbeeld 20.1.3.

1. $\int e^x\,dx = e^x + c$
2. $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$
3. $\int 3x^2\,dx = x^3 + c$
4. $\int 42\,dx = 42x + c$

Voorbeeld 20.1.4.

De integratievariabele wordt niet steeds met de letter x genoteerd, we kunnen ook schrijven dat

- $\int e^\theta\,d\theta = e^\theta + c$
- $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + c$
- $\int 3t^2\,dt = t^3 + c$
- $\int 42\,dR = 42R + c$

Opmerking 20.1.2.

Een primitieve functie is dus maar bepaald op een constante na. Via een trucje wordt dat probleem hier omzeild door de onbepaalde integraal de *verzameling* te noemen van al deze primitieve functies. In de praktijk denkt iedereen over de onbepaalde integraal als 'een functie die slechts op een constante na bepaald is', of 'een functie waar je steeds een willekeurige constante bij kan optellen'.

Afleiden en integreren heffen elkaar op.

Inderdaad, als we een functie f eerst afleiden en deze afgeleide dan integreren krijgen we (op een constante

CC BY-NC-SA 4.0

20.1 Definitie onbepaalde integraal

na) terug f:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

omdat f een primitieve functie is van f'.

Als we f eerst integreren

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \text{ met } F \text{ een primitieve functie van } f, \quad c \in \mathbb{R}$$

en dan het resultaat weer afleiden, krijgen we terug f :

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x).$$

Dit vatten we samen in volgende eigenschap:

Eigenschap 20.1.2 (Afleiden en integreren heffen elkaar op)**.**

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right)\,dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,dx = f(x)$$

We bekijken deze eigenschap ook in de notatie met differentialen:

Opmerking 20.1.3 (Werken met differentialen)**.**

De uitdrukking dx (of dt etc.) wordt in sommige cursussen en handboeken beschouwd als een symbool zonder "echte betekenis", dat enkel de naam van de integratievariabele aangeeft.

Men kan het echter ook beschouwen als een *differentiaal*. Eén van de vele mogelijke definities zegt dat dx een 'basisdifferentiaal' is, en dat per definitie voor een afleidbare functie f de differentiaal van f gelijk is aan

$$df \overset{\text{def}}{=} f'(x)dx.$$

Dit begrip, of deze notatie, leidt tot een kortere formulering van de eigenschappen van integralen. Bij de studie van de *bepaalde* integraal, zal de differentiaal ook een concretere betekenis krijgen.

Door beide leden van $df \overset{\text{def}}{=} f'(x)dx$ te integreren, krijgen we de gelijkheid

$$\int df = \int f'(x)dx$$

en omdat $\int f'(x)dx = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$ volgt dat

$$\int df = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

20.1 Definitie onbepaalde integraal

Bijgevolg heft de integraal de differentiaal dus op, op een integratieconstante na.

Omgekeerd, links en rechts de differentiaal nemen in de formule $\int f(x)dx = F(x) + c$ geeft:

$$d\int f(x)dx = d(F(x)+c) = dF = F'(x)dx = f(x)dx$$

en dus

$$\boxed{d\int f(x)dx = f(x)dx}$$

Bijgevolg heft de differentiaal de integraal op (waarbij geen integratieconstante optreedt).

Opmerking 20.1.4.

We kunnen dit process grafisch voorstellen (waarbij we de integratieconstante negeren):

$$\underset{\text{(integraal)}}{\int f(x)dx} \underset{\text{integreren}}{\overset{\text{afleiden}}{\rightleftarrows}} \underset{\text{(functie)}}{f} \underset{\text{integreren}}{\overset{\text{afleiden}}{\rightleftarrows}} \underset{\text{(afgeleide functie)}}{f'}$$

CC BY-NC-SA 4.0

20.2 Basisintegralen

De onbepaalde integraal van een functie f is per definitie $\int f(x)dx = F(x)+c$ met $F' = f$. Dit betekent dat integreren en differentiëren elkaars inverse zijn. Voor een aantal functies is het zeer gemakkelijk om de onbepaalde integraal te vinden: namelijk voor de uitkomsten van de basisafgeleiden. Inderdaad, neem als voorbeeld $(\sin x)' = \cos x$. Stel dat je een functie F zoekt waarvan de afgeleide gelijk is aan het rechterlid, dus gelijk aan $f(x) = \cos x$. De formule voor de afgeleide zegt dan dat $F(x) = \sin x$ als afgeleide $f(x) = \cos x$ heeft. Het volstaat dus om de reeks basis*afgeleiden* van *rechts naar links* te lezen om een hele reeks basis*integralen* te vinden. In onderstaand overzicht is de afgeleide van het rechterlid steeds de integrand in het linkerlid.

Eigenschap 20.2.1 (Basisintegralen)**.** (met $c \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}, r \neq -1, a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$)

$$\begin{array}{lcllcl}
\displaystyle\int 0\,dx & = & c & \displaystyle\int dx & = & x+c \\
\displaystyle\int x^r\,dx & = & \dfrac{1}{r+1}x^{r+1}+c & \displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln|x|+c \\
\displaystyle\int e^x\,dx & = & e^x+c & \displaystyle\int a^x\,dx & = & \dfrac{a^x}{\ln a}+c \\
\displaystyle\int \sin x\,dx & = & -\cos x+c & \displaystyle\int \cos x\,dx & = & \sin x+c \\
\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx & = & \tan x+c & \displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx & = & -\cot x+c \\
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx & = & \mathrm{bgsin}\,x+c & \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx & = & \mathrm{bgtan}\,x+c
\end{array}$$

Opmerking 20.2.1.

Een *basisintegraal* uitrekenen is eenvoudig want die zoek je op in de tabel. Merk op dat je dus wel snel moet kunnen herkennen *of* een bepaalde integraal al dan niet een basisintegraal is. Je moet bijvoorbeeld geen berekeningsmethode zoeken voor $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$, want deze integraal staat in de tabel.

Voorbeeld 20.2.1. Basisintegralen:

(a) $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3+c$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$

(c) $\displaystyle\int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2}+c = -\frac{1}{2x^2}+c$

(d) $\displaystyle\int 7^x\,dx = \frac{7^x}{\ln 7}+c$

Oefening 20.2.1. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int x^{-2}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Basisintegraal $\displaystyle\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1}+c$ voor $r = -2$

2. $\displaystyle\int e^x\,dx = \ldots\ldots$

3. $\displaystyle\int 8^x\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.2 Basisintegralen

De rekenregels voor som en scalaire veelvouden zijn analoog aan deze voor afgeleiden:

Eigenschap 20.2.2. Voor integreerbare functies f en g en $a, b \in \mathbb{R}$ gelden volgende formules:

$$\begin{aligned} \int af(x)\,dx &= a\int f(x)\,dx && \text{(veelvoud)} \\ \int (f(x)+g(x))\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx && \text{(som)} \\ \int (af(x)+bg(x))\,dx &= a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx && \text{(lineaire combinatie)} \end{aligned}$$

De rekenregel voor de som noemt men ook *integratie door splitsing*.

Voorbeeld 20.2.2. We berekenen $\int 2x\,dx$ en noteren de uitwerking hiervan eerst zeer nauwkeurig.

Volgens bovenstaande eigenschap geldt dat $\int 2x\,dx = 2\int x\,dx$. Er geldt ook dat $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}+c$, met $c \in \mathbb{R}$ want dit is een basisintegraal. Dus volgt dat

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\left(\int x\,dx\right) = 2\left(\frac{x^2}{2}+c\right) = x^2+2c, \text{ met } c \in \mathbb{R}.$$

Omdat zowel c als $2c$ willekeurige constanten voorstellen noteren we dit korter als:

$$\int 2x\,dx = 2\frac{x^2}{2}+c = x^2+c,\ c \in \mathbb{R}.$$

We veralgemenen vorig voorbeeld: Als F een primitieve functie is van f, dan is

$$2\int f(x)\,dx = 2(F(x)+c) = 2F(x)+2c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Omdat zowel c als $2c$ willekeurige constanten voorstellen noteren we dit verder korter als

$$2\int f(x)\,dx = 2F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Oefening 20.2.2. Bereken volgende onbepaalde integraal door splitsing:

1. $\int \left(3x^2+2x+\cos x+7^x\right)\,dx = \ldots\ldots$

Opmerking 20.2.2.

Als in de functie f meerdere letters voorkomen (bijvoorbeeld zowel de letter t als x), dan is steeds één letter de integratieveranderlijke, en beschouwen we de andere letter(s) als constanten of parameters. Welke letter de integratieveranderlijke is wordt aangeduid door het symbool dx of dt:

$$\int (tx^2)\,dx \neq \int (tx^2)\,dt.$$

Immers, $\int (tx^2)\,dx = t\int x^2\,dx = \frac{tx^3}{3}+c$ en $\int (tx^2)\,dt = x^2\int t\,dt = \frac{x^2t^2}{2}+c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Soms moet je een beetje creatief zijn om door splitsing een integraal te schrijven als een som van basisintegralen:

CC BY-NC-SA 4.0

20.2 Basisintegralen

Oefening 20.2.3. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int 1\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \ldots\ldots$

Waarschuwing 20.2.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

- De onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen WEL:

  som $\int (\cos x + x^2)\,dx = \int \cos x\,dx + \int x^2\,dx = \sin x + \frac{x^3}{3} + c$

  constante factor $\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = 3\,\frac{x^3}{3} + c = x^3 + c$

- Een onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen NIET:

  integraal van *product* ~~$\int \cos x \cdot x^2\,dx = \int \cos x\,dx \cdot \int x^2\,dx$~~

  integraal van *samenstelling* ~~$\int (\cos x)^2\,dx = \frac{(\cos x)^3}{3} + c$~~

  Er bestaan *geen algemene regels*, maar wel een aantal *technieken* die we verder zullen bespreken.

Oefening 20.2.4. Zijn volgende gelijkheden juist of fout? Verklaar.

1. Juist | Fout $\int (x \cdot x)\,dx \stackrel{?}{=} (\int xdx) \cdot (\int x\,dx)$
2. Juist | Fout $\int (2 \cdot x)\,dx \stackrel{?}{=} (\int 2dx) \cdot (\int x\,dx)$
3. Juist | Fout $\int (2 \cdot x)\,dx \stackrel{?}{=} 2 \cdot (\int x\,dx)$
4. Juist | Fout $\int x^2\,dx \stackrel{?}{=} (\int x\,dx)^2$

CC BY-NC-SA 4.0

20.2.A Oefeningen basisintegralen

20.2.A.1 Niveau 1

Oefening 20.2.5. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int \frac{3}{1+x^2}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a=3$ en $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{bgtan} x + c$ is een basisintegraal.

2. $\displaystyle\int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a=\frac{1}{2}$ en $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$ is een basisintegraal.

3. $\displaystyle\int 2^8 x\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a=2^8$ en $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$.

4. $\displaystyle\int 2y\,dy = \ldots\ldots$

Uitwerking: We hebben hier enkel de letter x vervangen door y.

5. $\displaystyle\int \cos y\,dy = \ldots\ldots$

Uitwerking: Want $(\sin y)' = \cos y$. Dit is een basisintegraal.

6. $\displaystyle\int \sin t\,dt = \ldots\ldots$

Uitwerking: Want $(\cos t)' = -\sin t$. Dit is een basisintegraal.

7. $\displaystyle\int \left(3x^2+2x+1\right)\,dx = \ldots\ldots$

20.2.A.2 Niveau 2

Oefening 20.2.6. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int ax\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Hier is a een constante en dus $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$.

2. $\displaystyle\int tx\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.2.A Oefeningen basisintegralen

Uitwerking: Hier is t is een constante.

3. $\int tx\ dt = \dots\dots$

Uitwerking: Hier is t de integratievariabele en x dus een constante.

Oefening 20.2.7. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\int x^3 \cdot \sqrt{x}\ dx = \dots\dots$

2. $\int \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + 21}{x^3}\ dx = \dots\dots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.3 Integratie door substitutie

We leggen in de voorbeelden die volgen integratie door substitutie telkens uit aan de hand van twee verschillende schrijfwijzes. De eerste schrijfwijze is eenvoudiger om toe te passen. Het volstaat dat je deze schrijfwijze kan gebruiken. Indien je echter gewoon bent om de tweede schrijfwijze te gebruiken, dan kan je deze telkens ook nalezen in de voorbeelden.

Voorbeeld 20.3.1. Berekening van de integraal $\int \cos 3x \, dx$.

We weten dat $\int \cos x \, dx = \sin x + c$, want $(\sin x)' = \cos x$. We stellen ons nu de vraag waaraan $\int \cos 3x \, dx$ gelijk is.

- Merk op dat we de 3 *niet* uit de cosinus kunnen halen, want $\cos 3x \neq 3 \cos x$.
- We kunnen ook niet gewoon x vervangen door $3x$ in $\int \cos x \, dx = \sin x + c$, want $\int \cos 3x \, dx \neq \sin 3x + c$. Volgens de kettingregel is de afgeleide van $\sin 3x$ immers gelijk aan $3 \cos 3x$, en dus niet gelijk aan $\cos 3x$.

Om deze onbepaalde integraal correct uit te rekenen gaan we niet x maar $3x$ als integratievariabele nemen, om over te gaan tot een basisintegraal. Dit wordt de substitutiemethode genoemd. In de eerste schrijfwijze wordt expliciet de substitutie $u = 3x$ uitgevoerd. In de tweede schrijfwijze wordt er geen nieuwe naam gegeven aan $3x$, maar wordt de integratievariabele achter de d herschreven, wat mogelijk is omdat $dx = \frac{1}{3} \, d(3x)$.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = 3x$, dan is $du = d(3x) = 3 \, dx$ (want $df = f'(x)dx$), dus $dx = \frac{1}{3} \, du$. Substitueer $u = 3x$ en $dx = \frac{1}{3} \, du$ in $\int \cos 3x \, dx$, dan vind je

$$\int \cos 3x \, dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{3} \, du = \frac{1}{3} \int \cos u \, du = \frac{1}{3} \sin u + c = \frac{1}{3} \sin 3x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Door het uitvoeren van deze substitutie hebben we $\int \cos 3x \, dx$ herschreven als de basisintegraal $\frac{1}{3} \int \cos u \, du$.

Schrijfwijze 2:

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x \, d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

We kunnen dit veralgemenen tot $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$, met $a \in \mathbb{R}_0$.

In het vorige voorbeeld hebben we een eenvoudige substitutie uitgevoerd van de vorm $u = ax$. In het volgende voorbeeld bekijken we een substitutie van de vorm $u = ax + b$.

Voorbeeld 20.3.2. Berekening van de integraal $\int (2x + 5)^7 \, dx$.

CC BY-NC-SA 4.0

20.3 Integratie door substitutie

De integraal $\int (2x+5)^7\,dx$ kan in principe berekend worden door de zevende macht uit te rekenen, ofwel met distributiviteit via $(2x+5)^7 = (2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)$, ofwel met het Binomium van Newton, en dan term per term te integreren. Dat kan, maar het is wel erg veel rekenwerk.

Je kan het uitwerken van de macht vermijden, door op te merken dat de integrand een beetje lijkt op de basisintegraal

$$\int x^7\,dx = \frac{x^8}{8} + c$$

Het is fout om in bovenstaande uitdrukking x gewoon te vervangen door $2x+5$, want $\int (2x+5)^7\,dx \neq \frac{(2x+5)^8}{8} + c$. Volgens de kettingregel is de afgeleide van $\frac{(2x+5)^8}{8}$ immers gelijk aan $2(2x+5)^7$, en dus niet gelijk aan $(2x+5)^7$.

Om rekening te houden met de kettingregel gaan we $u = 2x+5$ als integratievariabele nemen en voeren we deze substitutie uit als volgt:

Schrijfwijze 1:

Stel $u = 2x+5$, dan is $du = d(2x+5) = 2dx$, dus $dx = \frac{1}{2}du$. Dit substitueren we in $\int (2x+5)^7\,dx$:

$$\int (2x+5)^7\,dx = \int u^7\,\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^7\,du = \frac{1}{2}\frac{u^8}{8} + c = \frac{1}{16}(2x+5)^8 + c$$

Schrijfwijze 2:

$$\int (2x+5)^7\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+5)^7\,d(2x+5) = \frac{1}{2}\frac{(2x+5)^8}{8} + c = \frac{1}{16}(2x+5)^8 + c$$

De uitkomst is al direct ontbonden in factoren, dat is veel bondiger en duidelijker dan wanneer we de zevende macht hadden uitgerekend en de resulterende veelterm van graad 7 term per term hadden geïntegreerd. Als je ook zou geïnteresseerd zijn in nulpunten van de uitkomst is deze ontbinding in factoren zeker nuttig.

In volgende oefening kan je telkens de integraal berekenen met een eenvoudige substitutie van de vorm $u = ax$ of $u = ax + b$.

Oefening 20.3.1. Bereken volgende integralen:

1. $\int e^{2x}\,dx = \ldots\ldots$

2. $\int 2^{3x}\,dx = \ldots\ldots$

3. $\int \frac{4}{2x-3}\,dx = \ldots\ldots$

We kijken nu naar de algemene regel voor *integratie door substitutie*, die steunt op de *kettingregel voor afgeleiden*.

CC BY-NC-SA 4.0

20.3 Integratie door substitutie

Eigenschap 20.3.1 (Substitutieregel)**.**

Als in een integraal $\int h(x)\,dx$ de *integrand* $h(x)$ kan beschouwd worden als

een *product* (dus $h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$)

van een *samengestelde* functie (dus $h_1(x) = f(u(x))$)

met de *afgeleide* van de *binnenste* functie (dus $h_2(x) = u'(x)$),

dan kunnen we de integraal reduceren tot

de *integraal van de buitenste functie* (dus $\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$).

In een formule: voor reële, afleidbare functies f en u waarvoor $f \circ u$ bestaat geldt

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u(x))\,du(x) = \int f(u)\,du.$$

Het begrip 'substitutie' betekent 'vervanging' (denk aan het Frans: *substituer* of het Engels: *to substitute*) en duidt aan dat we de integratievariabele (vaak x) **vervangen** door een *nieuwe* 'variabele' (zeg u, die dus zelf een functie is van de *oorspronkelijke* variabele x: $u = u(x)$).

In een weliswaar tamelijk specifiek geval laat de substitutieregel dus toe om *een product in de integrand* weg te werken: namelijk op voorwaarde dat we het product kunnen beschouwen als het product van een samengestelde functie en van een afgeleide van de juiste functie (dus van de binnenste functie van de samenstelling). Dit proces is bovendien enkel zinvol als we vervolgens de resulterende integraal $\int f(u)\,du$ kunnen berekenen, bijvoorbeeld omdat het een basisintegraal is. We zullen ook voorbeelden tegenkomen waar de substitutieregel gebruikt wordt wanneer de integrand het quotiënt van 2 functies is. Een quotiënt kan je immers schrijven als een product: $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Om de substitutieregel in de praktijk te kunnen toepassen, is het erg belangrijk om enerzijds gemakkelijk samengestelde functies te kunnen herkennen, en bovendien ook gemakkelijk de afgeleiden van mogelijke *binnenste* functies te herkennen in de overblijvende factor.

Ter herhaling bestudeer je volgend voorbeeld:

Voorbeeld 20.3.3. Herken volgende uitdrukkingen als samenstellingen van twee functies:

1. $\sin x^2 = f(g(x))$ met $f(x) = \sin x$ en $g(x) = x^2$

2. $\sin^2 x = f(g(x))$ met $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sin x$

3. $(x+2)^2 = f(g(x))$ met $f(x) = x^2$ en $g(x) = x + 2$

4. $x^2 + 2 = f(g(x))$ met $f(x) = x + 2$ en $g(x) = x^2$

Merk op dat niet *alle* uitdrukkingen als samenstellingen moeten beschouwd worden:

(a) $\sin x \cos x$

(b) $x^2 \sin x$

(c) $\sin x + \cos x$

(d) $\cos^2 x + \sin^2 x$

zijn eerder *sommen* of *producten* dan samenstellingen.

Merk op dat (d) een ingewikkelde schrijfwijze is voor het getal 1.

CC BY-NC-SA 4.0

20.3 Integratie door substitutie

Volgend voorbeeld legt in detail de methode van substitutie uit:

Voorbeeld 20.3.4. Bereken $\int e^{x^2} 2x\, dx$.

Merk eerst op dat $e^{x^2} = e^{(x^2)}$ en $e^{x^2} \neq (e^x)^2 = e^{2x}$.

We herkennen de functie x^2 en haar afgeleide $2x$ in de integrand. Het ligt dus voor de hand de substitutie $u(x) = x^2$ te proberen, want van de functie $u(x)$ komen zowel de functie als de afgeleide voor in de formule van de substitutieregel. De enige mogelijkheid voor f is dan $f(u) = e^u$, want dan is $f(u(x)) = e^{x^2}$. We passen de substitutieregel toe:

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x\, dx &= \int f(u(x))u'(x)\, dx \\
&= \int f(u(x))\, d(u(x)) \\
&= \int f(u)\, du \\
&= \int e^u\, du \\
&= e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Het gebruik van de substitutieregel wordt meestal korter genoteerd. We beschrijven twee mogelijkheden, schrijfwijze 1 met een *expliciete* nieuwe variabele u, en een nog kortere schrijfwijze 2 waar de subsitutie *impliciet* blijft en er geen nieuwe variabele expliciet wordt opgeschreven.

Schrijfwijze 1:

We schrijven niet expliciet $u(x) = x^2$ zoals hierboven, maar noteren korter $u = x^2$. Dan is $du = dx^2 = 2x dx$.
Deze beide uitdrukkingen *substitueer* je in $\int e^{x^2} 2x\, dx$ en je vindt

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x\, dx &= \int e^u\, du && \text{(want } x^2 = u \text{ en } 2x\, dx = du\text{)} \\
&= e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(basisintegraal)} \\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(terug als functie van } x\text{).}
\end{aligned}$$

Schrijfwijze 2:

Je geeft de binnenste functie *geen expliciete naam*, maar brengt ze achter de differentiaal:

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x\, dx &= \int e^{x^2}\, dx^2 && \text{(want } dx^2 = 2x\, dx\text{)} \\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(want } \int e^u\, du = e^u\text{)}
\end{aligned}$$

Bestudeer ook volgende kleine variaties:

De integraal $\int e^{x^2} x\, dx$ kan je ook berekenen met substitutie:

CC BY-NC-SA 4.0

20.3 Integratie door substitutie

stel opnieuw $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x\,dx$. Hieruit haal je dat $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$.

Dit *substitueer* je in $\int e^{x^2} x\,dx$ en je vindt

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} x\,dx &= \int e^u\,\frac{1}{2}du && \text{(want } x^2 = u \text{ en } x\,dx = \tfrac{1}{2}\,du\text{)}\\
&= \frac{1}{2}\int e^u\,du && \text{(}\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\text{)}\\
&= \frac{1}{2}e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(basisintegraal)}\\
&= \frac{1}{2}e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(terug als functie van } x\text{)}
\end{aligned}$$

Op analoge wijze kan je ook $\int 3e^{x^2} x\,dx$ berekenen.

De integralen $\int e^{x^2}\,dx$ en $\int 2e^{x^2}\,dx$ kan je *niet* berekenen met substitutie.

Besluit: Omdat de afgeleide van x^2 gelijk is aan $2x$ is het nodig dat de factor x in de integrand voorkomt, anders kan je substitutie niet toegepassen, maar de constante factor mag willekeurig zijn.

We geven nog enkele voorbeelden van de substitutieregel.

Voorbeeld 20.3.5. Bereken $\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx$

Schrijfwijze 1:

Stel $u = x^3 + 5$, dan is $du = d(x^3+5) = 3x^2\,dx$. Dit *substitueren* we in $\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx$:

$$\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx = \int u^7\,du = \frac{u^8}{8} + c = \frac{(x^3+5)^8}{8} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx = \int (x^3+5)^7\,d(x^3+5) = \frac{(x^3+5)^8}{8} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Voorbeeld 20.3.6. Bereken $\int 2x\cos(x^2)\,dx$

Schrijfwijze 1:

Stel $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x\,dx$. Dit *substitueren* we in $\int 2x\cos(x^2)\,dx$:

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \cos(u)\,du = \sin(u) + c = \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \cos(x^2)\,dx^2 = \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

CC BY-NC-SA 4.0

20.3 Integratie door substitutie

Voorbeeld 20.3.7. Bereken $\int 2\sin x\cos x\,dx$

In het inleidend voorbeeld is er eigenlijk met de substitutie $u(x) = \sin^2(x)$ gewerkt. Bij sommige integralen, zoals deze, zijn er meerdere goede keuzes voor de functie $u(x)$. We kunnen hier ook $u(x) = \sin x$ of $u(x) = \cos x$ gebruiken. We geven al deze mogelijkheden als voorbeeld:

Schrijfwijze 1:

a) Kies $u = \sin x$, dan is $du = d\sin x = \cos x\,dx$, en vind je

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2u\,du = u^2 + c = (\sin x)^2 + c = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

b) Kies $u = \cos x$, dan is $du = d\cos x = -\sin x\,dx$, dus $\sin x\,dx = -du$, en vind je

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = -\int 2u\,du = -u^2 + c = -(\cos x)^2 + c = -\cos^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Merk op dat beide oplossingen aan elkaar gelijk zijn want $\sin^2 x + c = 1 - \cos^2 x + c = -\cos^2 x + c'$, met $c' = 1 + c$ een andere (willekeurige) constante.

c) Kies $u = \sin^2 x$, dan is $du = d\sin^2 x = 2\sin\cos x\,dx$, en vind je

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \int du = u + c = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

a) Schrijf met $d\sin x$: $\int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2\sin x\,d\sin x = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

b) Schrijf met $d\cos x$: $\int 2\sin x\cos x\,dx = -\int 2\cos x\,d\cos x = -\cos^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

c) Schrijf met $d\sin^2 x$: $\int 2\sin x\cos x\,dx = \int d\sin^2 x = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Volgende voorbeelden berekenen enkele integralen die in sommige boeken en cursussen in de lijst van basisintegralen staan. We hebben er hier voor gekozen om te werken met een eenvoudige lijst basisintegralen, omdat onderstaande integralen met de substitutieregel gemakkelijk berekend kunnen worden.

Voorbeeld 20.3.8. Bereken volgende integralen (met $a \in \mathbb{R}_0$)

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{bgsin}\frac{x}{a} + c$ met $a > 0$

Deze integraal lijkt op de basisintegraal $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$. Ditmaal is niet de integratievariabele x vermenigvuldigd met een constante factor, maar is de constante 1 gewijzigd in de constante a^2. Toch willen we overgaan naar deze basisintegraal door de substitutieregel te gebruiken. Hiervoor moeten we de integraal eerst herschrijven zodat onder de wortel terug de constante 1 staat in plaats van a^2. Als $a > 0$ geldt dat $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}\,dx$$

CC BY-NC-SA 4.0

20.3 Integratie door substitutie

Zo blijkt dat we de substitutie $u = \frac{x}{a}$ kunnen proberen om de integraal verder uit te rekenen.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = \frac{x}{a}$, dan is $du = \frac{1}{a}\,dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \operatorname{bgsin} u + c = \operatorname{bgsin} \frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,d\frac{x}{a} = \operatorname{bgsin} \frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan} \frac{x}{a} + c$

Deze integraal lijkt op de basisintegraal $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$. De constante 1 is gewijzigd in de constante a^2. Toch willen we overgaan naar deze basisintegraal door de substitutieregel te gebruiken. Hiervoor moeten we de integraal eerst herschrijven zodat er terug de constante 1 staat in plaats van a^2:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx$$

Zo blijkt dat we de substitutie $u = \frac{x}{a}$ kunnen proberen om de integraal verder uit te rekenen.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = \frac{x}{a}$, dan is $du = \frac{1}{a}\,dx$, dus $dx = a\,du$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx &= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx \\ &= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+u^2} \cdot a\,du \\ &= \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan} u + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan} \frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,d\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan} \frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c$

Deze integraal kan berekend worden met substitutie, maar het vinden van de substitutie is niet voor de hand liggend. Daarom wordt deze integraal soms tot de basisintegralen gerekend.

CC BY-NC-SA 4.0

20.3 Integratie door substitutie

Schrijfwijze 1:

Stel $u = x + \sqrt{x^2+a}$, dan is $du = (1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}})\,dx = \dfrac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$.

Bijgevolg is $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \dfrac{1}{u}\,du$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Schrijfwijze 2: wegens de complexe formule voor u werkt de tweede schrijfwijze hier niet.

(d) $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$

Het enige startpunt om $\displaystyle\int \tan x\,dx$ te kunnen berekenen lijkt het toepassen van de definitie:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

Twee kandidaat substituties zijn dan $u(x) = \sin x$ en $u(x) = \cos x$. Nemen we $u(x) = \sin x$, dan is $du = \cos x\,dx$. In de teller staat echter $\sin x\,dx$. Daarom kiezen we voor $u(x) = \cos x$:

Schrijfwijze 1:
Stel $u = \cos x$, dan is $du = d\cos x = -\sin x\,dx$, dus $\sin x\,dx = -du$.
Dit *substitueren* we in $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{\cos x}\,d\cos x = -\ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Merk op dat we de substitutieregel $\displaystyle\int f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$ hebben toegepast met $f(u) = \dfrac{1}{u}$. Dan wordt de substitutieregel $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du$. Dit is een voorbeeld waar de substitutieregel gebruikt wordt om de integraal van een quotiënt van 2 functies te berekenen.

Wanneer en welke substitutie moet uitgevoerd worden is niet altijd even duidelijk. Hier geldt de regel "Oefening baart kunst". Volgende oefeningen behandelen enkele typische situaties.

Oefening 20.3.2.

1. $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\int (x^2+2)\sqrt{x-2}\,dx = \ldots\ldots$

We geven nog een wat merkwaardig voorbeeld van substitutie. Dit type integraal is ook belangrijk bij het berekenen van integralen van rationale functies, wat we hier niet verder behandelen.

CC BY-NC-SA 4.0

20.3 Integratie door substitutie

Voorbeeld 20.3.9. Bereken $\int \frac{1}{p\,x^2+q\,x+r}\,dx$ met $D = q^2 - 4pr < 0$.

De discriminant van de noemer is $D = q^2 - 4pr < 0$. We eisen dat deze discriminant negatief is zodat de noemer nergens nul wordt en de integrand bijgevolg overal gedefinieerd is.

Deze integraal kan door substitutie worden herleid tot de basisintegraal $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{bgtan} u + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Herschrijf hiervoor $p\,x^2 + q\,x + r$ als $a(1+u^2)$.

We illustreren dit met een concreet voorbeeld:

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 8}\,dx$$

De discriminant van de noemer is $16 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -16 < 0$.

$$x^2 - 4x + 8 = x^2 - 4x + 4 + 4 = (x-2)^2 + 4 = 4\left(\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 1\right)$$

Stel $u = \frac{x-2}{2}$, dan is $du = \frac{1}{2}\,dx$ zodat

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 8}\,dx = \int \frac{1}{4(u^2+1)} \cdot 2du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\operatorname{bgtan}\frac{x-2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Opmerking 20.3.1. Integralen van het type $\int \frac{1}{p\,x^2+q\,x+r}\,dx$:

- met $D = q^2 - 4pr < 0$: zie bovenstaand voorbeeld
- met $D = q^2 - 4pr = 0$: noemer ontbinden in 2 identieke factoren en verder uitrekenen met substitutie
- met $D = q^2 - 4pr > 0$: noemer ontbinden in 2 verschillende factoren en splitsing in partieelbreuken. De methode van splitsen in partieelbreuken behandelen we hier niet.

CC BY-NC-SA 4.0

20.3.A Oefeningen substitutie

20.3.A.1 Niveau 1

Oefening 20.3.3. Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int \frac{1}{3-x}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{x}{3-x}\,dx = \ldots\ldots$

20.3.A.2 Niveau 2

Oefening 20.3.4. Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\int (3x+5)\sqrt{3x+4}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int 4x\sqrt{x-1}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \cos x \sin^2 x\,dx = \ldots\ldots$
4. $\int \cos 2x \sin^3 2x\,dx = \ldots\ldots$
5. $\int \frac{3\tan 2x}{5\cos^2 2x}\,dx = \ldots\ldots$
6. $\int \frac{\sin x \cos x}{2-\cos x}\,dx = \ldots\ldots$
7. $\int \frac{1}{2x^2+1}\,dx = \ldots\ldots$
8. $\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \ldots\ldots$
9. $\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \ldots\ldots$
10. $\int \frac{3t}{1+t^2}\,dt = \ldots\ldots$
11. $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \ldots\ldots$
12. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \ldots\ldots$
13. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.3.A Oefeningen substitutie

14. $\displaystyle\int \frac{2R}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dR = \ldots\ldots$

15. $\displaystyle\int \frac{R^3}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dR = \ldots\ldots$

20.3.A.3 Niveau 3

Oefening 20.3.5. Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,dt = \ldots\ldots$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx = \ldots\ldots$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \ldots\ldots$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+2x^2+2}\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.4 Partiële integratie

De *productregel voor afgeleiden* leidt tot de interessante methode van '*partiële integratie*'.

Volgend inleidend voorbeeld berekent de integraal van een speciaal gekozen product:

Voorbeeld 20.4.1. Berekening van de integraal $\int xe^x\,dx$.

De productregel voor afgeleiden toepassen op het product $x \cdot e^x$ geeft

$$\begin{aligned} d(x \cdot e^x) &= (dx) \cdot e^x + x(de^x) \\ &= e^x dx + xe^x dx \end{aligned}$$

en de gelijkheid $d(x \cdot e^x) = e^x dx + xe^x dx$ integreren levert

$$\int d(x \cdot e^x) = \int e^x dx + \int xe^x dx.$$

De eerste twee integralen zijn direct te berekenen en wat overblijft is de gezochte integraal:

$$xe^x + c = e^x + \int xe^x dx$$

en bijgevolg is

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$$

We hebben dus - met wat geluk weliswaar - de integraal $\int xe^x\,dx$ uitgerekend.

De techniek van partiële integratie veralgemeent dit voorbeeld.

De regel voor partiële integratie volgt onmiddellijk uit de regel voor de afgeleide van het product van twee functies f en u.

$$(f(x) \cdot u(x))' = f'(x) \cdot u(x) + f(x) \cdot u'(x)$$

Inderdaad, als we beide leden integreren krijgen we

$$\int (f(x) \cdot u(x))'\,dx = \int f'(x) \cdot u(x)\,dx + \int f(x) \cdot u'(x)\,dx.$$

Na termen van lid veranderen krijgen we

$$\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = \int (f(x) \cdot u(x))'\,dx - \int f'(x) \cdot u(x)\,dx.$$

Omdat $\int (f(x) \cdot u(x))'\,dx = f(x) \cdot u(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$ wordt dit

$$\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = f(x) \cdot u(x) - \int f'(x) \cdot u(x)\,dx.$$

Dit is de formule voor partiële integratie, zo genoemd omdat de integraal $\int f(x) \cdot u'(x)\,dx$ gedeeltelijk, dus partieel, is geïntegreerd: we hebben al een deel van de primitieve functie, namelijk $f(x) \cdot u(x)$, en er blijft nog een ander - hopelijk eenvoudiger te berekenen - deel over, namelijk $\int f'(x) \cdot u(x)\,dx$. We hebben $f(x) \cdot u(x)$ genoteerd en niet $f(x) \cdot u(x) + c$, omdat het resultaat van de berekening van de tweede term van het rechterlid, $\int f'(x) \cdot u(x)\,dx$, ook slechts op een constante na bepaald is.

CC BY-NC-SA 4.0

20.4 Partiële integratie

Eigenschap 20.4.1 (Partiële integratie).

Als in een integraal $\int h(x)\,dx$ de *integrand* $h(x)$ kan beschouwd worden als

een *product* (dus $h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$)

van een functie $f(x)$ (dus $h_1(x) = f(x)$)

en van de *afgeleide* van een functie $u(x)$ (dus $h_2(x) = u'(x)$),

dan kunnen we de integraal schrijven als

$$\int f(x)u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx.$$

Dus voor reële, afleidbare functies f en u geldt

$$\boxed{\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx},$$

of korter genoteerd:

$$\int f \cdot u'\,dx = f \cdot u - \int f' \cdot u\,dx,$$

of met differentialen genoteerd:

$$\boxed{\int f\,du = f \cdot u - \int u\,df}.$$

In oefeningen wordt dikwijls $\overset{P.I.}{=}$ geschreven om het gebruik van partiële integratie aan te duiden.

Men schrijft de regel voor partiële integratie dikwijls met functies f en g (in plaats van f en u zoals hierboven):

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

of met functies u en v:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du.$$

We hebben de eigenschap geformuleerd met f en u omwille van de parallel met de substitutieregel

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u(x))du(x) = \int f(u)du \qquad \text{(substitutie)},$$

waar de rol van f en u minder symmetrisch is. Voor partiële integratie is de rol van beide factoren wel symmetrisch, en is de notatie met f en g, ofwel u en v ook gebruikelijk. Het is belangrijk dat je met elke versie van deze formules kan werken, onafhankelijk van de letters die gebruikt worden.

Voorbeeld 20.4.2. Bereken $\int xe^x\,dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx$

CC BY-NC-SA 4.0

20.4 Partiële integratie

Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = e^x$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u'(x)}\, dx,$$

dan is $f'(x) = 1$ en $u(x)$ kunnen we vinden door $u'(x)$ te integreren: $u(x) = \int u'(x)\, dx = \int e^x\, dx = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.
Er zijn dus oneindig veel mogelijke functies u, maar we nemen deze met $c = 0$.
Partiële integratie geeft dan

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u'(x)}\, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u(x)}\, dx = xe^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f\, du = f \cdot u - \int u\, df$

  Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\, dx = e^x\, dx$. Dan geldt

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x\, dx}_{du} = \int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{d(e^x)}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u(x)} - \int \underbrace{e^x}_{u(x)} \underbrace{dx}_{df}$$
$$= xe^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

De keuze van f en u ligt niet vast. Stel dat we hier een andere keuze hadden gemaakt voor f en u, namelijk $f(x) = e^x$ en $u'(x) = x$. Dan is $f'(x) = e^x$ en $u(x) = \frac{x^2}{2}$. Partiële integratie geeft dan

$$\int xe^x\, dx \overset{P.I.}{=} e^x\, \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 e^x\, dx.$$

In de tweede integraal is de macht van x *verhoogd* van 1 naar 2. Dus de x in de eerste integraal wordt een x^2 in de tweede integraal. Met deze keuze van f en u wordt de nieuwe integraal *nog ingewikkelder dan de oorspronkelijke*. Hoewel de gelijkheid correct is, helpt ze niet. *Een goede keuze* voor f en u is dus erg belangrijk.

Voorbeeld 20.4.3. Bereken $\int x \sin x\, dx$.

- **Schrijfwijze 1**: $\int f(x) \cdot u'(x)\, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\, dx$

  Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = \sin x$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{u'(x)}\, dx,$$

  dan is $f'(x) = 1$ en $u(x)$ kunnen we vinden door $u'(x)$ te integreren: $u(x) = \int u'(x)\, dx = \int \sin x\, dx = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.
  We kiezen de primitieve functie met $c = 0$. Partiële integratie geeft dan

CC BY-NC-SA 4.0

20.4 Partiële integratie

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{u'(x)}\, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)}\, dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2**: $\int f\, du = f \cdot u - \int u\, df$

  Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\, dx = \sin x\, dx$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x\, dx}_{du} = \int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{d(-\cos x)}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} \underbrace{dx}_{df}$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

In de volgende oefeningen moet je partiële integratie combineren met een eenvoudige substitutie.

Oefening 20.4.1.

1. $\int xe^{2x}\, dx = \ldots\ldots$
2. $\int xe^{-3x}\, dx = \ldots\ldots$

We hebben in de voorbeelden en oefeningen tot nu toe telkens het product van de veelterm x met een exponentiële of goniometrische functie geïntegreerd. Wanneer deze veelterm van een hogere graad is moeten we herhaaldelijk partieel integreren om tot de oplossing te komen. Bij elke stap daalt de graad van de veelterm met één.

Voorbeeld 20.4.4. Bereken $\int 4x^2e^{2x}dx$.

Om deze integraal te berekenen moet je *meerdere keren partieel integreren*. De methode wordt uitgelegd in onderstaand filmpje, en ook bij het volgende voorbeeld. YouTube link: https://www.youtube.com/embed/c450HbCytQE

Voorbeeld 20.4.5. Bereken $\int (2x^2 - 4x)e^{2x}\, dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x) \cdot u'(x)\, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\, dx$

  Stel $f(x) = 2x^2 - 4x$ en $u'(x) = e^{2x}$, dan is $f'(x) = 4x - 4$ en $u(x) = \int u'(x)\, dx = \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

  Partiële integratie geeft dan

CC BY-NC-SA 4.0

20.4 Partiële integratie

$$\int \underbrace{(2x^2-4x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{u'(x)}\,dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{(2x^2-4x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)} - \int \underbrace{(4x-4)}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)}\,dx$$
$$= (x^2-2x)\,e^{2x} - \int (2x-2)e^{2x}\,dx$$

We passen nogmaals partiële integratie toe. Ditmaal stellen we $f(x)=2x-2$ en $u'(x)=e^{2x}$, dan is $f'(x)=2$ en $u(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$.

$$(x^2-2x)\,e^{2x} - \int \underbrace{(2x-2)}_{f(x)}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{u'(x)}\,dx$$
$$\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)\,e^{2x} - \left(\underbrace{(2x-2)}_{f(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)} - \int \underbrace{2}_{f'(x)}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)}\,dx\right)$$
$$= (x^2-2x)\,e^{2x} - (x-1)\,e^{2x} + \int e^{2x}\,dx$$
$$= (x^2-2x)\,e^{2x} - (x-1)\,e^{2x} + \frac{1}{2}\,e^{2x} + c$$
$$= (x^2-2x-x+1+\frac{1}{2})\,e^{2x} + c$$
$$= (x^2-3x+\frac{3}{2})\,e^{2x} + c, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f\,du = f\cdot u - \int u\,df$

$$\begin{aligned}
\int (2x^2-4x)e^{2x}\,dx &= \int (x^2-2x)\,de^{2x} \\
&\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)e^{2x} - \int e^{2x}(2x-2)\,dx \\
&= (x^2-2x)\,e^{2x} - \int (x-1)\,de^{2x} \\
&\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)\,e^{2x} - \left[(x-1)\,e^{2x} - \int e^{2x}\,dx\right] \\
&= (x^2-2x)\,e^{2x} - (x-1)\,e^{2x} + \frac{1}{2}\,e^{2x} + c \\
&= (x^2-2x-x+1+\frac{1}{2})\,e^{2x} + c \\
&= (x^2-3x+\frac{3}{2})\,e^{2x} + c, \qquad c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Als de integrand het product is van een veelterm en een andere functie zoals een sinus, cosinus of exponentiële functie, kiezen we voor $f(x)$ de veelterm. Door partiële integratie toe te passen daalt dan immers de graad van de veelterm. In het volgende voorbeeld, het product van een veelterm met $\ln x$, doen we het andersom, omdat we $\ln x$ eenvoudig kunnen afleiden, maar nog niet integreren. Hoe we $\ln x$ kunnen integreren is één van de volgende voorbeelden.

CC BY-NC-SA 4.0

20.4 Partiële integratie

Voorbeeld 20.4.6. Bereken $\int 9x^2 \ln x \, dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x) \cdot u'(x) \, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x) \, dx$

  Stel $f(x) = \ln x$ en $u'(x) = 9x^2$

  $$\int \underbrace{9x^2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} \, dx,$$

  dan is $f'(x) = 1/x$ en $u(x) = \int u'(x) \, dx = \int 9x^2 \, dx = 3x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

  Partiële integratie geeft dan

  $$\int \underbrace{9x^2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} \, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{3x^3}_{u(x)} - \int \underbrace{1/x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{3x^3}_{u(x)} \, dx$$
  $$= 3x^3 \ln x - \int 3x^2 \, dx = 3x^3 \ln x - x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f \, du = f \cdot u - \int u \, df$

  Stel $f(x) = \ln x$ en $du = u'(x) \, dx = 9x^2 \, dx$

  $$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{9x^2 \, dx}_{du} = \int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \underbrace{d(3x^3)}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{3x^3}_{u(x)} - \int \underbrace{3x^3}_{u(x)} \underbrace{d(\ln x)}_{df}$$
  $$= 3x^3 \ln x - \int \frac{3x^3}{x} \, dx = 3x^3 \ln x - x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Om partiële integratie te kunnen toepassen moet de integrand het product zijn van 2 functies. Maar ook als de integrand bestaat uit slechts 1 functie kunnen we partiële integratie toepassen door deze functie te vermenigvuldigen met 1.

Voorbeeld 20.4.7. Bereken $\int \ln x \, dx$.

Om partiële integratie te kunnen toepassen beschouwen we $\ln x$ als een product $\ln x \cdot 1$.

- Schrijfwijze 1: $\int f(x) \cdot u'(x) \, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x) \, dx$

  Stel $f(x) = \ln x$ en $u'(x) = 1$, dan is $f'(x) = 1/x$ en $u(x) = \int u'(x) \, dx = \int 1 \, dx = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

  Partiële integratie geeft dan

  $$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{u'(x)} \, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{u(x)} - \int \underbrace{1/x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{u(x)} \, dx$$
  $$= x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

20.4 Partiële integratie

- Schrijfwijze 2: $\int f\,du = f\cdot u - \int u\,df$

$$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)}\underbrace{dx}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)}\cdot\underbrace{x}_{u(x)} - \int \underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{d\ln x}_{df} = x\ln x - \int \frac{x}{x}\,dx$$
$$= x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Soms bekom je na (herhaald) partieel integreren opnieuw de *oorspronkelijke* integraal. Onderstaand voorbeeld legt uit welke techniek je dan kan toepassen.

Voorbeeld 20.4.8. Bereken $\int \sin x\, e^x\,dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x)\cdot u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx$

  We stellen $I = \int \sin x\, e^x\,dx$ voor de verdere berekening. Welke keuze we maken voor $f(x)$ en $u'(x)$ is niet zo belangrijk in deze oefening. We maken de keuze $f(x)=\sin x$ en $u'(x)=e^x$, dan is $f'(x)=\cos x$ en $u(x)=e^x$. Maak deze oefening opnieuw met de andere keuze.

$$I = \int \sin x\cdot e^x\,dx = \sin x\cdot e^x - \int \cos x\cdot e^x\,dx$$

  We passen nogmaals partiële integratie toe. Ditmaal stellen we $f(x)=\cos x$ en $u'(x)=e^x$, dan is $f'(x)=-\sin x$ en $u(x)=e^x$.

$$I = \sin x\cdot e^x - \left(\cos x\cdot e^x - \int(-\sin x)\cdot e^x\,dx\right) = (\sin x - \cos x)e^x - \int \sin x\cdot e^x\,dx$$

  In het rechterlid staat nu terug de oorspronkelijke integraal I.

$$I = (\sin x - \cos x)e^x - I$$

  We brengen I naar het linkerlid en bekomen:

$$2\,I = e^x\,(\sin x - \cos x) + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

  Dus

$$I = \frac{1}{2}\,e^x\,(\sin x - \cos x) + c_1, \quad c_1\in\mathbb{R}\ (\text{Stel } c_1 = c/2).$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f\,du = f\cdot u - \int u\,df$

  Hier hebben we de andere keuze gemaakt: we stellen $f(x)=e^x$ en $du = u'(x)\,dx = \sin x\,dx$

$$\begin{aligned} I = \int \sin x\, e^x\,dx &= -\int e^x\,d\cos x \\ &\overset{P.I.}{=} -e^x\cos x + \int \cos x\,de^x \\ &= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx \\ &= -e^x\cos x + \int e^x\,d\sin x \\ &\overset{P.I.}{=} -e^x\cos x + e^x\sin x - \int \sin x\,de^x \\ &= -e^x\cos x + e^x\sin x - \underbrace{\int \sin x\, e^x\,dx}_{I}. \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

20.4 Partiële integratie

We brengen I naar het linkerlid en bekomen:

$$2\ I = e^x\ (\sin x - \cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dus

$$I = \frac{1}{2}\ e^x\ (\sin x - \cos x) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}\ (\text{Stel } c_1 = c/2).$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/23H.2)

20.4.A Oefeningen partiële integratie

20.4.A.1 Niveau 2

Oefening 20.4.2. Bereken volgende onbepaalde integralen via partiële integratie:

1. $\int \left(3x + x^2\right) e^x \, dx = \ldots\ldots$
2. $\int \operatorname{bgtan} x \, dx = \ldots\ldots$
3. $\int \operatorname{bgsin} \theta \, d\theta = \ldots\ldots$
4. $\int \ln \sqrt{x} \, dx = \ldots\ldots$
5. $\int e^x \cos 3x \, dx = \ldots\ldots$
6. $\int \frac{\ln t}{t^2} \, dt = \ldots\ldots$

Oefening 20.4.3.

1. Bereken $\int \operatorname{bgtan} 5x \, dx$.

Meerkeuze:

(a) $x \operatorname{bgtan} 5x - \frac{1}{10} \ln|1 + 25x^2| + c$

(b) $x \operatorname{bgtan} 5x - \frac{1}{12} \ln|1 + 25x^2| + c$

(c) $x \operatorname{bgtan} 5x - \frac{1}{14} \ln|1 + 25x^2| + c$

(d) $x \operatorname{bgtan} 5x + \frac{1}{10} \ln|1 + 25x^2| + c$

(e) $x \operatorname{bgtan} 5x + \frac{1}{12} \ln|1 + 25x^2| + c$

(f) $x \operatorname{bgtan} 5x + \frac{1}{14} \ln|1 + 25x^2| + c$

2. Bereken $\int e^{3x} \cos 5x \, dx$.

Meerkeuze:

(a) $\frac{e^{3x}(2\cos 5x + 5\sin 5x)}{29} + c$

(b) $\frac{e^{3x}(3\cos 5x + 5\sin 5x)}{34} + c$

(c) $\frac{e^{3x}(\cos 5x + 3\sin 5x)}{20} + c$

(d) $\frac{e^{3x}(\cos 5x + 2\sin 5x)}{15} + c$

(e) $\frac{e^{3x}(2\cos 5x + 7\sin 5x)}{53} + c$

(f) $\frac{e^{3x}(3\cos 5x + 7\sin 5x)}{58} + c$

Bron: https://github.com/ptgressman/math104 (MIT License Copyright (c) 2019 Philip Gressman)

CC BY-NC-SA 4.0

20.5 Andere integratietechnieken

Je moet niet steeds ofwel de substitutieregel ofwel partiële integratie toepassen om een integraal uit te rekenen. Om integralen uit te rekenen van goniometrische functies kan het soms nuttig zijn om eerst een goniometrische formule toe te passen om zo van een product van functies over te gaan op een som. We herhalen hiervoor enkele goniometrische formules:

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\
2\sin\alpha\cos\beta &= \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \\
2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \\
-2\sin\alpha\sin\beta &= \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

Uit bovenstaande formules volgt ook dat

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha &= \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \\
\sin^2\alpha &= \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)
\end{aligned}$$

Met deze formules kunnen we sommige integralen herschrijven tot basisintegralen of integralen die verder uit te rekenen zijn met andere integratietechnieken.

Oefening 20.5.1.

1. $\displaystyle\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos x)\,dx = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\int \sin x \sin 3x\,dx = \int \frac{1}{2}(\cos(-2x) - \cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x)\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.5.A Herhalingsoefeningen onbepaalde integralen

20.5.A.1 Niveau 2

Oefening 20.5.2. Bereken volgende onbepaalde integralen

1. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int \frac{2x^2+3}{2x^2+1}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{\ln x}{x\ln x - x}\,dx = \ldots\ldots$
4. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \ldots\ldots$
5. $\int x\ \mathrm{bgtan}\, x\,dx = \ldots\ldots$
6. $\int \frac{1}{5^{2x}}\,dx = \ldots\ldots$
7. $\int e^{-x}\cos 3x\,dx = \ldots\ldots$
8. $\int (\ln x)^3\,dx = \ldots\ldots$
9. $\int \sin 2x\cdot\sin 4x\,dx = \ldots\ldots$
10. $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \ldots\ldots$
11. $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = \ldots\ldots$
12. $\int x(1+x)^{3/2}\,dx = \ldots\ldots$
13. $\int \sin^2 x\,dx = \ldots\ldots$

Oefening 20.5.3. Bereken volgende onbepaalde integralen

1. $\int \frac{e^x}{5(e^x-1)}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int \frac{3x}{(x^2-1)^{3/2}}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int e^{-2t}\sin t\,dt = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.5.A Herhalingsoefeningen onbepaalde integralen

20.5.A.2 Niveau 3

Oefening 20.5.4. Bereken volgende onbepaalde integralen

1. $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int x^3 e^{x^2}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \sin(\ln x)\,dx = \ldots\ldots$

Oefening 20.5.5. Bereken volgende onbepaalde integralen

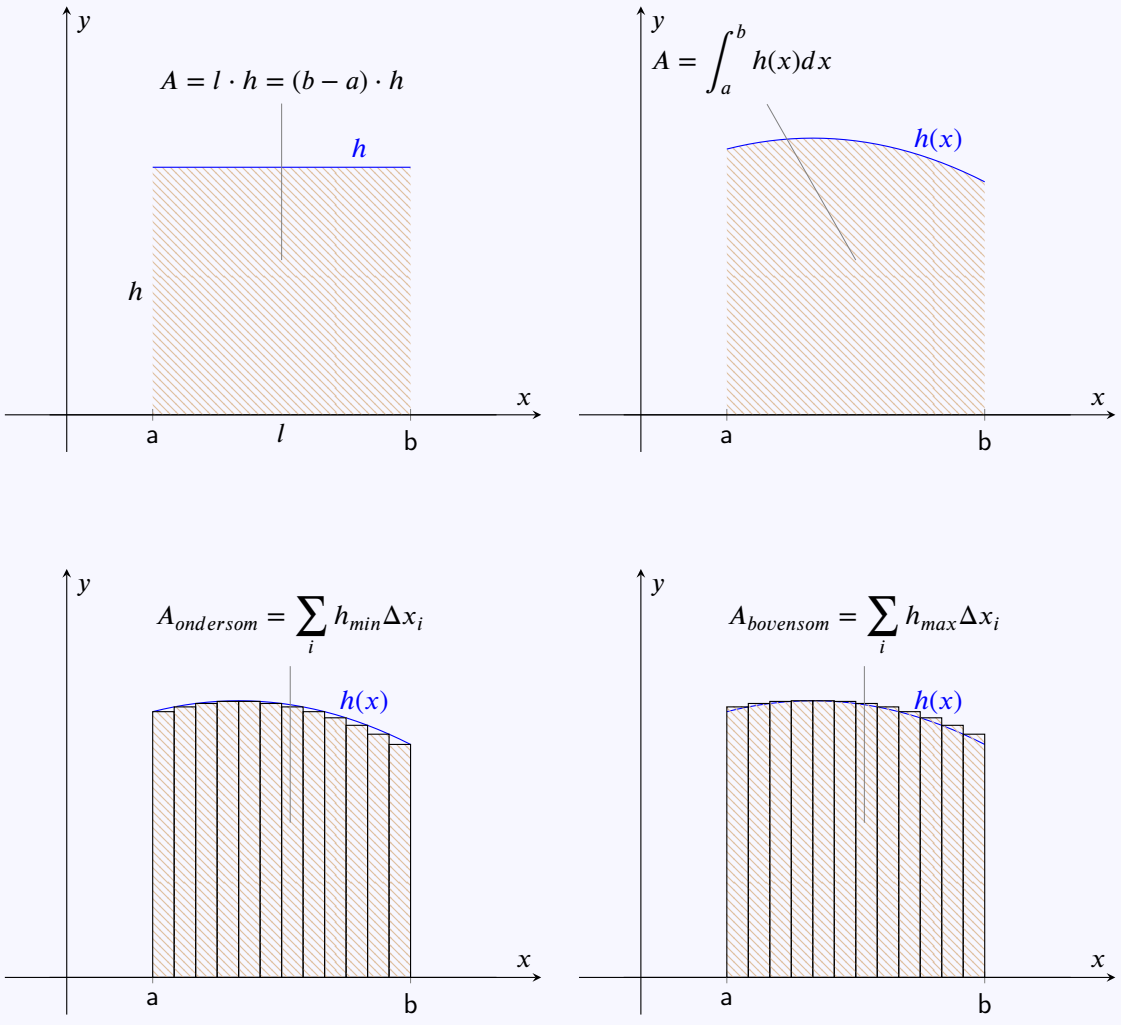
1. $\int \frac{2x^2-3x+1}{2x^2+1}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int \frac{4}{x^2-4x+4}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{3t+1}{1+t^2}\,dt = \ldots\ldots$
4. $\int \frac{1}{x^2-4x+7}\,dx = \ldots\ldots$
5. $\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx = \ldots\ldots$
6. $\int \frac{3x+3}{x^2+2x+1}\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.6 Bepaalde integralen

20.6.1 Definitie bepaalde integraal

Voorbeeld 20.6.1 (Oppervlakte)**.** Voor een rechthoek met lengte l en hoogte h kent iedereen de formule voor de oppervlakte: $A = l \cdot h$. De bepaalde integraal is in zekere zin een veralgemening van deze formule, waarbij de bovenzijde van de rechthoek niet meer 'recht' is, maar ook een kromme kan zijn. We kunnen dan niet meer vermenigvuldigen met de vaste hoogte h, maar we moeten vermenigvuldigen met een 'variërende hoogte' $h(x)$. De notatie en de berekening daarvan gaat via de zogenaamde *bepaalde integraal*, die kan worden gedefinieerd als een limiet van een som van kleine rechthoekjes.



We geven kort de meetkundige (pseudo-)definitie van een bepaalde integraal:

Definitie 20.6.1 (Bepaalde integraal)**.**

Zij f een continue, *positieve* functie op een interval $[a, b]$.

20.6 Bepaalde integralen

De **bepaalde integraal** van f over het interval $[a,b]$, genoteerd als

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

is per definitie gelijk aan de *oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x=a$ en $x=b$.

We noemen a en b de **integratiegrenzen** en $[a,b]$ het **integratie-interval**, en we **integreren over** dat interval.

20.6.2 Verband met de onbepaalde integraal

Volgende belangrijke stelling zegt dat we de bepaalde integraal (dus een oppervlakte, of meer algemeen een oneindige-som-van-oneindig-kleine-dingen) kunnen berekenen met behulp van de onbepaalde integraal.

Eigenschap 20.6.1 (Verband tussen bepaalde en onbepaalde integralen)**.**

Zij f een continue functie op een interval $[a,b]$ en F een primitieve functie van f (dus $\int f(x)\,dx = F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$). Dan geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b)-F(a) \qquad \overset{\text{notatie}}{=} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Deze formule laat toe om het berekenen van een *bepaalde* integraal te reduceren tot het berekenen van de *onbepaalde* integraal, en dan de integratiegrenzen in te vullen.

Merk op dat het hierbij geen probleem is dat een primitieve functie slechts op een constante na bepaald is:

$$\big(F(b)+c\big)-\big(F(a)+c\big)=F(b)-F(a).$$

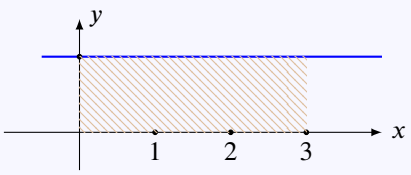
Elke primitieve functie F van f is dus geschikt om de bepaalde integraal uit te rekenen.

Hierbij is $\Big[F(x)\Big]_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b)-F(a)$ een handige notatie. Soms gebruikt men ook $F(x)\Big|_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b)-F(a)$.

Voorbeeld 20.6.2. Eenvoudige bepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int_0^3 1\,dx = \Big[x\Big]_0^3 = 3-0=3$

De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de rechte $y=1$ (dit is de grafiek van $f(x)=1$), de x-as en de verticale rechten $x=0$ en $x=3$.

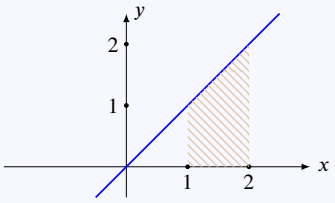


2. $\displaystyle\int_1^2 x\,dx = \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_1^2 = \frac{1}{2}(2^2-1^2)=\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{2}$

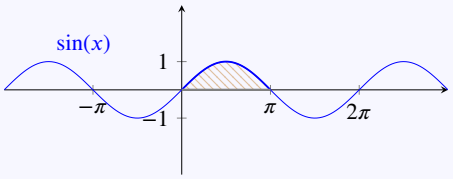
De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de rechte $y=x$ (dit is de grafiek van $f(x)=x$), de x-as en de verticale rechten $x=1$ en $x=2$.

CC BY-NC-SA 4.0

20.6 Bepaalde integralen



3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$



Uit de formule $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$ volgen onmiddellijk de basiseigenschappen:

Eigenschap 20.6.2.

Zij F en G functies gedefinieerd op een interval $[a,b]$, $c \in [a,b]$ en $k,l \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\begin{aligned}
\big[F(x)\big]_a^a &= F(a) - F(a) = 0 \\
\big[kF(x)\big]_a^b &= k\big[F(x)\big]_a^b \\
\big[F(x) + G(x)\big]_a^b &= \big[F(x)\big]_a^b + \big[G(x)\big]_a^b \\
\big[kF(x) + lG(x)\big]_a^b &= k\big[F(x)\big]_a^b + l\big[G(x)\big]_a^b \\
\big[F(x)\big]_b^a &= -\big[F(x)\big]_a^b = \big[-F(x)\big]_a^b \\
\big[F(x)\big]_a^b &= \big[F(x)\big]_a^c + \big[F(x)\big]_c^b
\end{aligned}$$

Uit deze eigenschappen van het symbool $\big[F(x)\big]_a^b$ volgt dan onmiddellijk:

Eigenschap 20.6.3 (Eigenschappen van de bepaalde integraal)**.**

Zij f een functie gedefinieerd op $[a,b]$ en $c \in [a,b]$. Dan is

$$\begin{aligned}
\int_a^a f(t)\,dt &= 0 && \text{(integreren over een leeg interval)} \\
\int_b^a f(t)\,dt &= -\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b (-f(t))\,dt && \text{(integreren in omgekeerde richting)} \\
\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt && \text{(integratie-interval opsplitsen)}
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

20.6 Bepaalde integralen

Voorbeeld 20.6.3.

1. $\int_4^8 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^8 = \frac{1}{2}(8^2-4^2) = \frac{1}{2}(64-16) = 24$

2. $\int_8^4 x\,dx = -\int_4^8 x\,dx = -24,$

of anders berekend $\int_8^4 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_8^4 = \frac{1}{2}(4^2-8^2) = \frac{1}{2}(16-64) = -24$

3.

$$\int_4^8 x\,dx = \int_4^6 x\,dx + \int_6^8 x\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^6 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_6^8 = \frac{1}{2}(6^2-4^2) + \frac{1}{2}(8^2-6^2) = \frac{1}{2}(36-16+64-36) = 24$$

Opmerking 20.6.1 (Interpretatie bepaalde integraal)**.**

De bepaalde integraal wordt meestal ingevoerd als een manier om oppervlaktes te berekenen. Maar je kan de bepaalde integraal ook zien als een methode om *producten te berekenen van variërende grootheden*. We willen bijvoorbeeld het product berekenen van tijd en snelheid, of tijd en gewicht, of tijd en afstand, waarbij telkens de snelheid, gewicht of afstand *niet* noodzakelijk constant is. Dat is precies wat de bepaalde integraal doet.

Voorbeeld: bij constante snelheid is de afgelegde weg s na tijd t gelijk aan de snelheid v maal de tijd t:

$$s = v \cdot t\,.$$

Bij een constante snelheid van $v = 120$ km/u leg je in een tijd van $t = 2$ uur precies $2 \cdot 120 = 240$ km af.

Maar, als de snelheid *afhangt van de tijd*, dus als $v = v(t)$, dan is het product $v(2)\cdot 2$ *niet* de afgelegde weg na 2 uur. Inderdaad, stel dat de snelheid na tijd t gelijk is aan $v(t) = 60\cdot t$. Dat betekent: tamelijk traag versnellen, beginnend van stilstand. Na een half uur is de snelheid $v(1/2) = 60 \cdot 1/2 = 30$ km/u, en na twee uur is ze $v(2) = 2 \cdot 60 = 120$km/u. De afgelegde weg na 2 uur is dan *niet* $s(2) = v(2) \cdot 2 = 240$km (want zo ver geraak je enkel als je constant 120km/u rijdt). In dit scenario haal je die snelheid pas helemaal op het einde.

Dankzij de techniek van de bepaalde integraal kunnen we wel schrijven dat de afgelegde weg na 2 uur is:

$$s(2) = \int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 (60 \cdot t)dt$$

20.6.3 Georiënteerde oppervlakte

In de definitie van de bepaalde integraal hebben we de functie f positief verondersteld.

Als f niet noodzakelijk positief is, moeten we voorzichtiger zijn met wat we precies verstaan onder 'oppervlakte'. We geven een nieuwe definitie:

Definitie 20.6.2 (Georiënteerde oppervlakte en bepaalde integraal)**.**

De **georiënteerde oppervlakte** telt per definitie de oppervlakte van een gebied dat boven de x-as ligt *positief* en telt de oppervlakte van een gebied dat onder de x-as ligt *negatief*.

Als f een continue functie is op een interval $[a, b]$, dan is de bepaalde integraal

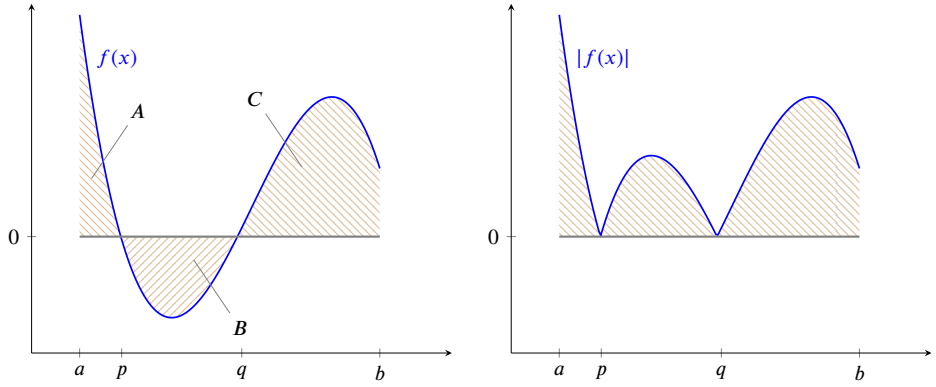
CC BY-NC-SA 4.0

20.6 Bepaalde integralen

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

gelijk aan de *georiënteerde oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$.

Dus als de functie f negatief is, telt de bepaalde integraal die oppervlakte ook als negatief. In de meeste gevallen is dat gelukkig precies wat we willen (negatieve snelheid betekent achteruit rijden, en de overeenstemmende afstand moeten we dus redelijkerwijze meestal ook van de totale afgelegde weg aftrekken).

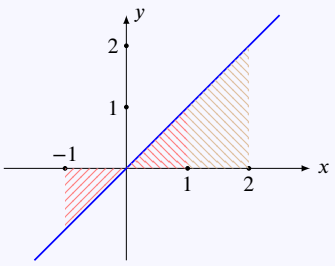


De bepaalde integraal van de functie f over het interval $[a, b]$ in de linkse figuur is dus

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx = \text{opp}\,A - \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\,.$$

Voorbeeld 20.6.4.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(2^2 - (-1)^2) = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}$



Oefening 20.6.1. Bereken volgende bepaalde integralen en duid aan op een figuur wat je berekend hebt.

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = \ldots\ldots$

2. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

20.6 Bepaalde integralen

Indien het echter de bedoeling is om $\text{opp}\,A + \text{opp}\,B + \text{opp}\,C$ te berekenen, dan moet de bepaalde integraal van $|f(x)|$ berekend worden, zoals in de rechtse figuur geïllustreerd werd.

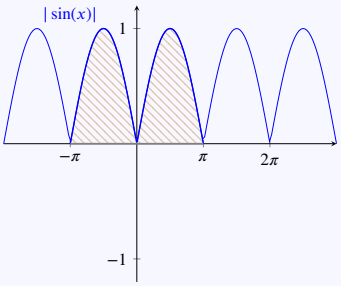
$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \text{opp}\,A + \text{opp}\,B + \text{opp}\,C$$

Om $\int_a^b |f(x)|\,dx$ te berekenen moet je het integratie-interval $[a,b]$ opsplitsen in stukken waarop f ofwel positief, ofwel negatief is. Hiervoor moet je al de nulpunten van f zoeken. Op elk van deze stukken is $|f(x)|$ dan ofwel gelijk aan $f(x)$, ofwel gelijk aan $-f(x)$.

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|\,dx &= \int_a^p |f(x)|\,dx + \int_p^q |f(x)|\,dx + \int_q^b |f(x)|\,dx \\ &= \int_a^p f(x)\,dx - \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx \\ &= \text{opp}\,A + \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\end{aligned}$$

Voorbeeld 20.6.5.

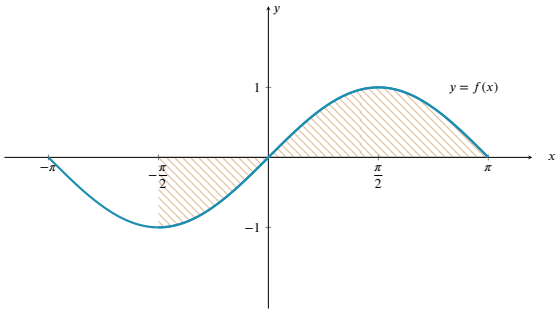
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,dx &= \int_{-\pi}^{0} |\sin x|\,dx + \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx \\ &= \int_{-\pi}^{0} -\sin x\,dx + \int_0^{\pi} \sin x\,dx \\ &= \Big[\cos x\Big]_{-\pi}^{0} + \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} \\ &= \cos(0) - \cos(-\pi) + (-\cos\pi) - (-\cos 0) \\ &= 1 - (-1) + (-(-1)) - (-1) = 1+1+1+1 = 4\end{aligned}$$



Oefening 20.6.2. Waaraan is de oppervlakte van het gearceerde gebied op de figuur gelijk?

CC BY-NC-SA 4.0

20.6 Bepaalde integralen



Meerkeuze:

(a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{\pi} f(x)dx$

(b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx$

(c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$

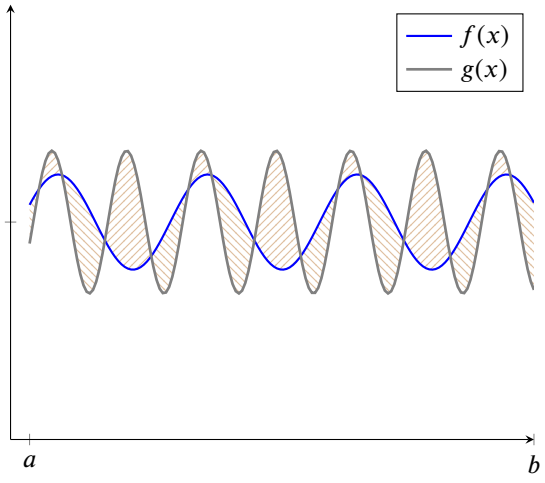
(d) $-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx$

Merk op dat zodra f zowel positieve als negatieve waarden aanneemt op het interval $[a, b]$ in het algemeen niet geldt dat

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| .$$

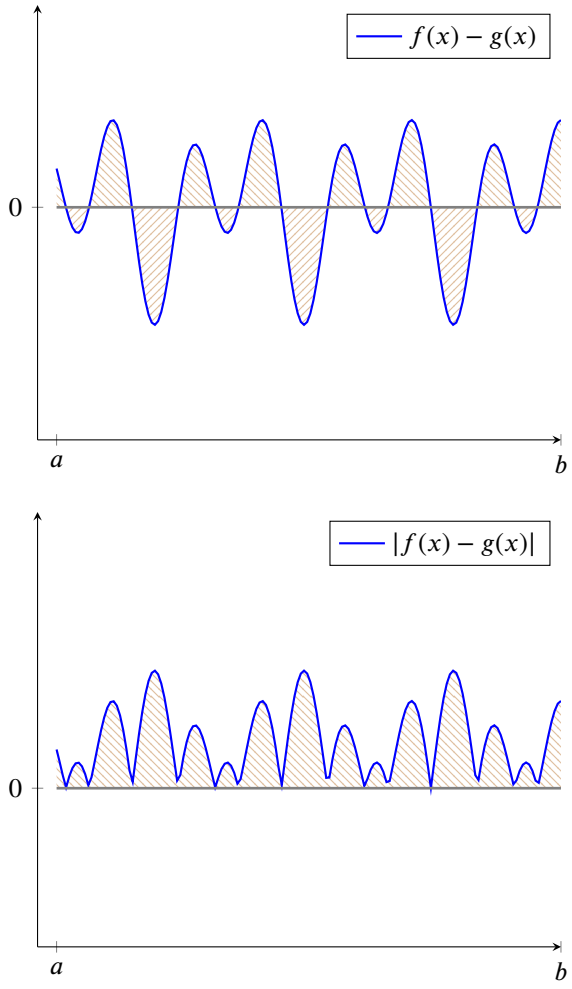
Om de oppervlakte **tussen twee krommen** te berekenen, berekenen we de bepaalde integraal van de absolute waarde van het verschil van beide functies:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$



CC BY-NC-SA 4.0

20.6 Bepaalde integralen



De ligging van de x-as heeft geen belang heeft bij het berekenen van de oppervlakte tussen twee krommen, want $|f(x) - g(x)|$ is de waarde van de bovenliggende kromme min die van de onderliggende kromme. De oppervlakte is dus de som van de integralen tussen twee opeenvolgende snijpunten met als integrand het voorschrift van de *bovenliggende kromme* min die van de *onderliggende kromme*, ongeacht of die krommen boven of onder de x-as liggen.

20.6.4 Substitutie bij bepaalde integralen

Bij het berekenen van *bepaalde* integralen met substitutie moeten voor de *nieuwe* substitutie-variabele ook de integratiegrenzen worden aangepast. Er zijn twee oplossingsmethodes: ofwel bereken en gebruik je inderdaad de nieuwe integratiegrenzen, ofwel bereken je eerst de *onbepaalde* integraal, en vul je in de uitkomst de oorspronkelijke grenzen in.

Voorbeeld 20.6.6. Bereken $\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx$

- **Schrijfwijze 1:** We illustreren beide methodes:
  - *Methode 1:* **Integratiegrenzen aanpassen**: Stel $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x dx$. Als $x = 1$ dan is $u = 1$, als $x = 2$ dan is $u = 4$

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \int_1^4 e^u \, du = \left[e^u\right]_1^4 = e^4 - e$$

CC BY-NC-SA 4.0

20.6 Bepaalde integralen

– *Methode 2:* **Eerst de onbepaalde integraal berekenen** met de substitutie $u = x^2$;

$$\int e^{x^2} 2x \, dx = e^{x^2} + c, c \in \mathbb{R},$$

en dan $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ toepassen:

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e.$$

- **Schrijfwijze 2:**

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \int_1^2 e^{x^2} \, dx^2 = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e$$

Opmerking 20.6.2.

De tweede methode, dus eerst de onbepaalde integraal uitrekenen en dan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

toepassen, heeft als voordeel dat je dan de nieuwe grenzen niet moet zoeken.

Waarschuwing 20.6.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

- De grenzen van x gebruiken als grenzen voor u:

$$\cancel{\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \int_1^2 e^u \, du}$$

- Tijdens de berekening van de bepaalde integraal de grenzen niet aanpassen, ook al geeft dit een correct resultaat:

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx \neq \int_1^2 e^u \, du \neq \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e$$

20.6.5 Partiële integratie bij bepaalde integralen

Voorbeeld 20.6.7. Bereken $\int_0^1 xe^x \, dx$.

- **Schrijfwijze 1:** Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = e^x$, dan is $f'(x) = 1$ en $u(x) = e^x$.
  Partiële integratie geeft dan

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \cdot e^x \, dx &\overset{P.I.}{=} \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx \\ &= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = 1;\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

20.6 Bepaalde integralen

- **Schrijfwijze 2:** Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\,dx = e^x\,dx$;

$$\int_0^1 x \cdot e^x\,dx = \int_0^1 x d(e^x) \overset{P.I.}{=} \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$
$$= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = 1$$

Voorbeeld 20.6.8. Bereken $\int_1^e \ln x\,dx$.

Dit voorbeeld wordt in onderstaande video opgelost door $v = x$ te kiezen in de formule $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (volgens Schrijfwijze 2). Het antwoord is $1 - \ln 1$.

YouTube link: https://www.youtube.com/embed/x9m15nsOl_o

CC BY-NC-SA 4.0

20.6.A Oefeningen bepaalde integralen

20.6.A.1 Niveau 2

Oefening 20.6.3. Bereken volgende bepaalde integralen:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \ldots\ldots$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta = \ldots\ldots$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x \sin x \, dx = \ldots\ldots$
4. $\int_0^{1} xe^{2x} \, dx = \ldots\ldots$
5. $\int_0^{1} \frac{x}{(4+x^2)^2} \, dx = \ldots\ldots$
6. $\int_0^{2} \frac{2x+1}{\sqrt{x+1}} \, dx = \ldots\ldots$
7. $\int_0^{\pi} \cos^2 t \, dt = \ldots\ldots$
8. $\int_0^{\pi} x^2 \cos 3x \, dx = \ldots\ldots$
9. $\int_0^{4} \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx = \ldots\ldots$
10. $\int_0^{1} x^3 e^{-x^2} \, dx = \ldots\ldots$

Oefening 20.6.4. Bron: https://github.com/ptgressman/math104

MIT License Copyright (c) 2019 Philip Gressman

1. Bereken $\int_1^{4} e^{3x}(x+1) \, dx$.

Meerkeuze:

(a) $\frac{14}{9}e^{12} - \frac{5}{9}e^{3}$

(b) $\frac{17}{9}e^{12} - \frac{5}{9}e^{3}$

(c) $\frac{17}{9}e^{12} - \frac{8}{9}e^{3}$

(d) $\frac{20}{9}e^{12} - \frac{8}{9}e^{3}$

(e) $\frac{20}{9}e^{12} - \frac{11}{9}e^{3}$

(f) $\frac{23}{9}e^{12} - \frac{11}{9}e^{3}$

2. Bereken $\int_{\pi}^{2\pi} x \sin 4x \, dx$.

20.6.A Oefeningen bepaalde integralen

Meerkeuze:

(a) 0

(b) $\frac{\pi}{4}$

(c) $-\frac{\pi}{4}$

(d) $\frac{3\pi}{4}$

(e) $-\frac{3\pi}{4}$

(f) $\frac{7\pi}{4}$

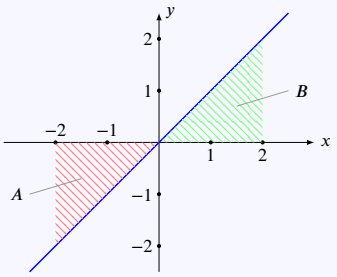
CC BY-NC-SA 4.0

20.7 Bepaalde integralen van even en oneven functies

Voor even en oneven functies is het in sommige gevallen eenvoudig om de bepaalde integraal te berekenen.

Voorbeeld 20.7.1 (Bepaalde integralen van even en oneven functies).

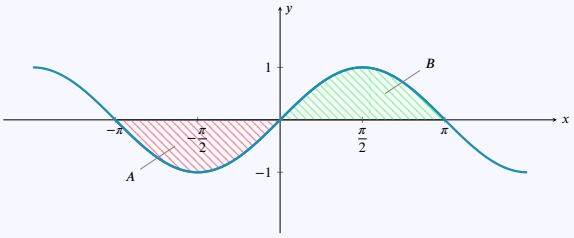
1. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left(2^2-(-2)^2\right) = \frac{1}{2}(4-4) = 0$



De integraal kan ook berekend worden als

$$\int_{-2}^{2} x\,dx = -\text{ opp } A + \text{ opp } B = 0$$

2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = \big[-\cos x\big]_{-\pi}^{\pi} = -\cos\pi - \big(-\cos(-\pi)\big) = -1-(-1) = 0$

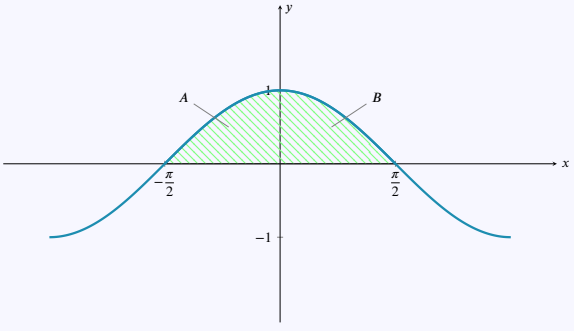


De integraal kan ook berekend worden als

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = -\text{ opp } A + \text{ opp } B = 0$$

3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \big[\sin x\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 1-(-1) = 2$

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\big[\sin x\big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2\Big(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\Big) = 2(1-0) = 2$$



CC BY-NC-SA 4.0

20.7 Bepaalde integralen van even en oneven functies

We kunnen zien dat

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \text{ opp } A + \text{ opp } B = 2 \text{ opp } B$$

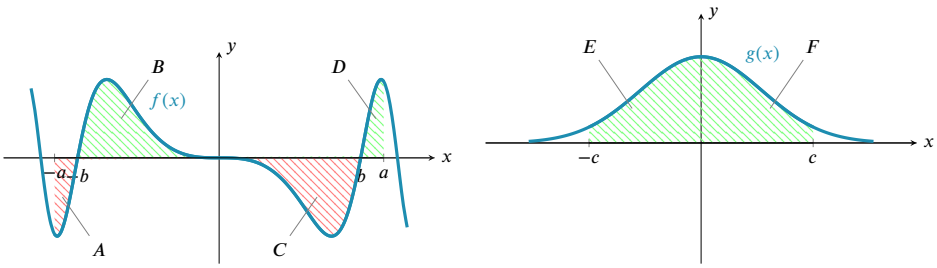
Volgende eigenschap laat zien hoe we in het algemeen bepaalde integralen van even en oneven functies kunnen vereenvoudigen.

Eigenschap 20.7.1 (Bepaalde integraal van even en oneven functies)**.**

Voor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een oneven functie, en $a \in \mathbb{R}$ geldt $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

Voor $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een even functie en $a \in \mathbb{R}$ geldt $\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\,dx$.

Als we de integraal zien als een georiënteerde oppervlakte is dit eenvoudig in te zien.



De bepaalde integraal van de oneven functie f over het interval $[-a, a]$ is dan

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{-b} f(x)\,dx + \int_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\text{ opp } A + \text{ opp } B - \text{ opp } C + \text{ opp } D = 0\end{aligned}$$

omdat de oppervlaktes van het groene en rode deel gelijk zijn.

De bepaalde integraal van de even functie g over het interval $[-c, c]$ is

$$\int_{-c}^{c} g(x)\,dx = \int_{-c}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{c} g(x)\,dx = \text{ opp } E + \text{ opp } F = 2 \text{ opp } F.$$

Voorbeeld 20.7.2.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^3\,dx = \int_{-1}^{1} x^3\,dx + \int_{1}^{2} x^3\,dx = 0 + \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{1}{4}(2^4 - 1^4) = \frac{1}{4}(16-1) = \frac{15}{4}$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4\,dx = 2\int_{0}^{1} x^4\,dx = 2\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2}{5}(1^5 - 0^5) = \frac{2}{5}$

Oefening 20.7.1. Welke bepaalde integralen zijn gelijk aan nul?

1. $\displaystyle\int_{-10}^{10} x^3\,dx$ $\boxed{=0}$ $\boxed{\neq 0}$

CC BY-NC-SA 4.0

20.7 Bepaalde integralen van even en oneven functies

2. $\displaystyle\int_{-10}^{10} x^4\,dx$ $\boxed{=0}$ $\boxed{\neq 0}$

3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$ $\boxed{=0}$ $\boxed{\neq 0}$

4. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x\,dx$ $\boxed{=0}$ $\boxed{\neq 0}$

5. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x\,dx$ $\boxed{=0}$ $\boxed{\neq 0}$

6. $\displaystyle\int_{-3}^{3} (2x - x^3)\,dx$ $\boxed{=0}$ $\boxed{\neq 0}$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 21
Vectoren en matrices

(Versie 2026/11/23H.2)

21.1 Vectoren

We gebruiken het begrip *vector* hier als een andere naam voor een *n-tal van reële getallen*. Dergelijke vectoren veralgemenen de koppels (x, y), dus punten of vectoren in het vlak, en de drietallen (x, y, z), dus punten of vectoren in de driedimensionale ruimte.

Definitie 21.1.1 (Vector als n-tal)**.**

Een **vector a** is een geordend n-tal reële getallen:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Men noemt n de **dimensie** van de vector $\mathbf{a}$.

De getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$ zijn de **componenten** (of ook **coördinaten**) van de vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Voorbeeld 21.1.1.

$(1, 2)$	heeft 2 componenten	$(\sqrt{2}, 0, -1, \pi)$	heeft 4 componenten
$(1, -2, \frac{1}{2})$	heeft 3 componenten	$(1, 2, \dots, n)$	heeft n componenten

Opmerking 21.1.1.

- In andere contexten worden andere definities gegeven van vectoren: vectoren komen onder verschillende gedaantes voor in de meetkunde, in de fysica en in de lineaire algebra.
- Men noteert een vector $\mathbf{a}$ soms ook met een pijltje als $\vec{a}$ of gewoon als a. Uiteraard kunnen er ook andere letters gebruikt worden zoals $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ of $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$.
- Vectoren zijn *gelijk* als ze *dezelfde componenten* hebben *in dezelfde volgorde*: $(0.5, 1) = (\frac{1}{2}, 1)$ en $(1, 2) \neq (2, 1)$.

De belangrijkste bewerkingen op vectoren zijn de *som* en het *scalair veelvoud*.

Definitie 21.1.2 (Rekenen met vectoren)**.**

Voor twee vectoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ en een getal $r \in \mathbb{R}$ definiëren we:

som	$\mathbf{a} + \mathbf{b}$	$=$	$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$
scalair veelvoud	$r\mathbf{a}$	$=$	$r \cdot \mathbf{a} = r(a_1, a_2, \dots, a_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$
tegengestelde	$-\mathbf{a}$	$=$	$-(a_1, a_2, \dots, a_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$
verschil	$\mathbf{a} - \mathbf{b}$	$\overset{\text{def}}{=}$	$\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$	$=$	$(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$

Voorbeeld 21.1.2.

$$(1, 2) + (3, 4) = (1 + 3, 2 + 4) = (4, 6) \qquad (4, 3) - (2, 1) = (4 - 2, 3 - 1) = (2, 2) = 2 \cdot (1, 1)$$
$$-(1, 2, 3) = (-1, -2, -3) \qquad (1, -1.5, 3) + (2.2, -1, 0) = (3.2, -2.5, 3)$$
$$3 \cdot (1, 2) = (3, 6) \qquad 3 \cdot (1, -1, 0.5) = (3, -3, 1.5)$$

Oefening 21.1.1. Bereken

1. $(2, 1) + (1, -1) = \dots \dots$

2. $2 \cdot (2, 1) = \dots \dots$

3. $-(1, -1) = \dots \dots$

CC BY-NC-SA 4.0

21.1 Vectoren

Opmerking 21.1.2.

- De som en het verschil van vectoren worden 'component per component' berekend. Bijgevolg zijn som en verschil enkel gedefinieerd voor vectoren *van hetzelfde formaat*: de som $(1,2)+(3,4,5,6)$ is *niet gedefinieerd*.
- Net zoals voor de vermenigvuldiging van getallen schrijft men het punt voor de scalaire vermenigvuldiging soms wel en soms niet: $r \cdot \mathbf{a} = r\mathbf{a}$.

Vectoren komen vaak voor in zogenaamde *lineaire combinaties*:

Definitie 21.1.3 (Lineaire combinatie)**.**

Een **lineaire combinatie** van vectoren is *een som van (scalaire) veelvouden* van die vectoren.

Als $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ vectoren zijn van dezelfde dimensie en $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, dan is de vector

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + \ldots + a_m\mathbf{v_m}$$

een *lineaire combinatie* van de vectoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$.
De getallen a_i heten de **coëfficiënten** of **gewichten** van de lineaire combinatie.

Voorbeeld 21.1.3 (Lineaire combinaties)**.**

1. $2(1,2)+3(4,5)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$.

2. $(5,7)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

3. $(1,2)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

4. $(2,4)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

5. $(2,4,0)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2,0)$ en $(4,5,0)$

6. $(2,4,1)$ is geen lineaire combinatie van de vectoren $(1,2,0)$ en $(4,5,0)$

7. $3(1,2.5,-1,1) - 2(2,0,1,-1) + 2(1,-1,0.5,0) = (1,5.5,-4,5)$ is een lineaire combinatie van $(1,2.5,-1,1)$, $(2,0,1,-1)$ en $(1,-1,0.5,0)$.

Definitie 21.1.4.

Het **inwendig product** (ook **scalair product**) van vectoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ is het reëel getal

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) \overset{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 21.1.4.

$$(1,2)\cdot(3,4) = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 = 3+8 = 11 \quad \text{en} \quad (3,-2,1)\cdot(2,2,-2) = 6-4-2 = 0.$$

We gebruiken de notatie $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ om aan te duiden dat de vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ loodrecht staan op elkaar. In 2 dimensies kan je gemakkelijk inzien dat

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b},$$

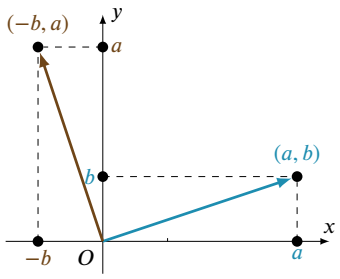
want een kwartdraai van het vlak in tegenwijzerzin brengt de positieve x-as naar de positieve y-as en de positieve y-as naar de negatieve x-as. Een punt (a,b) komt bij een kwartdraai dus terecht op het punt

CC BY-NC-SA 4.0

21.1 Vectoren

$(-b, a)$, en na een kwartdraai staat de vector $(-b, a)$ dus loodrecht op de oorspronkelijke vector (a, b):

$$(a, b) \perp (-b, a) \qquad \text{en} \qquad (a, b) \cdot (-b, a) = a(-b) + ba = 0.$$



Ook in 3 dimensies kan men aantonen dat $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Oefening 21.1.2.

1. $(2, 1) \cdot (1, -1) = \ldots\ldots$

2. $(1, 2, 3) \cdot (-2, 1, 0) = \ldots\ldots$

3. | Juist | Fout | $(1, 2, 3) \perp (-2, 1, 0)$?

CC BY-NC-SA 4.0

21.2 Matrices

Net zoals een vector een manier is om veel *getallen* bij te houden, is een *matrix* een manier om veel *vectoren* (van dezelfde dimensie) bij te houden. Een matrix is *een rechthoek van getallen*, met m rijen van telkens n getallen. Matrices zijn erg nuttig bij de studie van stelsels van vergelijkingen maar komen ook voor in andere contexten.

Voorbeeld 21.2.1. Examenresultaten voor verschillende vakken kan je bijhouden in een tabel:

	Wiskunde	Nederlands	Engels	Duits
An	80	80	40	20
Bart	72	62	23	11
Chris	74	65	38	10
Dirk	73	70	29	17
Els	75	71	30	15

Je kan dezelfde gegevens ook in volgende (punten)matrix $\mathbf{A}$ opschrijven

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 & 20 \\ 72 & 62 & 23 & 11 \\ 74 & 65 & 38 & 10 \\ 73 & 70 & 29 & 17 \\ 75 & 71 & 30 & 15 \end{bmatrix}.$$

In deze voorstelling bevat elke rij de punten van een bepaalde leerling, en elke kolom de punten van een bepaald vak. We noemen deze matrix $\mathbf{A}$ een 5×4-matrix met 5 *rijen* en 4 *kolommen*. Het getal op rij 3 en kolom 2 zijn de punten van Chris voor Nederlands.

Definitie 21.2.1 (Matrix)**.**

Een reële $m \times n$ **matrix** $\mathbf{A}$ is een rechthoekig rooster van reële getallen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{met } m \text{ rijen en } n \text{ kolommen.}$$

- De **matrixelementen** (of soms ook *componenten*) van $\mathbf{A}$ zijn de getallen $a_{11}, \ldots a_{ij}, \ldots, a_{mn}$.
- Men noteert ook $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.
- Een $m \times n$ matrix heeft m rijen en n kolommen.
- Een $n \times n$ matrix (dus met evenveel rijen als kolommen) noemen we een **vierkante matrix**.
- Een $m \times 1$ **kolommatrix** (of **kolomvector**) is een matrix met één kolom.
- Een $1 \times n$ **rijmatrix** (of **rijvector**) is een matrix met één rij .
- De **diagonaal** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ bestaat uit de elementen a_{ii} die we de **diagonaalelementen** van de matrix noemen. Voor een vierkante matrix vormen ze inderdaad de diagonaal van de matrix.

Voorbeeld 21.2.2.

CC BY-NC-SA 4.0

21.2 Matrices

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ is een 2×2 matrix met $a_{11} = 1, a_{21} = 3, a_{12} = 2$ en $a_{22} = 4$
- $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 2×3 matrix en $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 3×2 matrix.
- $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ is een rijmatrix en $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ is een kolommatrix.
- In volgende voorbeelden zijn de diagonaalelementen aangeduid:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 4 & \mathbf{5} & 6 \\ 7 & 8 & \mathbf{9} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & \mathbf{5} & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & \mathbf{9} & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 \\ 4 & \mathbf{5} \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Opmerking 21.2.1.

- In deze notatie $m \times n$ mag het 'product' $m \times n$ *niet* worden uitgerekend: een 2×3 matrix is niet hetzelfde als een 3×2 matrix of een 6×1 matrix.
- De eerste index i geeft het nummer van de *rij* aan, de tweede index j die van de *kolom*.
- In sommige cursussen gebruikt men ronde haakjes in plaats van rechte haakjes: $\mathbf{A} = (a_{ij})$.
- In het geval $n = m = 1$ wordt er bijna nooit onderscheid gemaakt tussen een 1×1 matrix $[a]$, een vector met 1 component (a) en een getal a.
- Strikt wiskundig zijn vectoren, rijmatrices en kolommatrices *verschillend*,dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \neq (1, 3, -2),$$

  maar als de betekenis voldoende duidelijk is uit de context worden ze toch door elkaar gebruikt.

Enkele speciale types van vierkante matrices krijgen een eigen naam:

Definitie 21.2.2 (Speciale matrices)**.**

De **nulmatrix** $\mathbf{O}_n$	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen 0 zijn.
De **eenheidsmatrix** $\mathbf{I}_n$	is een $n \times n$ matrix waarvan de diagonaalelementen gelijk zijn aan 1 en alle andere elementen gelijk zijn aan 0.
Een **diagonaalmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen buiten de diagonaal 0 zijn.
Een **bovendriehoeksmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen *onder* de diagonaal 0 zijn.
Een **onderdriehoeksmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen *boven* de diagonaal 0 zijn.

Voorbeeld 21.2.3. Een eenheidsmatrix, een diagonaalmatrix en een bovendriehoeksmatrix:

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

21.2 Matrices

We definiëren de optelling en de scalaire vermenigvuldiging van matrices op dezelfde manier als voor vectoren: element-per-element. Voor de optelling is het dus belangrijk dat beide matrices dezelfde afmetingen hebben: allebei evenveel rijen en evenveel kolommen.

Definitie 21.2.3 (Optelling en scalair veelvoud van matrices)**.**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$r\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{bmatrix}$$

Het verschil van matrices en de tegengestelde matrix worden gedefinieerd net zoals voor vectoren.

Voorbeeld 21.2.4 (Som, verschil, tegengestelde en scalair veelvoud van matrices)**.**

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 33 & 36 \end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 44 \end{bmatrix} \qquad -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

maar de sommen $\begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 40 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 10 & 200 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ bestaan niet.

Het product van een matrix met een kolomvector:

Definitie 21.2.4 (Matrix-vector-product)**.**

Het product van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ met een $n \times 1$ kolomvector $\mathbf{b}$ is de $m \times 1$ kolomvector $\mathbf{Ab}$ gegeven door

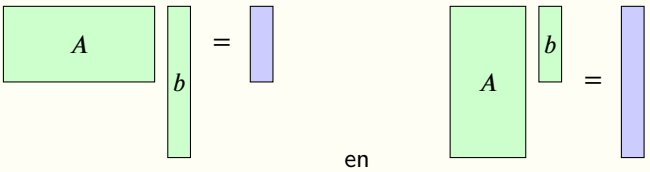
$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots + a_{2n}b_n \\ \\ \vdots \\ \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \ldots + a_{mn}b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_k \end{bmatrix}.$$

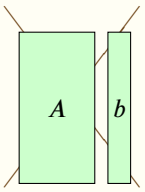
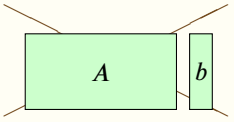
Opmerking 21.2.2.

(a) Het product $\mathbf{Ab}$ is enkel gedefinieerd als het aantal *kolommen* van $\mathbf{A}$ gelijk is aan het aantal *rijen* van $\mathbf{b}$. Het resultaat is een *kolomvector* met evenveel rijen als $\mathbf{A}$. Visueel betekent dit:

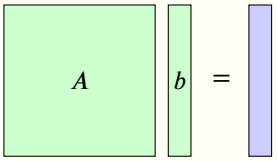
CC BY-NC-SA 4.0

21.2 Matrices



maar volgende producten zijn onmogelijk:  en  .

Enkel voor *vierkante* matrices heeft **Ab** dezelfde vorm als **b**:



(b) Zoals gebruikelijk bij producten schrijft men soms ook een punt: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{Ab}$. Bij matrices wordt de punt echter meestal weggelaten.

(c) Als $\mathbf{A}$ een rijvector is schrijven we dergelijke matrix soms ook met een kleine letter $\mathbf{a}$, dan is het product $\mathbf{ab}$ het reële getal gegeven door

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \quad \in \mathbb{R}.$$

en dit komt neer op het *scalair product* van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.

Voorbeeld 21.2.5.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 1\cdot 5 + 2\cdot 7 = 19$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 3\cdot 5 + 4\cdot 7 = 43.$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 1\cdot 6 + 2\cdot 8 = 22$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 3\cdot 6 + 4\cdot 8 = 50.$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 50 \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 4\cdot 2 \\ 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 1 + 6\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 6 + 3 + 8 \\ 6 + 12 + 5 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 35 \end{bmatrix}$.

CC BY-NC-SA 4.0

21.2 Matrices

Het product van twee matrices:

Definitie 21.2.5 (Matrix-matrix-product)**.**

Het product van $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is $m \times n$ matrix $\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right]$ waarbij het element c_{ij} op de i-de rij en de j-de kolom gelijk is aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met j-de kolom van $\mathbf{B}$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Voorbeeld 21.2.6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 4 & 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 2\cdot 3 + 3\cdot 4 & 2\cdot 5 + 3\cdot 7 & 2\cdot 6 + 3\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 19 & 22 \\ 18 & 31 & 36 \end{bmatrix}.$$

Met sommatietekens kan je dit als volgt schrijven:

Eigenschap 21.2.1.

Het product van een $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met een $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is een $m \times n$ matrix:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix} \quad \text{(een } m \times n \text{ matrix)}$$

In het bijzonder is het product van een $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met een $p \times 1$ kolommatrix $\mathbf{b}$ een $m \times 1$ kolommatrix:

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k} \end{bmatrix} \quad \text{(een } m \times 1 \text{ kolomvector)}$$

en het product van een $1 \times p$ rijmatrix $\mathbf{a}$ met een $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ een $1 \times n$ rijmatrix:

$$\mathbf{aB} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{k}b_{kn} \end{bmatrix} \quad \text{(een } 1 \times n \text{ rijvector)}$$

Voorbeeld 21.2.7.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} =$$

CC BY-NC-SA 4.0

21.2 Matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+a_{24}b_{41} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+a_{24}b_{42} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}+a_{34}b_{41} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{42} \end{bmatrix}.$$

Opmerking 21.2.3.

- Optellen van twee matrices werkt enkel als ze dezelfde vorm hebben: evenveel rijen en evenveel kolommen. De vermenigvuldiging daarentegen werkt enkel voor $m \times p$ met $p \times n$ matrices, dus als het aantal *kolommen* van de eerste matrix gelijk is aan het aantal *rijen* van de tweede. Het product van een 5×3 matrix $\mathbf{A}$ en een 3×2 matrix $\mathbf{B}$ is de 5×2 matrix $\mathbf{AB}$. Maar een matrix $\mathbf{BA}$ *bestaat dan niet*. Het product $\mathbf{BA}$ is in dit geval *niet gedefinieerd*!
- Een 1×100 matrix maal een 100×1 matrix is een getal, maar een 100×1 matrix maal een 1×100 matrix is een 100×100 matrix.
- Net zoals bij reële getallen wordt $\mathbf{AA}$ genoteerd als $\mathbf{A}^2$.

Voorbeeld 21.2.8. Berekening van een 1×2 matrix maal een 2×1 matrix en van een 2×1 matrix maal een 1×2 matrix.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11.$

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$

Oefening 21.2.1.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

4. $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

Het optellen en vermenigvuldigen van matrices voldoet aan een aantal verwachte eigenschappen die het optellen en vermenigvuldigen van reële getallen veralgemenen:

Eigenschap 21.2.2 (Eigenschappen matrixbewerkingen)**.**

Zij a,b en c reële getallen, en $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ reële matrices. Dan gelden volgende eigenschappen zodra ze betekenis hebben (dat betekent: zodra de matrices het correcte formaat hebben om de optellingen en vermenigvuldigingen te kunnen uitvoeren):

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

CC BY-NC-SA 4.0

21.2 Matrices

(b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

(c) $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$

(d) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$

(e) $a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$

(f) $(a+b)\mathbf{A}=a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$

(g) $a(b\mathbf{A})=(ab)\mathbf{A}$

(h) $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$

(i) $0\mathbf{A}=\mathbf{O}$

(j) $\mathbf{O}\mathbf{A}=\mathbf{O}$

(k) $a\mathbf{O}=\mathbf{O}$

(l) $(-1)\mathbf{A}=-\mathbf{A}$

(m) $\mathbf{I}\mathbf{A}=\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}\mathbf{I}=\mathbf{A}$

(n) $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})=(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$

(o) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C}$

(p) $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{B}\mathbf{A}+\mathbf{C}\mathbf{A}$

Let wel op dat met matrices niet *alles* mag wat voor getallen geldt:

Voorbeeld 21.2.9. De volgorde van de vermenigvuldiging van matrices mag niet omgewisseld worden:

$$\begin{bmatrix}1&2\\-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&1\\-2&2\end{bmatrix}$$

maar

$$\begin{bmatrix}1&-1\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\1&6\end{bmatrix}.$$

In het algemeen geldt dus dat $\mathbf{A}\mathbf{B}$ **niet** gelijk is aan $\mathbf{B}\mathbf{A}$.

Voorbeeld 21.2.10. Voor sommige matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ geldt toch $\mathbf{A}\mathbf{B}=\mathbf{B}\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}.$$

Voorbeeld 21.2.11. Een product kan nul zijn zonder dat één van de factoren nul is:

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \text{ en ook } \begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Analoog aan het inverse of omgekeerde van getallen (a^{-1} is het unieke getal b zodat $ab=1$) definiëren we voor matrices:

CC BY-NC-SA 4.0

21.2 Matrices

Definitie 21.2.6 (Inverse matrix)**.** Twee matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ zijn elkaars **inverse** als

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

Als voor een gegeven $\mathbf{A}$ dergelijke $\mathbf{B}$ bestaat dan is die uniek, en we noteren die als $\mathbf{A}^{-1}$. Er geldt dus

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Een belangrijk verschil met reële getallen is dat niet elke matrix een inverse heeft. We gaan hier niet in op het berekenen van een inverse matrix.

CC BY-NC-SA 4.0

21.2.A Oefeningen matrices

21.2.A.1 Niveau 1

Oefening 21.2.2. Voer de bewerkingen uit indien ze gedefinieerd zijn. Bepaal de afmetingen van alle matrices.

1. Bereken $A+B$ en $5A$ voor de matrices $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&5\\-2&3\end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\\2&1\end{bmatrix}$.

2. Bereken het matrix-vector-product Ab voor $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$ en $b=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$.

3. Bereken AB en BA voor de matrices $A=\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix}5&-1&2\\15&4&8\end{bmatrix}$.

4. Bereken AB en BA voor de matrices $A=\begin{bmatrix}-1&0\\-2&3\\5&4\\0&1\end{bmatrix}$ end $B=\begin{bmatrix}0&6&1&1\\3&8&-2&-2\end{bmatrix}$.

5. Bereken AB en BA voor de matrices $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix}-1&5&2\\2&3&4\\9&-1&3\end{bmatrix}$.

6. Bereken $A(BC)$ en $(AB)C$ en bepaal de afmetingen van BC, AB, $A(BC)$ en $(AB)C$ voor de matrices

$$A=\begin{bmatrix}2&1&5\\1&3&2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3&4\\-1&2\\2&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&3\\-1&1\end{bmatrix}$$

21.2.A.2 Niveau 2

Oefening 21.2.3. Welke gelijkheden gelden voor alle 2×2-matrices A, B en C?

1. Juist | Fout $A+B=B+A$

2. Juist | Fout $(A+B)^2=A^2+2A\cdot B+B^2$

3. Juist | Fout $A(BC)=(AB)C$

4. Juist | Fout $I_2A=A$, met $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

Oefening 21.2.4. Als van de matrices $A=\begin{bmatrix}1&b\\1+a&1\end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix}1&b\\a&-1\end{bmatrix}$ geweten is dat $AB=BA$, wat kan dan je besluiten over de reële getallen a en b?

CC BY-NC-SA 4.0

21.2.A Oefeningen matrices

niets	$a = -1$ en $b = 0$	a is willekeurig en $b = 0$	$a = -1$ en b is willekeurig

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 22
Stelsels

(Versie 2026/11/23H.2)

22.1 Inleidende voorbeelden 2×2 stelsels

Voor het oplossen van (lineaire) 2×2 stelsels bestaan verschillende methoden. We bespreken de substitutiemethode en de eliminatiemethode, en geven telkens eerst een voorbeeld.

Voorbeeld 22.1.1. Los volgend stelsel op met de *substitutiemethode*: $\begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=-4 \end{cases}$.

Uitwerking: Uit de eerste vergelijking $x+y=5$ kan je x berekenen als $x=5-y$.
Die uitdrukking $y-5$ voor x kan je substitueren in de tweede vergelijking $x-2y=-4$:

$$(5-y)-2y=-4 \Leftrightarrow -3y=-9$$

Hieruit volgt dat $y=3$. Je kan de waarde $y=3$ invullen in $x=5-y$ en vindt $x=5-3=2$.

De oplossing van het stelsel is dus $x=2$ en $y=3$, of ook $(x,y)=(2,3)$.

Merk op dat je dezelfde oplossing bekomt door de eerste vergelijking te herschrijven als $y=5-x$ en te substitueren in de tweede vergelijking. Je kan ook de tweede vergelijking herschrijven en substitueren in de eerste vergelijking. Al deze varianten leiden tot hetzelfde resultaat.

Algemeen kan je de substitutiemethode als volgt beschrijven:

Algoritme 22.1.3. Los een 2×2 stelsel op met de **substitutiemethode** door

(a) uit één van de vergelijkingen één van de onbekenden op te lossen en

(b) in de andere vergelijking die onbekende te *substitueren* (vervangen) door de gevonden oplossing.

(c) Die andere vergelijking heeft nu nog maar één onbekende, en kan je oplossen,

(d) en die oplossing ingevuld in de vergelijking waarmee je gestart bent, levert de eindoplossing.

Indien men een strijdig stelsel of dubbele vergelijking heeft, zal bovenstaande algoritme niet zonder meer bruikbaar zijn.

Voorbeeld 22.1.2. Los volgend stelsel op met de *eliminatiemethode*: $\begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=-4 \end{cases}$.

Uitwerking: Zodra x en y voldoen aan de twee vergelijkingen, voldoen ze ook aan de som of het verschil van die vergelijkingen.

Als je in dit geval de tweede vergelijking zou vervangen door het verschil van die tweede vergelijking met de eerste, dan blijkt de onbekende x verdwenen (i.e. *geëlimineerd*) te zijn uit die tweede vergelijking:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ -3y=-9 \end{cases}$$

De tweede vergelijking heeft nu nog maar één onbekende, en is onmiddellijk oplosbaar: $y=3$. Door die oplossing $y=3$ in te vullen in de eerste vergelijking (nl. $x+y=5$), vind je $x+3=5$, dus $x=2$.

De oplossing van het stelsel is dus $x=2$ en $y=3$, of ook $(x,y)=(2,3)$.

Merk op dat er opnieuw verschillende eliminatiemethoden zijn, die allemaal tot diezelfde oplossing leiden.

Strikt genomen hebben we hier de eliminatiemethode enkel in de eerste stap gebruikt, en ze gecombineerd met substitutie om x te berekenen. Het is mogelijk om ook y te elimineren uit de eerste vergelijking, maar in de praktijk is dat voor 2×2 stelsels meestal ingewikkelder dan nodig.

CC BY-NC-SA 4.0

22.1 Inleidende voorbeelden 2×2 stelsels

Algemeen kan je de eliminatiemethode als volgt beschrijven:

Algoritme 22.1.4. Los een 2×2 stelsel op met de **eliminatiemethode** door

(a) bij één van de vergelijkingen een geschikt veelvoud van de andere op te tellen zodat één van de onbekenden wordt *geëlimineerd* (verdwijnt),

(b) die vergelijking met maar één onbekende op te lossen, en

(c) die oplossing in te vullen in de andere vergelijking.

Zie verder voor de gevallen met strijdige of dubbele vergelijkingen.

In de vorige voorbeelden was er telkens een *unieke* oplossing. Dat is echter niet altijd het geval, soms zijn er *geen* oplossingen, soms zijn er *oneindig veel* oplossingen.

Voorbeeld 22.1.3. Stelsel zonder oplossingen: $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$.

Inderdaad, $x+y$ kan natuurlijk niet tegelijk gelijk zijn aan 1 en gelijk zijn aan 2.

Als je dergelijk stelsel oplost met *substitutie* bekom je uit de eerste vergelijking $x=1-y$, en dat invullen in de tweede vergelijking geeft $(1-y)+y=2$, of $1=2$ wat een strijdige vergelijking is. Er is dus geen oplossing van deze vergelijking, en dus zeker ook geen oplossing van het hele stelsel.

Als je dergelijk stelsel oplost met *eliminatie* bekom je als tweede vergelijking $0=1$, wat ook een strijdige vergelijking is. Er is dus geen oplossing.

Voorbeeld 22.1.4. Stelsel met oneindig veel oplossingen: $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$.

Inderdaad, telkens y één kleiner is dan x voldoen x en y aan beide vergelijkingen, bijvoorbeeld $(x,y)=(5,4), (x,y)=(11,10)$ of $(x,y)=(\pi+1,\pi)$.

De oplossingen van het stelsel zijn $x=t, y=t-1$, met $t\in\mathbb{R}$, wat je ook kan schrijven als $(x,y)=(t,t-1)$, met $t\in\mathbb{R}$.

Pas wel op: je kan de oplossingen ook schrijven als $x=s+1, y=s$, met $s\in\mathbb{R}$.

Als je dergelijk stelsel oplost met *substitutie* bekom je uit de eerste vergelijking $x=y+1$, en dat invullen in de tweede vergelijking geeft $2(y+1)-2y=2$, of $2=2$. De gelijkheid $2=2$ (eventueel nog te vereenvoudigen tot $1=1$ of $0=0$) legt geen extra voorwaarden op aan x en y, want ze is altijd voldaan. Er is dus eigenlijk maar één vergelijking: de tweede bevat precies dezelfde voorwaarde op x en y. Er is geen unieke oplossing, maar er zijn er oneindig veel.

Als je dergelijk stelsel oplost met *eliminatie* bekom je als tweede vergelijking $0=0$, wat ook een altijd voldane vergelijking is. Er blijft dus maar één vergelijking met twee onbekenden over, en dergelijke vergelijking heeft oneindig veel oplossingen.

Merk op dat het niet altijd onmiddellijk af te lezen is van een stelsel of het al dan oneindig veel oplossingen heeft.

Zo heeft ook $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-y=y+2 \end{cases}$ oneindig veel oplossingen.

We illustreren dit nog verder met enkele voorbeelden:

CC BY-NC-SA 4.0

22.1 Inleidende voorbeelden 2×2 stelsels

Voorbeeld 22.1.5. Los volgend stelsel op: $\begin{cases} 2x+2y=8 \\ 3x+y=6 \end{cases}$.

Uitwerking:

$$\begin{cases} 2x+2y=8 \\ 3x+y=6 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y=4 \\ y=6-3x \end{cases} \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+(6-3x)=4 \\ y=6-3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+6=4 \\ y=6-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=6-3x \end{cases} \underset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

De stappen hierboven zijn de volgende:

(1) de eerste vergelijking door 2 delen en de tweede vergelijking herschrijven
(2) y substitueren in de eerste vergelijking
(3) x invullen in tweede vergelijking

De oplossing is dus $(x,y)=(1,3)$.

Voorbeeld 22.1.6. Los volgend stelsel op: $\begin{cases} -4x+4y=-8 \\ x-y=2 \end{cases}$.

Uitwerking:

$$\begin{cases} -4x+4y=-8 \\ x-y=2 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y=2 \\ x-y=2 \end{cases} \underset{(2)}{\Leftrightarrow} x-y=2 \underset{(3)}{\Leftrightarrow} x=2+y$$

We gebruikten de volgende stappen:

(1) eerste vergelijking delen door (-4)
(2) twee gelijke vergelijkingen, je kan één schrappen
(3) x schrijven in functie van y

Stel $y=t$ met $t\in\mathbb{R}$ dan wordt de oplossing gelijk aan $(x,y)=(2+t,t)$, er zijn oneindig veel oplossingen.

Voorbeeld 22.1.7. Los volgend stelsel op: $\begin{cases} -3x+y=2 \\ 3x-y=-1 \end{cases}$.

Uitwerking:

$$\begin{cases} -3x+y=2 \\ 3x-y=-1 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -3x+y=2 \\ -3x+y=1 \end{cases}$$

We hebben hier de tweede vergelijking gedeeld door (-1). Maar dan hebben we dat eenzelfde term $-3x+y$ tegelijkertijd gelijk moet zijn aan 2 en 1, wat natuurlijk niet kan. Daarom is dit stelsel strijdig en zijn er geen oplossingen.

CC BY-NC-SA 4.0

22.2 Lineaire stelsels: definitie

We bespreken hier het oplossen van *stelsels van lineaire vergelijkingen*. Dergelijke lineaire stelsels komen vaak voor bij allerlei problemen in de wiskunde, fysica, scheikunde, economie, ... **Lineair** betekent daarbij dat de onbekenden voorkomen *zonder machten* of meer ingewikkelde uitdrukkingen als wortels of sinussen, en **stelsel** betekent dat de onbekenden aan *meerdere vergelijkingen tegelijk* moeten voldoen.

Voorbeeld 22.2.1.

1. Zoek twee getallen waarvan de som 5 is en het verschil 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=5$ en het verschil $x-y=1$, en we zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het lineaire stelsel

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Merk op:

- Je kan in dit geval de gezochte getallen snel vinden door te *proberen*: de som moet 5 zijn, dus als we ons beperken tot natuurlijke getallen zijn de mogelijkheden $0+5$, $1+4$ of $2+3$. Enkel voor $2+3$ is het verschil 1, dus de oplossing is 2 en 3.
  In dit eenvoudige geval is het niet echt nuttig om onbekenden en stelsels op te schrijven. Maar zodra de voorwaarden wat ingewikkelder zijn, wordt *proberen* snel moeilijk en is *uitrekenen* meestal sneller.
- Als je toch een stelsel opschrijft, kan je in dit eenvoudige geval dat stelsel ook makkelijk oplossen. Als $x+y=5$ en $x-y=1$ dan is ook hun som gelijk: $(x+y)+(x-y)=5+1$. Deze laatste vergelijking reduceert zich echter tot $2x=6$ en dus $x=3$. Invullen dat $x=3$ in de eerste vergelijking $x+y=5$ levert $3+y=5$ of $y=2$.
  De methode voor het oplossen van stelsels is eigenlijk een veralgemening van dit eenvoudig trucje.
- Je kan dit stelsel ook opschrijven met matrices:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\cdot x+1\cdot y=5 \\ 1\cdot x+(-1)\cdot y=1 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Zoek twee getallen waarvan de som 3.1415 is en het verschil 1.2345.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=3.1415$ en het verschil $x-y=1.2345$, en we zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het stelsel.

$$\begin{cases} x+y=3.1415 \\ x-y=1.2345 \end{cases}$$

Merk op:

- Je kan de getallen x en y nu veel minder makkelijk vinden door *proberen*.
- Je kan in dit eenvoudige geval het stelsel toch makkelijk oplossen met dezelfde methode als hiervoor: als $x+y=3.1415$ en $x-y=1.2345$ dan moet natuurlijk ook $(x+y)+(x-y)=3.1415+1.2345=4.3760$. Deze vergelijking reduceert zich tot $2x=4.376$ en dus $x=2.188$. Invullen van $x=2.188$ in de eerste vergelijking geeft $2.188+y=3.1415$ of $y=3.1415-2.188=1.9535$.
- Je kan ook dit stelsel schrijven met matrices:

$$\begin{cases} x+y=3.1415 \\ x-y=1.2345 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3.1415 \\ 1.2345 \end{bmatrix}$$

3. Zoek drie getallen waarvan het grootste dubbel zo groot is als het kleinste, het middelste de helft is van de som van de twee anderen, en het gemiddelde 42 is.

CC BY-NC-SA 4.0

22.2 Lineaire stelsels: definitie

Uitwerking: Noem de gezochte getallen, geordend van groot naar klein, x, y en z. Dan weten we dat $x = 2z$, $y = \frac{x+z}{2}$ en $\frac{x+y+z}{3} = 42$, en zoeken we dus de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 126 \end{cases}$$

We bestuderen verder een oplossingsmethode voor een stelsel als dit. We schrijven het alvast met matrices:

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 126 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 126 \end{bmatrix}$$

Niet alle problemen leiden tot lineaire stelsels:

Voorbeeld 22.2.2 (Niet lineaire stelsels)**.**

1. Zoek twee getallen waarvan de som 5 is en het *product* 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x + y = 5$ en het product $x \cdot y = 1$, en we zoeken getallen x en y die voldoen aan het stelsel

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 1 \end{cases}$$

Merk op dat dit *wel een stelsel* is, maar *geen lineair stelsel*, want er komt een *product* van de onbekenden in voor. De tweede vergelijking is *geen lineaire vergelijking*. Dat soort stelsels is in het algemeen *veel moeilijker* om op te lossen. Merk ook op dat je dit stelsel niet op dezelfde manier als hierboven kan schrijven met matrices.

Definitie 22.2.1 (Lineair stelsel)**.**

Een **lineair stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden** is een stel van m lineaire vergelijkingen met in totaal n onbekenden. Dergelijk lineair stelsel noteren we als

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

met S de naam van het stelsel, a_{ij} de **coëfficiënten**, $x_1, \ldots, x_n$ de **onbekenden** en b_i de **rechterleden** of **constante termen**.

De **coëfficiëntenmatrix** van het stelsel is de $m \times n$ matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

De **uitgebreide matrix** van het stelsel is de $m \times (n+1)$ matrix met de constante termen toegevoegd:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.2 Lineaire stelsels: definitie

Een lineair stelsel is **homogeen** als alle constante termen nul zijn, dus alle $b_i = 0$.

De uitdaging bij dergelijke stelsels is om de letters x_i te vervangen door geschikte reële getallen zodat alle gelijkheden opgaan. We noemen dat het *oplossen van het stelsel* en de gevonden reële getallen zijn dan *oplossingen van het stelsel*.

Voorbeeld 22.2.3. Het stelsel

$$S_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

is een homogeen lineair stelsel met twee vergelijkingen in drie onbekenden x_1, x_2, x_3.

Opmerking 22.2.1.

- De term *rechterlid* is gebruikelijk in de wiskunde, maar is eigenlijk verwarrend of zelfs misleidend: een vergelijking $x+y = 2$ kan natuurlijk ook geschreven worden als $x+y-2 = 0$, maar $x+y-2 = 0$ is *geen* homogene vergelijking, en volgens bovenstaande definitie is het 'rechterlid' gelijk aan 2. Het begrip 'rechterlid' slaat dus op vergelijkingen in standaardvorm: alle onbekenden in het linkerlid en de constante term rechts.
- Om verwarring te voorkomen is het belangrijk steeds de verticale lijn van de uitgebreide matrix te noteren.
- Bij 2 onbekenden worden vaak de letters x en y gebruikt en bij 3 onbekenden x, y en z.

Eigenschap 22.2.1 (Matrixvorm van een lineair stelsel)**.**

Elk lineair stelsel

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

kan in **matrixvorm** worden geschreven als $\mathbf{Ax = b}$

$$S : \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

waarbij

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 22.2.4. Het stelsel

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.2 Lineaire stelsels: definitie

is een lineair stelsel met twee vergelijkingen in drie onbekenden met als coëfficiëntenmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

en als uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

We kunnen het stelsel dus schrijven als

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 22.2.5. Bepaal alle reële getallen s, t, u, v, w waarvoor

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 1 \end{cases}$$

Dit is een *lineair stelsel van drie vergelijkingen in vijf onbekenden*.

- Dit is de wiskundige weergave van een probleem waarbij we weten dat er tussen de vijf onbekende grootheden s, t, u, v, w drie lineaire verbanden bestaan. De uitdaging is *alle waarden* te vinden voor de onbekende grootheden die aan *alle* (lineaire) verbanden voldoen.
- Met matrices en vectoren kunnen we het stelsel eenvoudiger schrijven: de vijf onbekenden (s, t, u, v, w) worden een 5×1 kolomvector $\mathbf{x}$, de coëfficiënten van de vergelijkingen vormen de 3×5 *coëfficiëntenmatrix* $\mathbf{A}$ en de rechterleden zetten we in een 3×1 kolomvector $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Het stelsel kan nu geschreven worden als $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ of

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De uitgebreide matrix, die dus alle gegevens van het stelsel bevat, is

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

Oefening 22.2.1. Welke van de volgende stelsels zijn lineair in de onbekenden u en v? Schrijf de lineaire stelsels ook in matrixvorm.

CC BY-NC-SA 4.0

22.2 Lineaire stelsels: definitie

1. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} 2u + v = 5 \\ 4u + 2v = 1 \end{cases}$$

2. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} 2u + v = 5 \\ 4u + 2v = u \end{cases}$$

3. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} 2u = 5 \\ 2v = 1 \end{cases}$$

4. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} (u+2)u - u^2 = 5 \\ 4u + 2v = 1 \end{cases}$$

5. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} \sin(u) + \cos(v) = 1 \\ \sin(u) - 2\cos(v) = 1/2 \end{cases}$$

6. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} u^2 + v = 1 \\ -u^2 - 2v = 2 \end{cases}$$

7. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} au + 2v = 5 \\ 4u + bv = 1 \end{cases} \quad (\text{met } a, b \in \mathbb{R})$$

8. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} x^3 u + \cos(y)v = 5 \\ 4u + x^3 v = 1 \end{cases} \quad (\text{met } x, y \in \mathbb{R})$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.3 Lineaire stelsels: oplossingen

Een lineair stelsel van m vergelijkingen en n onbekenden $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *oplossen* betekent *alle* n-tallen reële getallen $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ vinden die we voor de letters $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ kunnen invullen zodat $\mathbf{Ap} = \mathbf{b}$. Formeel wordt dit:

Definitie 22.3.1 (Oplossingen van stelsels en gelijkwaardige stelsels)**.**

Een **oplossing** van een lineair stelsel van m vergelijkingen en n onbekenden $S : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ is een vector $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ die voldoet aan alle vergelijkingen, dus zodat

$$\mathbf{Ap} = \mathbf{b} \quad \text{of} \quad \begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n & = b_1 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}p_1 + a_{m2}p_2 + \cdots + a_{mn}p_n & = b_m \end{cases}$$

De **oplossingsverzameling** $\mathrm{Opl}(S)$ van een lineair stelsel S is de verzameling van *alle oplossingen*.

Twee stelsels S_1 en S_2 zijn **gelijkwaardig** als ze *dezelfde* oplossingsverzameling hebben, dus als

$$\mathrm{Opl}(S_1) = \mathrm{Opl}(S_2)$$

Een stelsel dat *geen* oplossingen heeft, dus met $\mathrm{Opl}(S) = \emptyset$, noemen we **strijdig** of **ontaard**.

Opmerking 22.3.1. Ook een *vergelijking* die geen oplossingen heeft noemen we **strijdig** of **ontaard**. Een typische *ontaarde vergelijking* is $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 1$ of dus $0 = 1$.

We geven eerst enkele eenvoudige voorbeelden van het oplossen van stelsels:

Voorbeeld 22.3.1. Los volgende stelsels op:

1. $S_1 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Door de twee vergelijkingen bij elkaar op te tellen, vinden we dat $(x + y) + (x - y) = 5 + 1$ moet zijn, en dus $2x = 6$, of $x = 3$. Door $x = 3$ in te vullen in één van de twee oorspronkelijke vergelijkingen vinden we dan dat $3 + y = 5$, en dus $y = 2$.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_1) = \{(3, 2)\}$, of $x = 3$ en $y = 2$ is de enige oplossing van het stelsel S_1

2. $S_2 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x + y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Het is onmiddellijk duidelijk dat het onmogelijk is dat $x + y$ zowel gelijk is aan 1 als aan 5. Er zijn dus *geen oplossingen*.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_2) = \emptyset$

3. $S_3 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 12 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x, y) = (3, 2)$. En $(3, 2)$ voldoet ook aan de derde vergelijking (want $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$), en is dus een oplossing van het hele stelsel.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_3) = \{(3, 2)\}$

CC BY-NC-SA 4.0

22.3 Lineaire stelsels: oplossingen

4. $S_4 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 13 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x, y) = (3, 2)$. En $(3, 2)$ voldoet niet aan de derde vergelijking (want $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \neq 13$), en er kan dus geen oplossing bestaan voor het hele stelsel.

Resultaat: $\text{Opl}(S_4) = \emptyset$

5. $S_5 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ 2x + 2y & = 10 \end{cases}$

Uitwerking: De tweede vergelijking is eigenlijk dezelfde als de eerste, want als $x+y = 5$, dan is automatisch ook $2x + 2y = 2(x + y) = 2 \cdot 5 = 10$. Dus zodra $y = 5 - x$ (of ook: zodra $x = 5 - y$), hebben we een oplossing. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 5 - x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(5 - y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn natuurlijk twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels. Voorbeelden van oplossingen zijn dus de koppels $(0, 5), (1, 4), (2, 3), (5, 0), (\pi, 5 - \pi), (\pi + 5, -\pi), (5 - \pi, \pi), \ldots$

Resultaat: $\text{Opl}(S_5) = \{(t, 5 - t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(5 - s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -x + 5$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel S_5 is dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -x + 5$.

6. $S_6 = \{ \; 2x + y \; = 6 \;$ (een 'stelsel' met één vergelijking)

Uitwerking: Er is maar één vergelijking, en die zegt dat $x = 3 - \frac{1}{2}y$, of ook dat $y = 6 - 2x$. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 6-2x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(3-\frac{1}{2}y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels.

Resultaat: $\text{Opl}(S_6) = \{(t, 6 - 2t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(3 - \frac{1}{2}s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -2x+6$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel $\{2x+y = 6$ is dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -2x + 6$.

Een algemene strategie om lineaire stelsels op te lossen is:

Bereken een *gelijkwaardig* stelsel waarvoor de oplossingsverzameling direct af te lezen is.

Bij stelsels waarvan de coëfficiëntenmatrix een diagonaalmatrix is kunnen we de oplossingen gewoon aflezen:

Voorbeeld 22.3.2.

Los volgende stelsels op, en schrijf elk stelsel ook in matrixvorm:

1. $S_1 = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 1y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 6 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_1) = \{ \; (2, 4, 6) \; \}$ via gewoon aflezen.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

CC BY-NC-SA 4.0

22.3 Lineaire stelsels: oplossingen

2. $S_2 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 1 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_2) = \{\ (2,2,1)\ \}$ via aflezen met een kleine berekening: $4/2 = 2$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $S_3 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_3) = \{\ (2,2,0)\ \}$ via gewoon aflezen, waarbij we $z = 0$ krijgen, maar dat is niets speciaal.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $S_4 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 0z & = & 1 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_4) = \emptyset$ via gewoon aflezen, want de laatste vergelijking is duidelijk strijdig: voor geen enkel getal z kan $0z = 1$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $S_5 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 1y & & = & 4 \\ & & 0z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_5) = \{\ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$, waarbij de laatste vergelijking $0z = 0$ voor alle getallen z voldaan is . Er zijn dus oneindig veel oplossingen, die we naar keuze kunnen schrijven als $\{\ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,4,z) \mid z \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,4,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\ \} = \ldots$

We kunnen deze oplossingsverzameling ook noteren als $\text{Opl}(S_5) = \{\ (2,4,0) + t(0,0,1) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$, want $(2,4,0) + t(0,0,1) = (2,4,t)$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. $S_6 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 0y & & = & 0 \\ & & 0z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_6) = \{\ (2,s,t) \mid s,t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\ \}$. Enkel de eerste vergelijking is een echte vergelijking. Als $x = 2$, mogen y en z willekeurig zijn. Er zijn dus 'twee keer oneindig' veel oplossingen omdat er twee parameters nodig zijn om *alle* oplossingen te bekomen.

CC BY-NC-SA 4.0

22.3 Lineaire stelsels: oplossingen

We kunnen deze oplossingsverzameling ook noteren als $\text{Opl}(S_6) = \{\ (2,0,0) + s(0,1,0) + t(0,0,1) \mid s,t \in \mathbb{R}\ \}$

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$

7. $S_7 = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 0y & & = & 0 \\ & & 2z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_7) = \{\ (2,t,3) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$.

We kunnen deze oplossingsverzameling ook noteren als $\text{Opl}(S_7) = \{\ (2,0,3) + t(0,1,0) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\6\end{bmatrix}$

Stelsels waarvan de coëfficiëntenmatrix een bovendriehoeksmatrix is kunnen we oplossen met **achterwaartse substitutie**:

Voorbeeld 22.3.3 (Achterwaartse substitutie)**.** Los volgende stelsels op, en schrijf elk stelsel ook in matrixvorm:

1. $S_{21} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 1y+ & 1z & = & 4 \\ & & 1z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{21}) = \{\ (2,-2,6)\ \}$

We beginnen met de laatste vergelijking: $z = 6$. We vullen die waarde voor z in in de tweede vergelijking, en bekomen $y+6 = 4$, dus $y = -2$. De eerste vergelijking zegt dat $x = 2$. Dus, de oplossing is $(x,y,z) = (2,-2,6)$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$

2. $S_{22} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 2 \\ & +y & +z & = & 4 \\ & & +z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{22}) = \{\ (-2,-2,6)\ \}$

Opnieuw van beneden naar boven invullen (achterwaarts, vandaar *achterwaartse substitutie*). $z = 6$, dus $y+6 = 4$ en dus $y = -2$. Tenslotte is $x + (-2) + 6 = 2$, of $x = -2$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$

3. $S_{23} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 6x & +2y & +z & = & 2 \\ & +5y & +3z & = & 4 \\ & & +2z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{23}) = \{\ (1/6,-1,3)\ \}$

Opnieuw aan de hand van achterwaartse substitutie eerst z, vervolgens y en dan x berekenen.

CC BY-NC-SA 4.0

22.3 Lineaire stelsels: oplossingen

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Lineaire stelsels: oplossen via echelonvorm

De *eliminatiemethode van Gauss* is een algemene methode om *elk lineair stelsel* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ op te lossen. Het toepassen van geschikte zogenaamde *elementaire rijoperaties* op de vergelijkingen van het stelsel (in de praktijk op de uitgebreide matrix van het stelsel) leidt tot een gelijkwaardig maar eenvoudiger stelsel in trapvorm (de zogenaamde *echelonvorm*). Een andere naam voor de methode is 'rijherleiden', en een variant is gekend onder de naam 'spilmethode'.

22.4.1 Elementaire rijoperaties

Volgende drie operaties op vergelijkingen van stelsels *veranderen de oplossingsverzameling van het stelsel niet*:

(a) ***Herschaling* van een vergelijking:** een vergelijking vermenigvuldigen met een reëel getal verschillend van nul.
Een voorbeeld maakt meteen duidelijk waarom dit de oplossingsverzameling niet verandert: de vergelijking $x-2y=5$ heeft immers precies dezelfde oplossingen (x, y) als de vergelijkingen $3x-6y=15$ en $-2x+4y=-10$. Pas wel op: vermenigvuldigen *met nul* mag natuurlijk niet, want dat zou de vergelijking doen verdwijnen en de oplossingsverzameling dus erg vergroten.

(b) **Twee vergelijkingen van plaats *verwisselen*:**
Het is duidelijk dat de volgorde van de vergelijkingen geen invloed heeft op de oplossingen.

(c) **Bij een vergelijking een veelvoud van een andere vergelijking *optellen*:**

We tonen eerst aan waarom een veelvoud van een andere vergelijking optellen geen oplossingen kan doen verdwijnen. Daarna tonen we aan dat er dan ook geen oplossingen kunnen bijkomen.

(i) Als (x_0, y_0) een oplossing is van $\begin{cases} x-2y=5 \\ x+y=1 \end{cases}$
en we tellen bij de eerste vergelijking bijvoorbeeld twee keer de tweede op:

$$(x-2y)+2(x+y)=5+2\cdot 1 \text{ of dus } 3x+0y=7$$

dan is (x_0, y_0) ook een oplossing van $\begin{cases} 3x+0y=7 \\ x+y=1 \end{cases}$
Dus elke oplossing van het oorspronkelijke stelsel is ook oplossing van het nieuwe stelsel.

(ii) Maar is ook elke oplossing van het nieuwe stelsel een oplossing van het oorspronkelijke stelsel? Ja, want de weg terug heeft volledig dezelfde structuur: als we van de nieuwe eerste rij de tweede rij (die ongewijzigd gebleven is) twee keer aftrekken bekomen we terug het oorspronkelijke stelsel. De redenering van hierboven toont dus dat alle oplossingen behouden blijven.

Deze *operaties op vergelijkingen* van een stelsel komen overeen met zogenaamde *elementaire rijoperaties op de uitgebreide coëfficiëntenmatrix* van het stelsel:

Definitie 22.4.1. Volgende operaties op de rijen van matrices noemen we **elementaire rijoperaties**:

Herschaling	Vermenigvuldigen een rij met een getal verschillend van nul	$R_i \to aR_i, a \neq 0$
Verwisseling	Verwissel twee rijen van plaats	$R_i \leftrightarrow R_j$
Combinatie	Tel bij een rij een veelvoud van een andere rij op	$R_i \to R_i + aR_j$

Uit bovenstaande uitleg blijkt dus volgende eigenschap:

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Lineaire stelsels: oplossen via echelonvorm

Eigenschap 22.4.1. Het toepassen van elementaire rijoperaties op de uitgebreide matrix van een stelsel verandert de oplossingsverzameling van het stelsel niet.

Enkele voorbeelden van het toepassen van elementaire rijoperaties op de uitgebreide matrix van een stelsel. Let hierbij op de gebruike notatie: teken een pijl naar rechts naar de nieuwe matrix, en schrijf boven die pijl de rijoperatie die je toepast:

Voorbeeld 22.4.1 (Herschaling)**.**

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1/2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Voorbeeld 22.4.2 (Verwisseling)**.**

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Voorbeeld 22.4.3 (Combinatie)**.**

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

Opmerking 22.4.1.

Door een herschaling en een combinatie na elkaar uit te voeren kan je een rij ook vervangen door een niet-nul veelvoud van die rij waarbij een veelvoud van een andere rij wordt opgeteld: $R_i \to aR_i + bR_j, a \neq 0$. Men noemt deze operatie ook een (niet-elementaire) rijoperatie.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to 2R_2 - R1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -2 \end{array}\right]$$

22.4.2 Eliminatiemethode van Gauss

Het doel van de eliminatiemethode van Gauss is om een stelsel om te vormen tot een eenvoudiger gelijkwaardig stelsel door het gericht toepassen van elementaire rijoperaties. Omdat rijoperaties de oplossingsverzameling niet veranderen, kunnen we proberen om het stelsel te vereenvoudigen tot een vorm waarop die oplossingsverzameling direct kan worden afgelezen. We bekijken eerst enkele voorbeelden die we daarna veralgemenen.

Voorbeeld 22.4.4. Het stelsel

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u - v = 1 \\ u - 2v = -1 \end{cases}$$

heeft als uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$.

We vereenvoudigen nu de matrix, en dus het stelsel, door rijoperaties toe te passen. In een eerste stap zorgen we dat er nullen staan in de **eerste** kolom in rij 2 en rij 3. Hiervoor trekken we eerst van

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Lineaire stelsels: oplossen via echelonvorm

de tweede rij de eerste rij af:

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

en vervolgens trekken we van de derde rij de eerste rij af

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right].$$

In de volgende stap plaatsen we een nul in de **tweede** kolom, in rij 3. Hiervoor delen we eerst de tweede rij door -2 en de derde rij door -3:

$$\xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_3/-3]{R_2 \to R_2/-2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

en trekken vervolgens van de derde rij de tweede rij af

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Nu kunnen we kiezen:

- ofwel plaatsen we door het toepassen van elementaire rijoperaties nog een nul in de tweede kolom in rij 1

  $$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  en bekomen we het gelijkwaardige maar eenvoudigere stelsel

  $$\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$$

  Er is dus een unieke oplossing die onmiddellijk kan worden afgelezen: $(u, v) = (3, 2)$.

- ofwel noteren we meteen het gelijkwaardige stelsel

  $$\begin{cases} u + v = 5 \\ v = 2 \end{cases}$$

  en lossen het verder op met achterwaartse substitutie

  $$\begin{cases} u = 5 - v \\ v = 2 \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$$

We vinden in beide gevallen

$$\mathrm{Opl}(S) = \{\ (3, 2)\ \}$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/23H.2)

22.4 Lineaire stelsels: oplossen via echelonvorm

Voorbeeld 22.4.5. Het stelsel

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 1 \end{cases}$$

heeft als uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

We vereenvoudigen de matrix, en dus het stelsel, door rijoperaties toe te passen. In een eerste stap zorgen we dat er nullen staan in de **eerste** kolom in rij 2 en rij 3:

De tweede rij met drie vermenigvuldigen (een herschaling) geeft

$$\xrightarrow{R_2 \to 3R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 3 & -6 & 6 & 9 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

en dan levert bij de tweede rij de eerste rij optellen een nul in de eerste kolom op de tweede rij:

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Deze twee elementaire operaties samen kunnen beschouwd worden als één (niet elementaire) operatie: vervang rij 2 door 3 maal zichzelf plus rij 1 ($R_2 \to 3R_2 + R_1$).

Op dezelfde manier levert rij 3 vervangen door 3 maal zichzelf plus 2 maal rij 1:

$$\xrightarrow{R_3 \to 3R_3 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{array}\right]$$

Door in deze eerste stap door middel van rijoperaties nullen te plaatsen in de eerste kolom in rij 2 en rij 3, zijn in dit voorbeeld ook meteen nullen terecht gekomen in de **tweede** kolom.

In de volgende stap plaatsen we een nul in de **derde** kolom in rij 3.

$$\xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_3/13]{R_2 \to R_2/5} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nu kunnen we kiezen:

- ofwel plaatsen we door het toepassen van elementaire rijoperaties nog een nul in de derde kolom in rij 1

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Lineaire stelsels: oplossen via echelonvorm

en delen we de eerste rij door -3 om verder te vereenvoudigen

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1/(-3)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Zo bekomen we het gelijkwaardige maar eenvoudigere stelsel

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} s & -2t & +0u & -v & +3w & = -2 \\ & & u & +2v & -2w & = 1 \end{array}\right.$$

Voor willekeurige waarden voor t, v en w vinden we de bijhorende u en s als

$$\left\{\begin{array}{rcl} s & = & -2 + 2t + v - 3w \\ u & = & 1 - 2v + 2w \end{array}\right.$$

- ofwel noteren we meteen het gelijkwaardige stelsel

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ & & u & +2v & -2w & = 1 \end{array}\right.$$

en lossen het verder op met achterwaartse substitutie

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3s & = & 5 - 6t + u - v + 7w = 5 - 6t + 1 - 2v + 2w - v + 7w \\ u & = & 1 - 2v + 2w \end{array}\right.$$

Voor willekeurige waarden voor t, v en w vinden we de bijhorende u en s als

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3s & = & 6 - 6t - 3v + 9w \\ u & = & 1 - 2v + 2w \end{array}\right. \quad \text{of} \quad \left\{\begin{array}{rcl} s & = & -2 + 2t + v - 3w \\ u & = & 1 - 2v + 2w \end{array}\right.$$

We vinden in beide gevallen

$$\text{Opl}(S) = \{\ (-2 + 2t + v - 3w, t, 1 - 2v + 2w, v, w) \mid t, v, w \in \mathbb{R}\}$$

We bestuderen de methode die toegepast werd in bovenstaande voorbeelden nu wat formeler.

Definitie 22.4.2. Een matrix is in **rijcanonieke vorm** of **gereduceerde rijechelonvorm** als:

(a) het eerste niet-nul element in een rij is steeds 1. Dergelijk element noemen we een **spil** (Engels: pivot).

(b) boven en onder elke spil staan enkel nullen.

(c) voor elke spil geldt dat de spil van een *lagere* rij steeds verder naar *rechts* staat.

(d) nulrijen staan onderaan staan (als er zijn).

Opmerking 22.4.2.

- Elke matrix kan je met behulp van elementaire rijoperaties in rijcanonieke vorm brengen.
- In de verdere voorbeelden zullen we de spilelementen *omcirkelen*.
- De derde regel leidt tot de kenmerkende (dalende) *trap*- of echelonvorm met de spilelementen.

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Lineaire stelsels: oplossen via echelonvorm

- Er bestaat ook een meer algemene, niet noodzakelijk *gereduceerde rijechelonvorm*: dan vervalt de voorwaarde dat *boven* de spil nullen moeten staan en dat de spillen 1 moeten zijn. Zowel met de gereduceerde als met de niet-gereduceerde echelonvorm kunnen stelsels worden opgelost, zoals getoond in bovenstaande voorbeelden. Bij de niet-gereduceerde echelonvorm gebruik je achterwaartse substitutie om de oplossingen te vinden, bij de gereduceerde echelonvorm zijn de oplossingen direct af te lezen.

In onderstaande voorbeelden stelt een $*$ een willekeurig getal voor, al dan niet 0.

Voorbeeld 22.4.6. Voorbeelden van matrices in rijcanonieke vorm of gereduceerde rijechelonvorm :

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 22.4.7. Voorbeelden van matrices in rijechelonvorm maar niet in gereduceerde rijechelonvorm:

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 7 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 22.4.8. Voorbeelden van matrices NIET in rijechelonvorm:

$$\begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & * & * \\ 0 & 1 & \textcircled{1} & * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oefening 22.4.1. Staan volgende matrices in rijcanonieke vorm (of ook: gereduceerde echelonvorm) ?

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Lineaire stelsels: oplossen via echelonvorm

1. $\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$ Ja | Nee

2. $\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$ Ja | Nee

3. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ Ja | Nee

4. $\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&1&3\end{bmatrix}$ Ja | Nee

5. $\begin{bmatrix}1&-2&0&-1&3&-2\\0&0&1&2&-2&1\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ Ja | Nee

6. $\begin{bmatrix}1&-2&0&-1&3&-2\\0&0&1&2&-2&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ Ja | Nee

Opmerking 22.4.3. In Voorbeeld 22.4.5 werden in de *eerste kolom* alle elementen nul gemaakt behalve het element links boven (dat zelf verschillend was van nul) door de andere rijen te herschalen en een gepast veelvoud van de eerste rij daarvan af te trekken. Dit noemen we het *schoonvegen van een kolom*.

De **eliminatiemethode van Gauss** veegt achtereenvolgens verschillende kolommen van de matrix $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ schoon. Hiervoor gebruiken we in elke stap een van nul verschillend zogenaamd *spilelement*, dat telkens dezelfde rol speelt als het element links boven in voorbeeld 22.4.5.

Voorbeeld 22.4.9 (spilelement)**.** Hoe vind je een spilelement? Een spil wordt eerst en vooral steeds gezocht in de deelmatrix *onder en rechts* van de vorige spil. Bij het zoeken van de eerste spil is deze deelmatrix de gehele matrix. Als we verder werken op voorbeeld 22.4.5, bekijken we dus de volgende matrix die we bekomen hadden maar dan zonder de eerste rij en de eerste kolom, als volgt:

uit $\begin{bmatrix}-3&6&-1&1&-7&5\\0&0&5&10&-10&5\\0&0&13&26&-26&13\end{bmatrix}$ halen we de deelmatrix $\begin{bmatrix}0&5&10&-10&5\\0&13&26&-26&13\end{bmatrix}$

In deze deelmatrix zoeken we *de eerste kolom die niet volledig uit nullen bestaat*. In het voorbeeld is dat de tweede kolom van de 2×5 deelmatrix. We kiezen het bovenste niet-nul element, 5, als spil en vegen daarmee de hele derde kolom van de totale matrix schoon, zowel boven als onder de spil. Hiertoe combineren we zowel de eerste als de derde rij met de tweede om boven en onder de 5 een nul te bekomen als volgt.

We nemen terug de volledige matrix (en niet de deelmatrix, die enkel diende om de nieuwe spil te bepalen):

$$\begin{bmatrix}-3&6&-1&1&-7&5\\0&0&5&10&-10&5\\0&0&13&26&-26&13\end{bmatrix}$$

Door bij elke rij een geschikt veelvoud op te tellen van de **spilrij** (rij 2), kunnen we de **spilkolom** (kolom 3) 'schoonvegen'. We kunnen, zoals in Voorbeeld 22.4.5, eerste rij 2 delen door 5 en rij 3 door 13, of we gaan als volgt te werk:
Rij 1 vervangen door vijf maal zichzelf plus rij 2 levert

$$\begin{bmatrix}-15&30&0&15&-45&30\\0&0&5&10&-10&5\\0&0&13&26&-26&13\end{bmatrix}$$

Rij 3 vervangen door 5 maal zichzelf min 13 maal rij 2 levert

$$\begin{bmatrix}-15&30&0&15&-45&30\\0&0&5&10&-10&5\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Lineaire stelsels: oplossen via echelonvorm

Merk op dat bij het schoonvegen van de derde kolom de nullen die we al bekomen hadden in de eerste twee kolommen niet gewijzigd zijn.

Via een herschaling van rij 1 en rij 2 zorgen we tenslotte nog dat het eerste element van de niet-nulrijen een 1 is: Dit levert

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deze matrix is in rijcanonieke vorm.

Merk op dat in de bovenstaande afleiding geen rijverwisselingen voorkwamen, enkel herschalingen en optellingen. Veronderstel echter dat we volgende deelmatrix hadden gevonden:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

Dan is de tweede kolom van de deelmatrix nog steeds de eerste niet-nulkolom. Maar het eerste niet-nulelement, 13, staat dan niet bovenaan. In zo'n geval moet de rij van de nieuwe spil door een verwisseling net onder de rij van de vorige spil gebracht worden om tot een echte trapvorm te komen. Dus zouden we in dit voorbeeld rij 2 met rij 3 moeten verwisselen.

Bij een uitgebreide matrix in *rijcanonieke vorm* kan je de oplossing van een stelsel direct *aflezen*:

Eigenschap 22.4.2 (Oplossingen van een stelsel in rijcanonieke vorm)**.**

Voor een stelsel S met uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$ *in rijcanonieke vorm* geldt:

- De **spilkolommen** zijn de kolommen die een spil bevatten .
- De **hoofdonbekenden** of **gebonden onbekenden** zijn de onbekenden die horen bij een spilkolom, de andere onbekenden zijn de **nevenonbekenden** of **vrije onbekenden**.
- Het *aantal* oplossingen van het stelsel hangt af van de *plaats* van de spilelementen:
  - *de laatste kolom* (= het rechterlid) bevat een spil: er is **geen oplossing**.
    Inderdaad, het stelsel is *strijdig*, want
    een rij $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$ komt overeen met de strijdige vergelijking $0x_0 + \dots 0x_n = 1$.
  - *elke kolom behalve de laatste* bevat een spil: er is een **unieke oplossing**.
    Inderdaad, de matrix is dan van de vorm (met $b_i \in \mathbb{R}$)

    $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

    en de overeenkomstige vergelijkingen geven dus direct de unieke oplossing: $x_i = b_i$.
  - in alle andere gevallen: er zijn **oneindig veel oplossingen**.
    Inderdaad, de matrix is dan van de vorm (met de b_i en * willekeurige getallen)

    $$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & * & 0 & * & 0 & * & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

    Bij elke willekeurige keuze van de *vrije* onbekenden, hoort dan precies één set waarden voor de gebonden onbekenden die een oplossing opleveren voor het stelsel. Het aantal vrije onbekenden noemt men ook het **aantal vrijheidsgraden** of de **dimensie** van de oplossingsverzameling.

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Lineaire stelsels: oplossen via echelonvorm

Opmerking 22.4.4. Als een *homogeen* stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ een unieke oplossing oplossing heeft, dan is dit altijd de nulvector $\mathbf{x} = 0$.

Voorbeeld 22.4.10. [Vervolg van Voorbeeld 22.4.9]

In het vorige voorbeeld berekenden we voor het stelsel S : $\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 1 \end{cases}$

de rijcanonieke vorm

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Voor dit stelsel zijn de *eerste* en de *derde* kolom de *spilkolommen*: s en u zijn dus gebonden onbekenden, en t, v en w vrije onbekenden.

Bij elke willekeurige keuze van vrije onbekenden t, v, w vinden we precies één set van waarden voor de gebonden onbekenden s en u. Als we t, v, w *vrij* kiezen als

$$t = a, \quad v = b, \quad w = c,$$

met a, b, en c willekeurige reële getallen, dan ligt de waarde van de gebonden onbekenden vast om een oplossing te hebben voor het stelsel: de *gebonden variabelen* hebben dus een waarde die *gebonden* is aan de vrije keuzes voor de waarden van de vrije variabelen. De gebonden variabelen zullen dus uitdrukkingen worden in de *parameters* a, b en c. Elk van de vergelijkingen in de rijcanonieke vorm

$$\begin{cases} s & -2t & & -v & +3w & = -2 \\ & & u & +2v & -2w & = 1 \end{cases}$$

bevat immers precies één van de gebonden onbekenden, die we daar telkens uit kunnen 'berekenen in functie van de vrije onbekenden':

$$\begin{cases} s & = & -2 & +2a & +b & -3c \\ u & = & 1 & & -2b & +2c \end{cases}$$

Samen levert dat de volledige oplossing

$$(s, t, u, v, w) = (-2 + 2a + b - 3c, a, 1 - 2b + 2c, b, c)$$

of

$$(s, t, u, v, w) = (-2, 0, 1, 0, 0) + a(2, 1, 0, 0, 0) + b(1, 0, -2, 1, 0) + c(-3, 0, 2, 0, 1)$$

met a, b en c willekeurige reële getallen. De oplossingsverzameling is dus

$$\text{Opl}(S) = \{(-2 + 2a + b - 3c, a, 1 - 2b + 2c, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} .$$

Opmerking 22.4.5. Het is niet strikt nodig om te schrijven dat $t = a, v = b, w = c$ voor willekeurige $a, b, c \in \mathbb{R}$. Je kan dan even goed zeggen dat $t, v, w \in \mathbb{R}$ willekeurig zijn. Je kan de oplossingsverzameling dus ook schrijven als

$$\text{Opl}(S) = \{(-2 + 2t + v - 3w, t, 1 - 2v + 2w, v, w) \mid t, v, w \in \mathbb{R}\} .$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.4 Lineaire stelsels: oplossen via echelonvorm

Voorbeeld 22.4.11. De uitgebreide matrix van het homogene stelsel

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 0 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 0 \end{cases}$$

is $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right]$.

Dit stelsel heeft dezelfde matrix $\mathbf{A}$ als voorbeeld 22.4.5, maar het rechterlid is 0. De oplossingsmethode verloopt volledig analoog, alleen bestaat de laatste kolom van de uitgebreide matrix uit nullen. *Dergelijke nulkolom blijft onveranderd doorheen de verschillende rijoperaties!* De rijcanonieke vorm is dan ook dezelfde, op de laatste kolom na. De oplossingen zijn

$$\mathrm{Opl}(S) = \{(2a + b - 3c, a, -2b + 2c, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

CC BY-NC-SA 4.0

22.4.A Oefeningen lineaire stelsels

22.4.A.1 Niveau 2

Oefening 22.4.2. Schrijf de volgende stelsels in matrixvorm. Bepaal de oplossingenverzameling door met de eliminatiemethode van Gauss de uitgebreide matrix in rijgereduceerde echelonvorm te brengen.

1. $S_1 = \begin{cases} 3x & -2y & +z & = 4 \\ 3x & +y & -z & = 2 \\ x & & +3z & = 1 \end{cases}$

2. $S_2 = \begin{cases} s + 2t + 3w & = 1 \\ u + 2w & = 2 \\ v - w & = 3 \end{cases}$

3. $S_3 = \begin{cases} 2x & +y & +z & = 1 \\ 4x & +y & +3z & = 1 \\ -2x & +2y & +z & = 7 \end{cases}$

4. $S_4 = \begin{cases} x & +2y & +z & +4u & = -1 \\ 2x & +4y & +2z & +u & = 5 \\ -x & -2y & & -u & = 0 \end{cases}$

5. $S_5 = \begin{cases} x & +2y & & = a \\ 4x & +7y & +z & = b \\ -2x & +2y & -6z & = c \end{cases}$

voor de gevallen

(a) $(a, b, c) = (0, 0, 0)$,

(b) $(a, b, c) = (-1, -2, -10)$,

(c) $(a, b, c) = (0, -2, 3)$.

22.4.A.2 Niveau 3

Oefening 22.4.3. Schrijf $(1, 7, 0, 6)$ als een lineaire combinatie van $(0, 2, 3, 1)$, $(1, -1, 1, -1)$ en $(2, 1, 0, 1)$.

CC BY-NC-SA 4.0

22.5 Niet-lineaire stelsels

Er zijn ook stelsels met niet-lineaire vergelijkingen, deze noemen we *niet-lineaire stelsels*.

Voorbeeld 22.5.1. Los volgende stelsels op

1. $S_1 = \begin{cases} xy + y^2 - 2y & = 0 \\ 2x^2 - 2y^2 - 4 & = 0 \end{cases}$

Uitwerking: We kunnen de eerste vergelijking ontbinden in factoren en de tweede vergelijking herschalen, dit geeft

$$S_1 = \begin{cases} y(x + y - 2) & = 0 \\ x^2 - y^2 - 2 & = 0 \end{cases}$$

Uit de eerste vergelijking vinden we $y = 0$ of $x + y - 2 = 0$. We kunnen deze twee gevallen nu uitwerken.

- $\mathbf{y = 0}$: In dit geval wordt de tweede vergelijking $x^2 - 2 = 0$, en dus $x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$. We vinden dus twee oplossingen, namelijk $\left(\sqrt{2}, 0\right)$ en $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$.
- $\mathbf{x + y - 2 = 0}$: In dit geval hebben we $y = 2 - x$ en wordt de tweede vergelijking $x^2 - (2 - x)^2 - 2 = 0$. Dit uitwerken geeft $x^2 - (4 - 4x + x^2) - 2 = 0$ en dus $4x - 6 = 0$. Deze vergelijking heeft als oplossing $x = \frac{3}{2}$, dit geeft $y = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, dus vinden we in dit geval de oplossing $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

We vinden dus de oplossingsverzameling $\text{Opl}(S_1) = \left\{\left(\sqrt{2}, 0\right), \left(-\sqrt{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2. $S_2 = \begin{cases} e^{x-y}\big(2 - x(y + 1)\big) & = 0 \\ e^{x-y}\big(2 - y(x + 1)\big) & = 0 \end{cases}$

Uitwerking: Merk op dat $e^{x-y} \neq 0$, dus we kunnen dit stelsel herschrijven als

$$\begin{cases} 2 - x(y + 1) & = 0 \\ 2 - y(x + 1) & = 0 \end{cases}$$

Dit kunnen we ook schrijven als

$$\begin{cases} x(y + 1) & = 2 \\ y(x + 1) & = 2 \end{cases}$$

Hieruit volgt dat we de twee vergelijkingen kunnen combineren, dit geeft $x(y + 1) = y(x + 1)$. Dit uitwerken geeft $xy + x = xy + y$ en dus $x = y$. Als we dit terug invullen in de eerste vergelijking vinden we $x(x + 1) = 2$, wat de tweedegraadsvergelijking $x^2 + x - 2 = 0$ geeft. De discriminant is $D = 1^2 + 4 \cdot 2 = 9$, dus de oplossingen zijn $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = 1$ en $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = -2$. Aangezien $x = y$ hebben we dan twee oplossingen, de oplossingsverzameling is $\text{Opl}(S_2) = \{(1, 1), (-2, -2)\}$.

3. $S_3 = \begin{cases} y^2 - 2x & = 0 \\ x^2 + y^2 + 2xy & = 0 \end{cases}$

Uitwerking: Merk op dat we in de tweede vergelijking een merkwaardig product kunnen herkennen, we kunnen de vergelijking herschrijven als $(x + y)^2 = 0$. Deze vergelijking kan enkel voldaan zijn als $x + y = 0$ en dus $x = -y$. Dit invullen in de eerste vergelijking geeft $y^2 + 2y = 0$. Als we dit ontbinden in factoren vinden we $y(y + 2) = 0$ en dus $y = 0$ of $y + 2 = 0$, dit tweede geval betekent $y = -2$. We vinden dus twee oplossingen, de oplossingsverzameling is $\text{Opl}(S_3) = \{(0, 0), (2, -2)\}$.

CC BY-NC-SA 4.0

22.5 Niet-lineaire stelsels

Opmerking 22.5.1.

Bij het oplossen van niet-lineaire stelsels kunnen volgende strategieën nuttig zijn:

- Ontbind beide vergelijkingen in factoren.
- Gebruik de eigenschap $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ of $b = 0$.
- Werk in verschillende gevallen.
- Combineer de vergelijkingen.

Opmerking 22.5.2.

Merk op dat we een vergelijking altijd kunnen herschalen zonder de oplossingsverzameling van het stelsel aan te passen. Een vergelijking van de vorm $2x + 2y = 0$ kunnen we vervangen door $x + y = 0$ door te vermenigvuldigen met $\frac{1}{2}$, maar ook de vergelijking $e^{x-y}(2 - x) = 0$ kunnen we vervangen door $2 - x = 0$ door te vermenigvuldigen met e^{-x+y}. Dit mag omdat $e^{-x+y} \neq 0$.

Oefening 22.5.1. Los volgende stelsels op

1. $S_1 = \begin{cases} x(2 - y^2) &= 0 \\ y(3 - x^2) &= 0 \end{cases}$
2. $S_2 = \begin{cases} (x + 1)\, e^{x+y} - (x^2 + y^2)\, e^{x+y} &= 0 \\ y\, e^{x+y} + (x^2 + y^2)\, e^{x+y} &= 0 \end{cases}$
3. $S_3 = \begin{cases} (x - y)^2 - 1 &= 0 \\ (x + y)(x + y - 1) &= 0 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 23

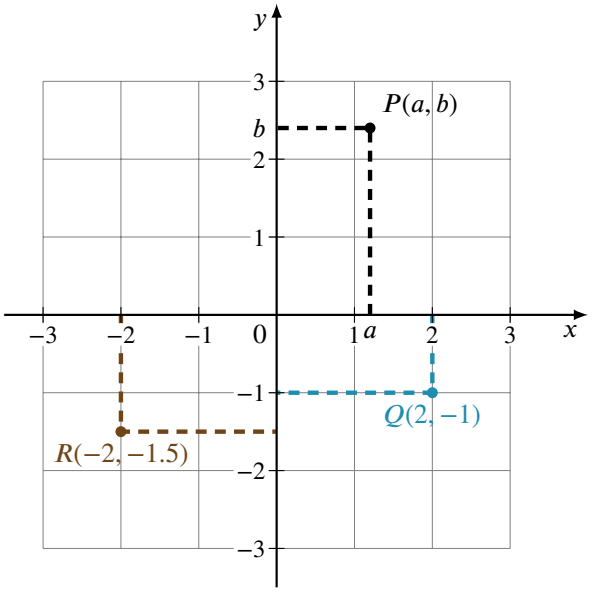
Vlakke meetkunde

(Versie 2026/11/23H.2)

23.1 Cartesiaans assenstelsel en coördinaten

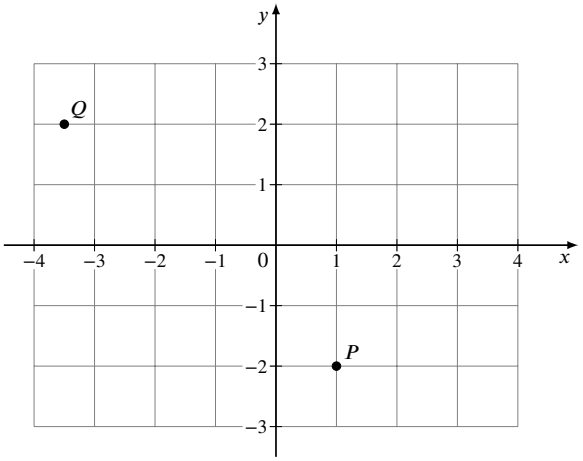
Een **cartesiaans assenstelsel** bestaat uit een horizontale x-as en een verticale y-as die loodrecht op elkaar staan en waarbij de eenheden op beide assen even groot zijn.

Ten opzichte van dergelijk assenstelsel wordt elk punt volledig beschreven door *een koppel* (a, b) *reële getallen* (de **coördinaten** van het punt): eerst de horizontale x-coördinaat en dan de verticale y-coördinaat. We noteren $P(a, b)$ voor punt P met coördinaten (a, b).



Via coördinaten kunnen meetkundige problemen worden opgelost door ze met algebraïsche methoden *uit te rekenen*.

Oefening 23.1.1. De coördinaten van P zijn $(\ldots\ldots, \ldots\ldots)$, die van Q zijn $(\ldots\ldots, \ldots\ldots)$.



CC BY-NC-SA 4.0

23.2 Basiseigenschappen van driehoeken

Driehoeken zijn erg belangrijke objecten bij meetkundige problemen. Enerzijds kunnen we van elke *hoek* eenvoudig een rechthoekige *drie*hoek maken door een loodlijn te tekenen op één van de benen van de hoek. Anderzijds kan de studie van veelhoeken zoals rechthoeken of zeshoeken dikwijls worden herleid tot de studie van driehoeken door *diagonalen* te tekenen. Zo kan de oppervlakte van een veelhoek –minstens theoretisch– worden berekend als de som van de oppervlakte van een aantal driehoeken.

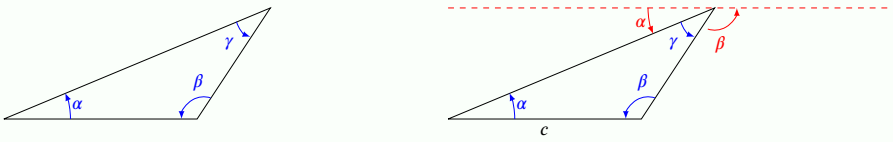


Een hoek Een driehoek Eén *veel*hoek *Veel* driehoeken

Eigenschap 23.2.1. De *som van de hoeken* van een driehoek is een gestrekte hoek.

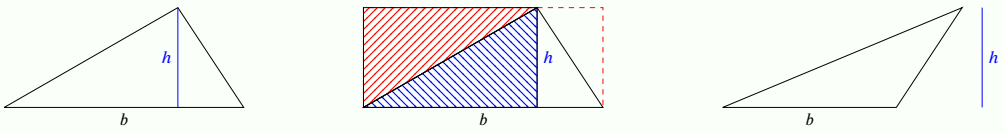
In symbolen:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (\text{of } \alpha° + \beta° + \gamma° = 180°)$$



Door bijvoorbeeld een rechte *evenwijdig met zijde c* te tekenen door de overstaande hoek γ blijkt inderdaad dat α, β en γ samen een gestrekte hoek vormen.

Eigenschap 23.2.2. De *oppervlakte* van een driehoek is $\dfrac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2}$



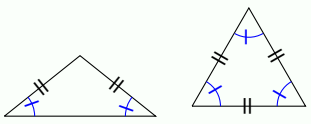
De oppervlakte van een driehoek is inderdaad precies de helft van die van de rechthoek met zijden b en h. De oppervlakte hangt niet af van de *vorm* van de driehoek, enkel van een *basis* en de bijhorende *hoogte*.

Definitie 23.2.1.

Een **gelijkbenige** driehoek is een driehoek met (minstens) twee gelijke zijden.
Een **gelijkzijdige** driehoek is een driehoek met drie gelijke zijden.

Eigenschap 23.2.3.

Een gelijkbenige driehoek heeft twee gelijke basishoeken.
Een gelijkzijdige driehoek heeft drie gelijke hoeken.



CC BY-NC-SA 4.0

23.2 Basiseigenschappen van driehoeken

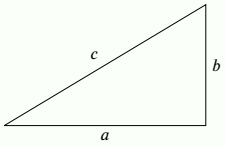
De som van de hoeken is $180°$, dus is elke hoek van een gelijkzijdige driehoek $\frac{180°}{3} = 60°$ of $\frac{\pi}{3}$.

Eigenschap 23.2.4 (Stelling van Pythagoras)**.**

In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de aanliggende zijden.

In symbolen:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Oefening 23.2.1. Bepaal de grootte van de derde hoek van volgende driehoeken:

1. $\alpha = 80°, \beta = 30°$, $\gamma = \ldots\ldots°$.

2. $\beta = 31°, \gamma = 72°$, $\alpha = \ldots\ldots°$.

3. $\alpha = \pi/4, \gamma = \pi/3$, $\beta = \ldots\ldots$ radialen.

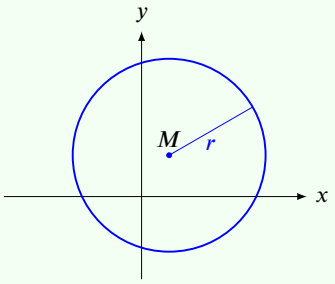
4. Gegeven een gelijkbenige driehoek waarvan één basishoek grootte $\pi/4$ heeft. De andere basishoek heeft dan grootte $= \ldots\ldots$, en de derde hoek heeft grootte $= \ldots\ldots$.

CC BY-NC-SA 4.0

23.3 Basiseigenschappen van de cirkel

Een kort overzicht van enkele belangrijke eigenschappen van *cirkels*:

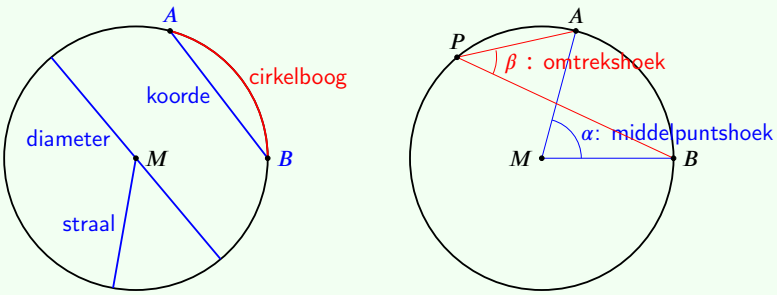
Definitie 23.3.1. De **cirkel** met **middelpunt** M en **straal** r is de verzameling van alle punten die op een afstand r van het punt M liggen.



Volgende begrippen worden dikwijls gebruikt in verband met cirkels:

Definitie 23.3.2 (Begrippen in verband met cirkels)**.**

- Een **koorde** van een cirkel is een lijnstuk waarvan beide eindpunten op de cirkel liggen.
- Een **cirkelboog** is een deel van een cirkel tussen twee van zijn punten.
- Een **middellijn** of **diameter** van een cirkel is een koorde die het middelpunt bevat. Een diameter is een koorde van maximale lengte. Het woord diameter wordt behalve voor het lijnstuk zelf ook gebruikt voor de *lengte* van het lijnstuk. Hetzelfde fenomeen doet zich voor bij het begrip straal: de straal van een cirkel is een getal, maar soms ook een lijnstuk tussen het middelpunt en een punt van de cirkel.
- Een **middelpuntshoek** op een koorde is een hoek waarvan het hoekpunt samenvalt met het middelpunt en de benen door de eindpunten van de koorde gaan.
- Een **omtrekshoek** op een koorde is een hoek waarvan het hoekpunt op de cirkel ligt en de benen door de eindpunten van de koorde gaan.



We zeggen dus dat middelpuntshoeken en omtrekshoeken *op een koorde* of *op een cirkelboog* staan, maar ook dat een omtrekshoek of middelpuntshoek een koorde of cirkelboog *afsnijden* op de cirkel.

Eigenschap 23.3.1 (Eigenschappen van een cirkel)**.**

(a) De omtrek van een cirkel met straal r is $2\pi r$.

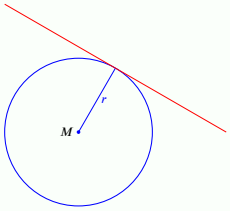
CC BY-NC-SA 4.0

23.3 Basiseigenschappen van de cirkel

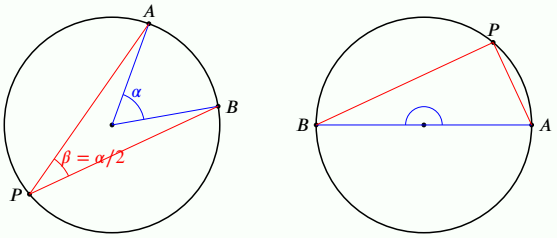
(b) De oppervlakte van een cirkel met straal r is πr^2.

(c) De diameter van een cirkel is het dubbel van de straal.

(d) De raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de straal naar het raakpunt.



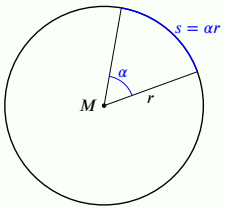
(e) Elke omtrekshoek meet de helft van de middelpuntshoek die op dezelfde boog staat.



Als α een gestrekte hoek van $180°$ is, volgt dat de omtrekshoek β op een halve cirkel $90°$ meet. Dus:

(f) Elke driehoek op een diameter met derde hoekpunt op de cirkel is rechthoekig.

(g) De lengte van een boog s die een middelpuntshoek α afsnijdt op een cirkel met straal r is gegeven door αr als de hoek α wordt uitgedrukt in radialen.



CC BY-NC-SA 4.0

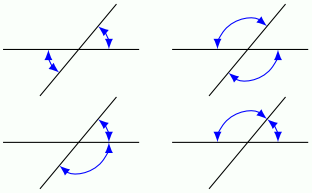
23.4 Basiseigenschappen van hoeken en rechten

Hoeken en lengten voldoen aan volgende eenvoudige maar belangrijke eigenschappen:

Eigenschap 23.4.1. Bij twee snijdende rechten geldt:

Overstaande hoeken zijn *gelijk*.

Aanliggende hoeken zijn *supplementair*.



Eigenschap 23.4.2. Bij het snijden van twee evenwijdige rechten geldt:

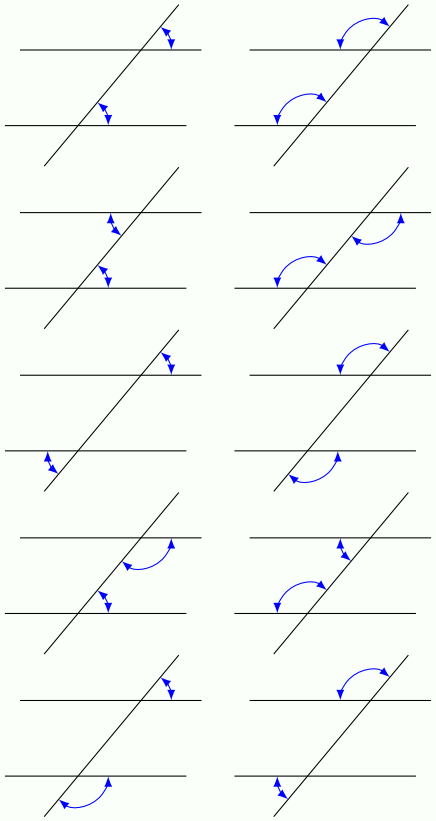
Overeenkomstige hoeken zijn gelijk

Verwisselende binnenhoeken zijn gelijk

Verwisselende buitenhoeken zijn gelijk

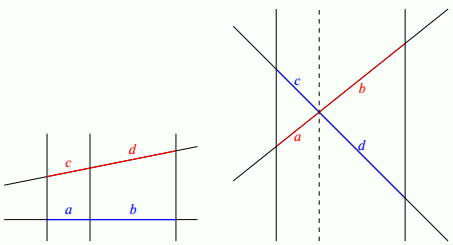
Binnenhoeken aan dezelfde kant zijn supplementair

Buitenhoeken aan dezelfde kant zijn supplementair



Eigenschap 23.4.3 (Stelling van Thales)**.**

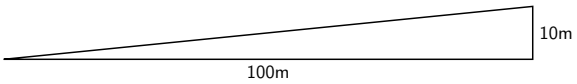
Evenwijdige projectie behoudt de verhoudingen van lijnstukken: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.



CC BY-NC-SA 4.0

23.5 De vergelijking van een rechte

De helling van een rechte is de verticale toename gedeeld door de bijhorende horizontale toename.



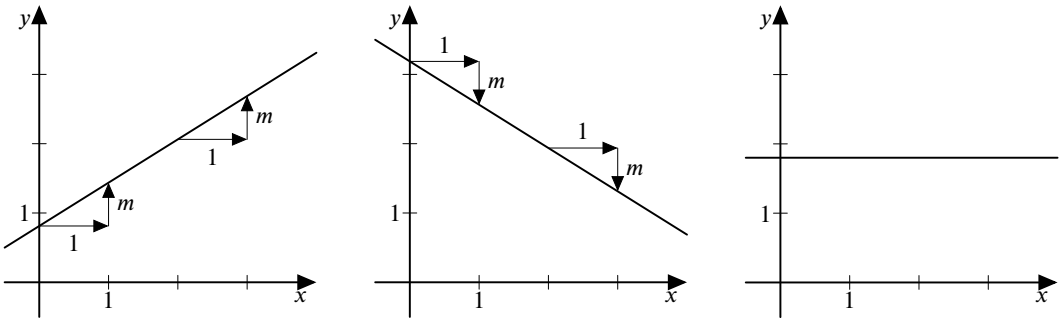
$$\text{Helling} = \frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = \frac{10}{100} = 0.1$$

Definitie 23.5.1. De **richtingscoëfficiënt** of **rico** van een rechte is de *helling* van die rechte.

Als de rechte door de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) gaat, met $x_1 \neq x_2$, is de rico m gelijk aan

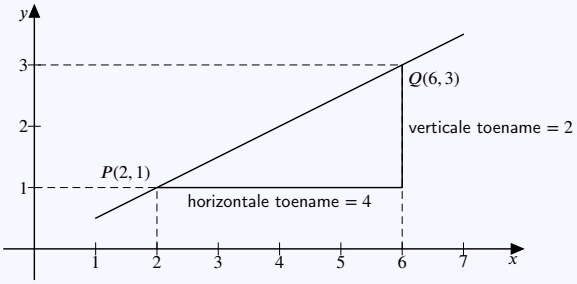
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Merk op: bij stijgende rechten is $m > 0$ en bij dalende rechten is $m < 0$. Horizontale rechten hebben rico gelijk aan 0, terwijl verticale rechten geen rico hebben.



$m > 0$ $m < 0$ $m = 0$

Voorbeeld 23.5.1. Bereken de rico van de rechte door de punten $P(2, 1)$ en $Q(6, 3)$.



De rico van de rechte kan als volgt berekend worden:

$$\frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = \frac{3-1}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

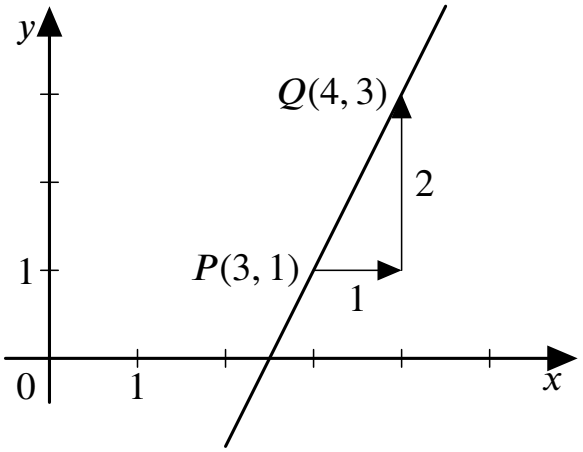
Door twee punten gaat precies één rechte, en een rechte ligt dus volledig vast als je twee punten kent. Een rechte wordt echter ook volledig bepaald door haar rico en één van haar punten. Inderdaad, je kan voor een rechte door het punt $P(3, 1)$ met rico $m = 2$ een tweede punt Q construeren.

Dat $m = \dfrac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}} = 2$ kan je interpreteren als volgt: indien je één eenheid naar rechts gaat, dan moet je twee eenheden naar boven gaan, wil je op de rechte blijven. We vertrekken vanuit het punt

CC BY-NC-SA 4.0

23.5 De vergelijking van een rechte

$P(3,1)$. We gaan één eenheid naar rechts, dan zitten we in het punt $P(4,1)$. Ten slotte gaan we m eenheden naar boven. We belanden in het punt $Q(4,3)$. De rechte gaat door $P(3,1)$ en $Q(4,3)$.



Voorbeeld 23.5.2. Neem de rechte die door punt $P(3,5)$ gaat en met rico -3. Zoek een ander punt van deze rechte. Tip: maak even een schets om dit te visualiseren.

Vertrek van het punt $P(3,5)$ en ga één eenheid naar rechts en drie eenheden naar beneden. Je komt uit in het punt $(4,2)$. Uiteraard zijn er meerdere mogelijkheden (bijvoorbeeld: $(2,8), (5,-1), \ldots$).

Eigenschap 23.5.1.

- De vergelijking van een niet-verticale rechte kan steeds geschreven worden in de vorm

$$y = mx + q,$$

waarbij m de rico is en q het snijpunt met de y-as.

- De vergelijking van de rechte door het **punt** (x_1, y_1) met **rico** m.

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

- De vergelijking van de rechte door de **twee punten** (x_1, y_1) en (x_2, y_2) met $x_1 \neq x_2$.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

- De vergelijking van een verticale rechte is steeds van de vorm $x = b$.

Oefening 23.5.1.

1. Voldoet het punt $(1000, -1750)$ aan de vergelijking van de rechte $y = -2x + 250$? Ja | Nee

2. Behoort het punt $(5,1)$ tot de rechte met vergelijking $y - 20 = 4x$? Ja | Nee

Voorbeeld 23.5.3. Stel de vergelijking op van de rechte in de vorm $y = mx + q$.

CC BY-NC-SA 4.0

23.5 De vergelijking van een rechte

1. rechte door $(-5,-2)$ en $(-1,-3)$. Antwoord: $y = -\frac{1}{4}x - \frac{13}{4}$

2. rechte door $(0,0)$ en $(2,3)$. Antwoord: $y = \frac{3}{2}x$

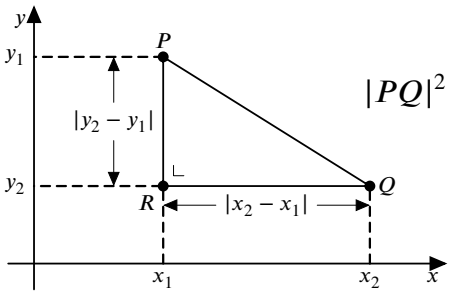
3. rechte door $(1,6)$ met rico -4. Antwoord: $y = -4x + 10$

CC BY-NC-SA 4.0

23.6 Afstand tussen twee punten

Definitie 23.6.1. We noteren met $|AB|$ de **afstand** tussen twee punten A en B. Er geldt $|AB| = |BA|$.

De stelling van Pythagoras levert een *formule* voor de afstand $|PQ|$ tussen twee punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$. Hiervoor construeren we punt R zoals op de tekening , met driehoek PQR rechthoekig in R.



$$\begin{aligned} |PQ|^2 &= |PR|^2 + |RQ|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

Eigenschap 23.6.1. De **afstand** tussen punt P met coördinaten (x_1, y_1) en Q met coördinaten (x_2, y_2) is

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Voorbeeld 23.6.1. De afstand tussen punt P met coördinaten $(2, 3)$ en Q met coördinaten $(-2, -1)$ is

$$|PQ| = \sqrt{((-2) - 2)^2 + ((-1) - 3)^2} = \sqrt{32} \approx 5.66$$

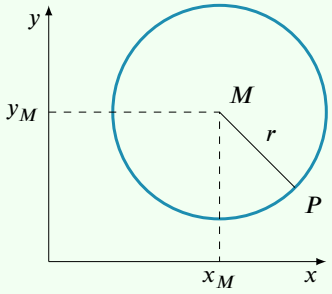
Oefening 23.6.1. De afstand tussen de punten $(-1, 0)$ en $(2, 4)$ is ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

23.7 De vergelijking van een cirkel

Definitie 23.7.1. De **cirkel** met **middelpunt** M en **straal** r is de verzameling van alle punten die op een afstand r van het punt M liggen.

Dus: een punt P ligt op de cirkel met middelpunt M en straal r als en slechts als $|PM| = r$.



De vergelijking van een cirkel is een nodige en voldoende voorwaarde waar de coördinaten van een punt aan moeten voldoen opdat dit punt op de cirkel zou liggen. De voorwaarde $|PM| = r$ is equivalent met

$$\sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} = r$$

waarbij (x, y) de coördinaten zijn van het punt P, en (x_M, y_M) de coördinaten van het middelplunt M. Door linkerlid en rechterlid te kwadrateren, bekomen we de vergelijking van de cirkel:

Eigenschap 23.7.1. De cirkel met middelpunt $M(x_M, y_M)$ en straal r heeft als vergelijking

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

Voorbeeld 23.7.1. De cirkel met middelpunt $M = (0, 2)$ en straal 3 heeft als vergelijking

$$(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

of dus

$$x^2 + (y - 2)^2 = 9.$$

Door de kwadraten uit te rekenen krijgen we ook

$$x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$$

Oefening 23.7.1. Ligt $(2, 3)$ op de cirkel met middelpunt $(1, -1)$ en straal 4?

Ja	Nee

Oefening 23.7.2. Stel de vergelijking op van de cirkel met gegeven middelpunt en straal:

1. $M(-1, 0)$ en $r = 1$
2. $M(5, 2)$ en $r = 4$

Voorbeeld 23.7.2. Bepaal het middelpunt en de straal van volgende cirkel: $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 20$

Uitwerking: Om aan deze oefening te beginnen moeten we de gegeven vergelijking herschrijven in de vorm $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$. Denk hierbij aan de formule $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

CC BY-NC-SA 4.0

23.7 De vergelijking van een cirkel

We tellen bij beide leden eenzelfde getal op

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 20 + 5$$

zodat we de vergelijking kunnen schrijven als

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

Dit is de vergelijking van de cirkel met middelpunt $(-1, 2)$ en straal 5.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 24
Appendix

(Versie 2026/11/23H.2)

24.1 Het Griekse alfabet

Om wiskundige objecten te noteren gebruiken we meestal letters. Om de leesbaarheid te verhogen zijn dat typisch vaste reeksen letters per type objecten: f, g en h voor functies, x, y en z voor onbekenden of variabelen, k en l voor parameters, n, m, p voor natuurlijke getallen, z voor complexe getallen, enzovoort.

Omdat de voorraad letters beperkt is, worden in sommige situaties ook Griekse letters gebruikt. Voor hoeken is dat bijvoorbeeld een historisch gegroeide gewoonte.

Hieronder vind je het volledige Griekse alfabet (zowel kleine letters als hoofdletters). Dat kan ooit misschien ook nuttig zijn op vakantie. . . .

Definitie 24.1.1 (Grieks alfabet)**.**

α	A	alfa	ν	N	nu
β	B	beta	ξ	Ξ	xi
γ	Γ	gamma	o	O	omikron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε	E	epsilon	ρ	P	rho
ζ	Z	zeta	σ	Σ	sigma
η	H	eta	τ	T	tau
θ	Θ	theta	υ	Υ	upsilon
ι	I	iota	φ	Φ	phi
κ	K	kappa	χ	X	chi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	M	mu	ω	Ω	omega

Van enkele letters bestaan er verschillende versies:

epsilon: ϵ en ε

phi: ϕ en φ

Volgende symbolen zijn geen Griekse letters, maar ze komen ook regelmatig voor in wiskundige teksten:

∞: oneindig.

$\emptyset$: lege verzameling.

$\aleph$: aleph, voor (een speciale vorm van) oneindig.

∂: delta, voor partiële afgeleiden.

∇: nabla, of 'del' operator, voor vector differentialen.

CC BY-NC-SA 4.0