KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Voorkennistesten Wiskundige methoden voor BMW

(Versie 2026/09/26HB.14)

Inhoudsopgave

0 Inleiding 0.1

0.1 Intro . . . 0.2

1 Basisrekenvaardigheden 1.1

1.1 Introductie Week 1 . . . 1.2

1.2 Begintest Elementair rekenen . . . 1.3

1.3 Haakjes en ontbinden in factoren . . . 1.5

1.4 Breuken . . . 1.9

1.5 Machten . . . 1.15

1.6 Goniometrische cirkel . . . 1.19

1.7 Herhalingsoefeningen breuken, haakjes, machten . . . 1.21

2 Functies 2.1

2.1 Introductie Week 2 . . . 2.2

2.2 Begintest Week 2 . . . 2.3

2.3 Ongelijkheden . . . 2.4

2.4 Absolute waarde . . . 2.10

2.5 Rechten in het vlak . . . 2.13

2.6 De logaritme . . . 2.17

2.7 Exponentiële vergelijkingen . . . 2.21

2.8 Rekenregels voor logaritmen . . . 2.24

3 Afgeleiden 3.1

3.1 Introductie Week 3 . . . 3.2

3.2 Begintest Week 3 . . . 3.3

3.3 Basisregels . . . 3.4

3.4 Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies . . . 3.6

3.5 Afgeleiden van goniometrische functies . . . 3.7

3.6 Product- en quotiëntregel . . . 3.8

3.7 Kettingregel . . . 3.10

4 Afgeleiden (toepassingen) 4.1

4.1 Introductie Week 4 . . . 4.2

4.2 Begintest Week 4 . . . 4.3

4.3 Minimum-Maximumproblemen 4.4
4.4 Partiële afgeleiden 4.13

5 Integralen 5.1
5.1 Introductie Week 5 . . . . . 5.2
5.2 Begintest Week 5 . . . . . 5.4
5.3 Basisintegralen 5.6
5.4 Integratie door substitutie 5.8
5.5 Partiële integratie 5.11
5.6 Splitsen in partieelbreuken 5.16
5.7 Bepaalde integralen 5.22
5.8 Substitutie bij bepaalde integralen 5.24
5.9 Partiële integratie bij bepaalde integralen 5.25

6 Differentiaalvergelijkingen 6.1
6.1 Introductie Week 7 . . . . . 6.2

7 Geen oefenzitting 7.1

8 Differentiaalvergelijkingen (evenwichten) 8.1
8.1 Introductie Week 8 . . . . . 8.2
8.2 Begintest Week 8 . . . . . 8.3
8.3 Scheiden van veranderlijken 8.4

9 Recursievergelijkingen 9.1
9.1 Introductie Week 9 . . . . . 9.2

10 Lineaire algebra 10.1
10.1 Introductie Week 10 . . . . . 10.2
10.2 Begintest Week 10 . . . . . 10.3
10.3 Matrices 10.4
10.4 Matrixvermenigvuldiging 10.9

11 Stelsels van recursievergelijkingen 11.1
11.1 Introductie Week 11 . . . . . 11.2
11.2 Begintest Week 11 . . . . . 11.3

11.3 Complexe getallen 11.4

12 Stelsels van differentiaalvergelijkingen 12.1

12.1 Introductie Week 12 . . . . . 12.2
12.2 Begintest Week 12 . . . . . 12.3
12.3 Eigenwaarden en eigenvectoren 12.4

13 Stelsels van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen 13.1

13.1 Introductie Week 13 . . . . . 13.2
13.2 Begintest Week 13 . . . . . 13.3

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 0
Inleiding

(Versie 2026/09/26HB.14)

0.1 Intro

Deze module is ontwikkeld voor de studenten die het vak 'Wiskundige Methoden voor Biomedische Wetenschappen' volgen.
Per week vind je hier een test waarmee je je voorkennis die nodig is voor de oefenzitting van die week kan testen. Deze testen maken deel uit van de voorbereiding op elke oefenzitting. Maak deze test telkens voor je aan de voorbereiding voor die week begint. In week 1 is er nog geen voorbereiding of oefenzitting, maar wel een zelftest over wiskundige basistechnieken. Deze technieken worden verondersteld gekend te zijn en zullen niet meer aan bod komen in lessen of oefenzittingen.

In de eerste weken zullen deze voorkennistesten vooral leerstof behandelen waarvan we verwachten dat je die in de middelbare school gezien hebt. Is dat niet het geval of zit deze kennis te ver weg, dan zijn er opfrismodules beschikbaar. In de latere weken zullen de voorkennistesten over de leerstof van de vorige weken gaan. Merk je dat je deze leerstof nog niet voldoende onder de knie hebt, dan kan je zelf je leerproces bijsturen door:

(a) het theoriegedeelte van die oefenzitting te herhalen.

(b) de oefeningen uit de oefenzitting opnieuw te maken.

(c) de extra oefeningen van niveau * of ** maken uit de lijst van extra oefeningen op Toledo.

(d) een afspraak te maken bij het monitoraat.

Veel succes gewenst, het didactisch team!

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 1
Basisrekenvaardigheden

(Versie 2026/09/26HB.14)

1.1 Introductie Week 1

In deze eerste lesweek behandelen we enkele basistechnieken: rekenen met haakjes, breuken en machten. Ervaring leert dat studenten die deze technieken niet voldoende onder de knie hebben meer moeite hebben om de oefenzittingen te volgen. Op de volgende pagina vind je een test. Kan je deze test zonder problemen van de eerste keer juist oplossen? Dan heb je deze technieken waarschijnlijk voldoende onder de knie en kan je de herhalingsmodules overslaan. Lukt het iets minder goed? Neem dan nadien de herhalingsmodules door. Heb je daarna nog vragen of problemen? Neem dan contact op met het monitoraat.
Opmerking: In sommige herhalingsmodules vind je blokken met 'Uitweiding'. Deze blokken zijn enkel voor de geïnteresseerden. Je hoeft deze dus niet door te nemen.

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Begintest Elementair rekenen

Indien je deze oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je Elementair Rekenen verder overslaan, anders herhaal je best grondig de rekenregels.

Oefening 1.2.1. Vul aan:

1. $(p+1)^2 + \frac{(p+1)^3}{2} + \frac{(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)^2}{2} \cdot [\ldots\ldots]$

Oefening 1.2.2. Ontbind in factoren.

1. $81x^2y^2 - 25 = \ldots\ldots$

Oefening 1.2.3. Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Je mag veronderstellen dat een uitdrukking die in de noemer staat steeds verschilt van 0.

1. $\dfrac{\frac{a-b}{b}}{1-\frac{a}{b}} = \ldots\ldots$

2. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} = \ldots\ldots$

3. $y^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2y}}{xy}\right)^4 = \ldots\ldots$

4. $\dfrac{-1}{1-\dfrac{x+1}{x}} = \ldots\ldots$

Oefening 1.2.4.

1. $|\sqrt{2}-2| = 2-\sqrt{2}$

Oefening 1.2.5.

1. Als 20% van x gelijk is aan 30, dan is $x = \ldots\ldots$

Oefening 1.2.6. Zet om van graden naar radialen of omgekeerd.

Graden	*Radialen*
120°	……
8°	……
…… °	$7\pi/4$
…… °	$\pi/10$
90°	……
1°	……
…… °	$7\pi/5$

Oefening 1.2.7. Lees de waarden van volgende goniometrische getallen af op de goniometrische cirkel:

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Begintest Elementair rekenen

1. $\cos\frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$
2. $\cos\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$
3. $\sin\frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$
4. $\sin\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$
5. $\tan\frac{\pi}{3} = \ldots\ldots$
6. $\cos\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$
7. $\tan\frac{\pi}{4} = \ldots\ldots$
8. $\cot\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$

Oefening 1.2.8. Vereenvoudig:

1. $\cos(\pi - \alpha) =$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
2. $\sin(\alpha - \pi) =$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
3. $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) =$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
4. $\sin(\pi + \alpha) =$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
5. $\tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Haakjes en ontbinden in factoren

Optellen $(2+3)$ en vermenigvuldigen $(2\cdot 3)$ zijn de twee basisoperaties met getallen. Bij combinaties zoals $2+3\cdot 5$ wordt om historische redenen eerst vermenigvuldigd en dan opgeteld, dus $2+3\cdot 5 = 2+(3\cdot 5) = 2+15 = 17$. Als je de andere volgorde wil *moet* je haakjes zetten: $(2+3)\cdot 5 = 5\cdot 5 = 25$.

Zeker zodra er ook met letters wordt gerekend, wordt het belangrijk om van sommen producten te kunnen maken, of omgekeerd van producten sommen te kunnen maken:

$2\cdot(a+3) = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2a+6$ product van 2 en $a+3$ wordt som van $2a$ en 6
$2\cdot a+6 = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2\cdot(a+3)$ som van $2a$ en 6 wordt product van 2 en $a+3$

Uitwerken van haakjes betekent *producten* herschrijven als *sommen*, zoals $2(a+b) = 2a+2b$.
Ontbinden in factoren betekent een *som* (of getal) herschrijven als een *product*, zoals $2a^2+6a = 2a(a+3)$.

Voor 'haakjes uitwerken' en 'ontbinden' gelden dezelfde regels, maar ze moeten telkens in de andere richting worden gelezen. Van links naar rechts zeggen ze hoe je een product (of een macht, dat is ook een product) schrijft als een som, maar van rechts naar links gelezen zeggen ze hoe je een som schrijft als een product.

Eigenschap 1.3.1. Zij $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(a+b)c &= ac+bc && \text{(distributiviteit van } \cdot \text{ t.o.v. } +)\\
a(c+d) &= ac+ad && \text{(idem, maar met som rechts)}\\
(a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd && \text{(want gelijk aan } (a+b)c+(a+b)d)\\
-(a+b) &= -a-b && \text{(want } (-1)(a+b) = (-1)a+(-1)b)\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 && \text{(kwadraat van een tweeterm)}\\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 && \text{(kwadraat van tweeterm via } (a+(-b))^2)\\
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2 && \text{(verschil van twee kwadraten)}
\end{aligned}$$

Voor hogere machten gelden volgende formules:

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 && \text{(derdemacht van een tweeterm)}\\
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k && \text{(Binomium van Newton)}\\
a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2) && \text{(som van derdemachten)}\\
a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) && \text{(verschil van derdemachten)}\\
a^n-b^n &= (a-b)(a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+\cdots+b^{n-2}a+b^{n-1}) && \text{(verschil van } n^{\text{de}} \text{ machten)}\\
a^n+b^n &= (a+b)(a^{n-1}-ba^{n-2}+b^2a^{n-3}-\cdots-b^{n-2}a+b^{n-1}) && \text{(som } n^{\text{de}} \text{ machten, } n \textbf{ oneven})
\end{aligned}$$

Opmerking 1.3.1.

Het Binomium van Newton staat hier enkel als referentie, het wordt verder nog uitgelegd.

Voorbeeld 1.3.1. Vereenvoudig door de haakjes uit te werken. $(x,y,p,q \in \mathbb{R})$

1. $1-(x-y-1) = -x+y+2$

Uitwerking: $1-(x-y-1) = 1-x+y+1 = -x+y+2$

2. $1-(p-q)+p = q+1$

Uitwerking: $1-(p-q)+p = 1-p+q+p = q+1$

CC BY-NC-SA 4.0

1.3 Haakjes en ontbinden in factoren

Voorbeeld 1.3.2. Werk de haakjes uit: $(x, y \in \mathbb{R})$

1. $(x+y)(x+3y)^2 = x^3+7x^2y+15xy^2+9y^3$

Uitwerking: $(x+y)(x+3y)^2 = (x+y)(x^2+6xy+9y^2) = x^3+6x^2y+9xy^2+yx^2+6xy^2+9y^3 = x^3+7x^2y+15xy^2+9y^3$

Voorbeeld 1.3.3. Vul aan door de voorgestelde factor buiten de haakjes te brengen, en vereenvoudig zo ver mogelijk. $(p, r, s, x \in \mathbb{R})$

1. $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot \left(4p+5\right)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot 2^2 \cdot (p+1) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4(p+1)) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (1 + 4p + 4) \\
&= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 (4p+5)\,.
\end{aligned}$$

2. $(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) = \frac{4r}{3} \cdot (5)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
(3p+2)\frac{4r}{3} - 4r(p-1) &= \frac{4r}{3} \cdot (3p+2) - \frac{4r}{3} \cdot 3 \cdot (p-1) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3 \cdot (p-1)) \\
&= \frac{4r}{3}(3p + 2 - 3p + 3) \\
&= \frac{4r}{3} \cdot 5.
\end{aligned}$$

3. $\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 = \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\frac{xs}{8} + \frac{xs^2}{4} + 3x^3s^3 &= \frac{xs}{8} \cdot 1 + \frac{xs}{8} \cdot 2s + \frac{xs}{8} \cdot 24x^2s^2 \\
&= \frac{xs}{8}(1 + 2s + 24x^2s^2).
\end{aligned}$$

Voorbeeld 1.3.4. Ontbind in factoren. $(x, y, r \in \mathbb{R})$

1. $81x^2y^2 - 25 = (9xy+5)(9xy-5)$

Uitwerking: $81x^2y^2 - 25 = (9xy)^2 - 5^2 = (9xy+5)(9xy-5)$ (verschil van twee kwadraten)

CC BY-NC-SA 4.0

1.3.1 Oefeningen haakjes

1.3.1.1 Niveau 1

Oefening 1.3.1. Vereenvoudig. $(x, y, p, q \in \mathbb{R})$

1. $23 \cdot (1000 - 1) = \ldots\ldots$
2. $(923 + 77)/4 = \ldots\ldots$
3. $-\dfrac{2x + 4xy}{-2x} = \ldots\ldots$
4. $p - (p + q) + 2q = \ldots\ldots$

Oefening 1.3.2. Werk de haakjes uit en vereenvoudig. $(x, y, a \in \mathbb{R})$

1. $a(x + 3) - 3a = \ldots\ldots$
2. $ax + 3 + (-ax) = \ldots\ldots$
3. $2ax + 3 - (-ax) = \ldots\ldots$
4. $1 - (x - y + 1) + x = \ldots\ldots$

Oefening 1.3.3. Werk de haakjes uit. $(a \in \mathbb{R})$

1. $2(a + 3)^2 = \ldots\ldots$
2. $2(a - 3)^2 = \ldots\ldots$
3. $2(-a - 3)^2 = \ldots\ldots$

Oefening 1.3.4. Ontbind in factoren. $(x, y, a \in \mathbb{R})$

1. $x(x + 2) + 7(x + 2) = \ldots\ldots$
2. $3y(4y - 3) - 4x(4y - 3) = \ldots\ldots$
3. $(a + 1)(x + 1) - (2a - 4)(x + 1) = \ldots\ldots$
4. $5(x + 1) - (x + 1)^2 = \ldots\ldots$

1.3.1.2 Niveau 2

CC BY-NC-SA 4.0

1.3.1 Oefeningen haakjes

Oefening 1.3.5. Ontbind in factoren. $(a, b, c, d, x, y, p, q \in \mathbb{R})$

1. $18x + 24y + 30z = \ldots\ldots$
2. $20ab^3 + 30bc + 25b^2c^3\sqrt{d} = \ldots\ldots$
3. $-9x^2y - 3xy = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{p^2q^3}{8} - \dfrac{p^2q}{2} + pq = \ldots\ldots$
5. $a - b - 3(a - b) = \ldots\ldots$
6. $xy - yz - xt + zt = \ldots\ldots$

Oefening 1.3.6. Ontbind in factoren of vul aan. $(u, s, t \in \mathbb{R})$

1. $24st + 12t - 60ut = \ldots\ldots$
2. $\dfrac{st^2}{8} + \dfrac{s^2t^2}{12} + s^2t = \ldots\ldots$
3. $st + s + ut + u = \ldots\ldots$
4. $(2t - 2)(5t + 3) - (t - 1)(4t - 1) = \ldots\ldots$
5. $\dfrac{2s + 3}{2} + (2s + 3)^2 = \dfrac{2s + 3}{2} \cdot (\ldots\ldots)$
6. $\left(\dfrac{5s}{8}\right)(u - 1) - 5s(3u + 1) = \left(\dfrac{5s}{8}\right) \cdot (\ldots\ldots)$

Oefening 1.3.7. Ontbind in factoren. $(x, y \in \mathbb{R})$

1. $x^3 - 1 = \ldots\ldots$
2. $25x^2y^4 - 64 = \ldots\ldots$
3. $4x^2 + 24xy + 36y^2 = \ldots\ldots$
4. $x^2 - y^2 + 1 - 2x = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Breuken

Definitie 1.4.1 (Definitie breuken).

Een **breuk** is een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $b \neq 0$.
We noemen a de **teller**, b de **noemer** en de streep tussen beide getallen de **breukstreep**.

Voor reële getallen a, b, c, d met $b \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

We noemen $-\frac{a}{b}$ de **tegengestelde breuk** van $\frac{a}{b}$.

Als $a \neq 0$ en $b \neq 0$ noemen we $\frac{b}{a}$ de **omgekeerde breuk** van $\frac{a}{b}$.

Een *breuk* is dus per definitie een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$ met $a, b \in \mathbb{R}$, met $b \neq 0$. Wanneer a en b concrete getallen zijn, bijvoorbeeld de breuk $\frac{3}{4}$, dan kunnen we de breuk omzetten naar een kommagetal: $\frac{3}{4} = 0.75$. We zullen hier echter voornamelijk werken met breuken met letters, zoals $\frac{a-b}{x}, \frac{x^2y}{y^3}, \ldots$, met $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ en $x \neq 0,\ y \neq 0$.

Bij de notatie van de tegengestelde breuk van $\frac{a}{b}$ mag je kiezen of je het minteken in de teller, de noemer of voor de gehele breuk plaatst.

Eigenschap 1.4.1 (Mintekens).

Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

Voorbeeld 1.4.1 (Mintekens).

1. $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$
2. Voor $b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 1$ geldt: $-\frac{b+1}{1-b} = \frac{-(b+1)}{1-b} = \frac{-b-1}{1-b} = \frac{b+1}{b-1}$

Waarschuwing 1.4.1 (Veelgemaakte fouten).

Gebruik **haakjes** om een minteken voor een teller of een noemer te plaatsen. Bijvoorbeeld ($a \in \mathbb{R}$):

$$-\frac{a+5}{7} = \frac{-(a+5)}{7} = \frac{-a-5}{7} = \frac{a+5}{-7}.$$

Een vaak gemaakte fout is het minteken enkel voor één term te plaatsen $-\frac{a+5}{7} \neq \frac{-a+5}{7}$.

Omgekeerd geldt ook dat als er één term in de teller een minteken heeft, je dat minteken niet zonder meer voor de hele breuk mag plaatsen ($b \in \mathbb{R}$): $\frac{-2+b}{4} \neq -\frac{2+b}{4}$. Wel geldt dat

$$\frac{-2+b}{4} = \frac{-(2-b)}{4} = -\frac{2-b}{4}$$

Deze opmerkingen gelden evenzeer voor mintekens in de noemer.

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Breuken

Eigenschap 1.4.2. Voor $a, b, k \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt

$$k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{b} \qquad \text{(getal maal breuk)}$$

$$\frac{k \cdot a}{b} = k \cdot \frac{a}{b} \qquad \text{(factor uit teller halen)}$$

Voorbeeld 1.4.2 (Getal maal breuk)**.** $(a, b \in \mathbb{R})$

1. $7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$
2. $3 \cdot \frac{a+5}{7} = \frac{3(a+5)}{7} = \frac{3a+15}{7}$
3. $\frac{-10+5b}{4} = \frac{5(-2+b)}{4} = 5 \cdot \frac{-2+b}{4}$

Je kan breuken soms **vereenvoudigen** door de teller en de noemer beide te delen door eenzelfde factor, op voorwaarde dat deze factor verschillend is van nul. Meestal wordt in een oefening verwacht dat je een breuk zo eenvoudig mogelijk noteert. Je mag teller en noemer van een breuk ook vermenigvuldigen met eenzelfde factor verschillend van nul. Dit is nuttig om twee breuken op dezelfde noemer zetten.

Eigenschap 1.4.3. Voor $a, b, k \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ en $k \neq 0$ geldt

$$\frac{k \cdot a}{k \cdot b} = \frac{\cancel{k} \cdot a}{\cancel{k} \cdot b} = \frac{a}{b} \qquad \text{(gemeenschappelijke factor } k \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} \qquad \text{(met factor } k \text{ vermenigvuldigen)}$$

Voorbeeld 1.4.3 (Vereenvoudigen)**.**

1. $\frac{10}{15} = \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{3}$
2. $\frac{2x}{4} = \frac{2 \cdot x}{2 \cdot 2} = \frac{x}{2}$
3. Voor $x, y \in \mathbb{R}$ met $y \neq 0$ geldt: $\frac{x^2 y}{y^3} = \frac{y \cdot x^2}{y \cdot y^2} = \frac{x^2}{y^2}$
4. Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$, $d \neq 0$ geldt: $\frac{ab+ac}{ad} = \frac{a(b+c)}{ad} = \frac{b+c}{d}$
5. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq b$ geldt: $\frac{a^2-b^2}{3a-3b} = \frac{(a-b)\cdot(a+b)}{(a-b)\cdot 3} = \frac{a+b}{3}$

Waarschuwing 1.4.2 (Veelgemaakte fouten)**.**

Voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -1$ kunnen we $\frac{a+3}{a+1}$ niet vereenvoudigen, wegens geen gemeenschappelijke factor in teller en noemer.

$$\frac{a+3}{a+1} \neq \frac{0+3}{0+1}$$
$$\frac{a+3}{a+1} \neq \frac{1+3}{1+1}$$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Breuken

De eerste gelijkheid geldt wel voor $a = 0$ en de tweede voor $a = 1$, maar de gelijkheden gelden niet voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -1$.

Voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -\frac{1}{2}$ kunnen we $\frac{2a}{2a+1}$ niet vereenvoudigen:

$$\frac{2a}{2a+1} \neq \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}a+1} = \frac{a}{a+1}.$$

Indien we toch de factor 2 willen weg delen in teller en noemer gebruiken we haakjes:

$$\frac{2a}{2a+1} = \frac{2a}{2\left(a+\frac{1}{2}\right)} = \frac{a}{a+\frac{1}{2}}.$$

Breuken met gelijke noemer kan je **optellen** door de tellers op te tellen. Breuken optellen is dus een som van breuken schrijven als één breuk. Omgekeerd, als de teller van een breuk een som is, kan je de breuk splitsen, wat wil zeggen dat je deze schrijft als een som van 2 breuken.

Definitie 1.4.2 (Som van breuken met gelijke noemer en splitsen van breuken)**.**

Voor $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{(breuken optellen, gelijke noemers)}$$

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \qquad \text{(som in teller splitsen)}$$

Voorbeeld 1.4.4 (Som van breuken met gelijke noemer, splitsen van breuken)**.**

1. $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$
2. Voor $x, y \in \mathbb{R}$ met $y \neq 0$ geldt: $\frac{x-y}{y^2} + \frac{3x+y}{y^2} = \frac{x-y+3x+y}{y^2} = \frac{4x}{y^2}$
3. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq b$ geldt: $\frac{3a+b^2}{a} = \frac{3a}{a} + \frac{b^2}{a} = 3 + \frac{b^2}{a}$

Waarschuwing 1.4.3 (Veelgemaakte fouten)**.**

Als de noemer van een breuk een som is kan je niet meteen de breuk splitsen. Voor een willekeurige $b \in \mathbb{R}$ met $b \neq -3$ kunnen we niet als volgt splitsen:

$$\frac{2}{b+3} \neq \frac{2}{b} + \frac{2}{3}.$$

Breuken met verschillende noemer kan je optellen of aftrekken door deze eerst op gelijke noemer te brengen. Je kan als gemeenschappelijke noemer het product van beide noemers nemen.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \quad = \quad \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} \quad = \quad \frac{ad+bc}{bd}.$$

Voorbeeld 1.4.5 (Som van breuken met verschillende noemer)**.** $(x, y, a, b \in \mathbb{R}_0)$

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Breuken

2. $\dfrac{1}{3x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{y}{3x\cdot y}+\dfrac{3x\cdot 2}{3x\cdot y}=\dfrac{6x+y}{3xy}$

3. $\dfrac{a+b}{2a}+\dfrac{a-b}{3b}=\dfrac{(a+b)3b}{2a\cdot 3b}+\dfrac{2a(a-b)}{2a\cdot 3b}=\dfrac{3ab+3b^2}{6ab}+\dfrac{2a^2-2ab}{6ab}=\dfrac{2a^2+ab+3b^2}{6ab}$

Als gemeenschappelijke noemer het product van beide gegeven noemers nemen is altijd een correcte werkwijze, maar vaak niet de meest efficiënte. Ontbind eerst de noemers zo ver mogelijk in factoren. Bij gehele getallen bedoelen we met ontbinden in factoren het geheel getal schrijven als een product van priemfactoren. Als nieuwe noemer kies je dan het kleinste gemene veelvoud van de noemers. Dit kleinste gemene veelvoud vind je door van elke factor die voorkomt in één van de noemers de hoogste macht te nemen die voorkomt en deze te vermenigvuldigen met elkaar.

Voorbeeld 1.4.6 (Som van breuken met verschillende noemer)**.**

Met behulp van het kleinste gemene veelvoud kan de optelling sneller:

1.

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5}{2^2\cdot 3}+\frac{7}{2\cdot 3^2}=\frac{5\cdot 3}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7\cdot 2}{2^2\cdot 3^2}=\frac{15}{36}+\frac{14}{36}=\frac{29}{36}\quad\text{i.p.v.}\quad\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 18}{12\cdot 18}+\frac{7\cdot 12}{18\cdot 12}=\frac{174}{216}$$

2. Voor $a,b,k,l,m\in\mathbb{R}$ met $k\neq 0$, $l\neq 0$ en $m\neq 0$:

$$\frac{a}{k\cdot l}+\frac{b}{m\cdot l}=\frac{a\cdot m}{k\cdot l\cdot m}+\frac{b\cdot k}{k\cdot l\cdot m}=\frac{a\cdot m+b\cdot k}{k\cdot l\cdot m}\quad\text{i.p.v.}\quad\frac{a}{k\cdot l}+\frac{b}{m\cdot l}=\frac{a\cdot m\cdot l+b\cdot k\cdot l}{k\cdot l\cdot m\cdot l}=\ldots$$

3. Voor $a,b,k,l\in\mathbb{R}$ met $k\neq 0$ en $l\neq 0$:

$$\frac{a}{k^2\cdot l^2}+\frac{b}{k\cdot l^3}=\frac{a\cdot l}{k^2\cdot l^3}+\frac{b\cdot k}{k^2\cdot l^3}=\frac{a\cdot l+b\cdot k}{k^2\cdot l^3}$$

Breuken **vermenigvuldigen of delen** is eenvoudiger dan optellen of aftrekken. Hiervoor hoef je ze niet eerst op gelijke noemer te brengen.

Definitie 1.4.3.

Voor $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ met $b\neq 0$, $c\neq 0$ en $d\neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\overset{\text{def}}{=}\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\qquad\text{(vermenigvuldiging)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\overset{\text{def}}{=}\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\qquad\text{(deling)}$$

Voorbeeld 1.4.7 (Breuken vermenigvuldigen en delen)**.** $(x,y\in\mathbb{R}_0)$

1. $\dfrac{2x}{3}\cdot\dfrac{2}{x}=\dfrac{4x}{3x}=\dfrac{4}{3}$

2. $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{3}{y}}=\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{y}{3}=\dfrac{xy}{6}$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4 Breuken

Opmerking 1.4.1 (Breuken van breuken).

In de definitie van deling van breuken gebruiken we breuken van breuken. Voor breuken van breuken is de *grootte* van de verschillende breukstrepen en de precieze *plaats* van de symbolen erg belangrijk. Beide breukstrepen mogen niet even groot zijn want dan is de uitdrukking niet ondubbelzinnig. We schrijven voor de leesbaarheid de grootste breukstreep altijd in het midden van de relevante formule. Dus

$$x = \frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}} \quad \text{maar nooit} \quad \cancel{x = \frac{\frac{1+a}{2}+3}{4+\frac{\frac{1}{5}+a}{6}}}\,.$$

Eigenschap 1.4.4 (Eenvoudige maar belangrijke gevolgen).

Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, met $b \neq 0$, $c \neq 0$ geldt

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \qquad \text{(gelijke noemer } \frac{1}{b} \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c} \qquad \text{(breuk gedeeld door getal is maal in noemer)}$$

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} = a \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{c} \qquad \text{(getal gedeeld door breuk is maal omgekeerde)}$$

Voorbeeld 1.4.8. Vereenvoudig door met slechts één breukstreep te schrijven.$(x, y \in \mathbb{R}_0)$

1. $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \dfrac{x}{y}$

Uitwerking: $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{2}{y} = \dfrac{x}{y}$

2. $\dfrac{x+y}{\frac{x}{y}} = \dfrac{(x+y)y}{x}$

Uitwerking: $\dfrac{x+y}{\frac{x}{y}} = (x+y) \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{(x+y)y}{x}$

3. $\dfrac{\frac{x+y}{x}}{y} = \dfrac{x+y}{xy}$

Uitwerking: $\dfrac{\frac{x+y}{x}}{y} = \dfrac{x+y}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{x+y}{xy}$

CC BY-NC-SA 4.0

1.4.1 Oefeningen breuken

1.4.1.1 Niveau 1

Oefening 1.4.1. Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1. $20 \cdot (\frac{5}{4} - \frac{4}{5}) = \ldots\ldots$
2. $-\frac{6}{27} + \frac{27}{1} + \frac{16+14}{9} - \frac{3}{14+13} - 3 \cdot 9 = \ldots\ldots$
3. $-\frac{(1-a)-2}{a+1} = \ldots\ldots$ $(a \neq -1)$

1.4.1.2 Niveau 2

Oefening 1.4.2. Schrijf als een zo eenvoudig mogelijke breuk. Stel $a, b, c \in \mathbb{R}_0$.

1. $\frac{a-b}{c} - \frac{a-2b}{2c} = \ldots\ldots$
2. $\frac{\frac{a-b}{b}}{1-\frac{a}{b}} = \ldots\ldots$
3. $\frac{1-\frac{a+b}{b}}{\frac{a^2}{b}} = \ldots\ldots$
4. $a + \frac{a}{1+a} = \ldots\ldots$
5. $1 + \frac{a}{1+a} = \ldots\ldots$
6. $1 + \frac{1}{1+a} = \ldots\ldots$
7. $a + \frac{1}{1+a} = \ldots\ldots$
8. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}} = \ldots\ldots$
9. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Machten

1.5.1 Machten met gehele exponent

Definitie 1.5.1 (Machtsverheffing met reëel grondtal en gehele exponent)**.**

De n-**de macht** van een reëel getal a, met $n \in \mathbb{N}$, genoteerd a^n, is

$$\begin{aligned} a^0 &\overset{\text{def}}{=} 1 && \text{als } a \neq 0 \\ a^n &\overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}} && \text{als } n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

We noemen a het **grondtal** en n de **exponent**.

Als a niet nul is, dan definiëren we ook machten met *negatieve* gehele exponenten:

$$a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}.$$

De uitdrukkingen 0^0 en 0^{-n} zijn *onbepaald* en hebben dus *geen betekenis*.

Omdat $a^2 = a \cdot a$ en $a^3 = a \cdot a \cdot a$ volgt ook direct dat

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= (a \cdot a)(a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{2+3} = a^5 \\ (a^2)^3 &= (a \cdot a)^3 = (a \cdot a)(a \cdot a)(a \cdot a) = a^{2 \cdot 3} = a^6 \\ a^3 \cdot b^3 &= (a \cdot a \cdot a)(b \cdot b \cdot b) = (a \cdot b)(a \cdot b)(a \cdot b) = (a \cdot b)^3 \end{aligned}$$

maar een uitdrukking als $a^2 \cdot b^3$ kan je niet schrijven als één macht, wel bijvoorbeeld als $(a \cdot b)^2 \cdot b$:

$$a^2 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot b = (a \cdot b)^2 \cdot b$$

In het algemeen gelden volgende rekenregels:

Eigenschap 1.5.1 (Rekenregels machten)**.**

Voor alle $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\begin{aligned} xa^r + ya^r &= (x+y)a^r && \text{(som van } \textit{gelijke} \text{ machten)} \\ a^m a^n &= a^{m+n} && \text{(product van machten met zelfde grondtal)} \\ (ab)^n &= a^n b^n && \text{(macht van product)} \\ (a^m)^n &= a^{mn} && \text{(macht van een macht)} \end{aligned}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \text{als } a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \text{als } b \neq 0$$

Dezelfde regels gelden voor *gehele* $m, n \in \mathbb{Z}$ zolang het grondtal niet nul is bij negatieve exponenten.

Voorbeeld 1.5.1. Bereken volgende machten.

1. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6 = 64$

CC BY-NC-SA 4.0

2. $\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \cdot 9 = \frac{9}{4}$

1.5.2 Machten met rationale exponent

Als we ons beperken tot positieve grondtallen, kunnen we de machtsverheffing eenvoudig verder veralgemenen: we definiëren eerst $a^{\frac{1}{n}}$, dan $a^{\frac{m}{n}} = a^q$, met $q \in \mathbb{Q}$, en tenslotte vermelden we ook a^r, met $r \in \mathbb{R}$.

Definitie 1.5.2 (n-de machtswortel)**.**

Zij $a \in \mathbb{R}^+$ en $n \in \mathbb{N}_0$.

De macht $a^{\frac{1}{n}}$ met grondtal a en exponent $\frac{1}{n}$ wordt gedefinieerd als het uniek positief reëel getal b ($b \in \mathbb{R}^+$) waarvan de n-de macht gelijk is aan a. In symbolen:

$$b = a^{\frac{1}{n}} \iff b^n = a \,.$$

We noemen $a^{\frac{1}{n}}$ de n-**de machtswortel** uit a en noteren ook

$$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{n}} \,.$$

Voor $n = 2$ noteren we $a^{\frac{1}{2}}$ als $\sqrt{a}$ in plaats van $\sqrt[2]{a}$.

We definiëren voor $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$ ook

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \,.$$

Per definitie is $a^{\frac{m}{n}}$ dus de m-de macht van de n-de machtswortel uit a.

De definitie van $a^{\frac{1}{n}}$ is enkel zinvol als een dergelijk positief reëel getal b *bestaat* en *uniek* is. Precies om dat te garanderen moet de definitie voor **even** n beperkt worden tot *positieve* a en b. Inderdaad, voor negatieve a *bestaat* er immers niet altijd een geschikte b: neem bijvoorbeeld $a = -2$, dan bestaat er geen $b \in \mathbb{R}$ zodat $b^2 = -2$. Als het getal b niet beperkt wordt tot de *positieve* getallen, dan is dergelijke b niet *uniek*: neem bijvoorbeeld $a = 4$, dan voldoen zowel $b = 2$ als $b = -2$ aan $b^2 = 4$.
Voor **oneven** machtswortels stelt dit probleem zich niet: $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$ en $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$. Dus als n oneven is definieert de formule $b = a^{\frac{1}{n}} \iff b^n = a$ ook n-de machtswortels van *negatieve* getallen.

Definitie 1.5.3 (Uitbreiding definitie n-de machtswortel)**.**

Zij $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$ en n **oneven**.

De macht $a^{\frac{1}{n}}$ met grondtal a en exponent $\frac{1}{n}$ wordt gedefinieerd als het uniek reëel getal b waarvan de n-de macht gelijk is aan a. In symbolen:

$$b = a^{\frac{1}{n}} \iff b^n = a \,.$$

Ook voor machten met rationale exponenten blijven bovenstaande rekenregels gelden. Zo gelden bijvoor-

CC BY-NC-SA 4.0

1.5 Machten

beeld volgende rekenregels voor vierkantswortels, met $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}_0^+$.

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}, \qquad a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a+b)\sqrt{x}$$

Opmerking 1.5.1.

Onmiddellijke gevolgen van de definities en rekenregels:

- $a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = (\sqrt[n]{a})^{-1}$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0^+$ en alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0^+$, alle $m \in \mathbb{Z}$ en alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a^1 = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}^+$ en alle $n \in \mathbb{N}_0$

Waarschuwing 1.5.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
  want bijvoorbeeld $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ en $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
- $a^{-2} \neq a^{\frac{1}{2}}$
  want bijvoorbeeld $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$ en $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
- $\sqrt{(-3)^2} \neq -3$
  want $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$. Voor $a \in \mathbb{R}^+$ geldt wel dat $\sqrt{a^2} = a$.

Voorbeeld 1.5.2. Vereenvoudig volgende machten met rationale exponent (met $x \in \mathbb{R}_0^+$).

1. $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{64} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{8^2} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 8 = 8^{\frac{1}{3}+1} = 8^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$
2. $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x} = x^{\frac{3}{4}-1} = x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$
3. $\left(x^3 \cdot \sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 = x^6 \cdot x^{\frac{2}{4}} = x^{6+\frac{1}{2}} = x^{\frac{13}{2}} = \sqrt{x^{13}}$

1.5.3 Machten reële exponent

Men kan ook a^r definiëren met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$ (dus uitdrukkingen zoals $2^{\sqrt{3}}$, $\pi^{\sqrt{5}}$ en $\sqrt{7}^{\sqrt{\pi}}$). We geven de definitie hier niet in detail. We zullen later reële exponenten nodig hebben bij het bestuderen van zogenaamde exponentiële functies zoals $x \mapsto 2^x$.

Ook voor machten met reële exponenten blijven de gebruikelijke rekenregels gelden.

CC BY-NC-SA 4.0

1.5.1 Oefeningen machten

1.5.1.1 Niveau 1

Oefening 1.5.1. Bereken:

1. $5^2 = \ldots\ldots$
2. $-5^2 = \ldots\ldots$
3. $(-5)^2 = \ldots\ldots$
4. $(2+3)^2 = \ldots\ldots$
5. $2^2 + 3^2 = \ldots\ldots$
6. $(2+3)^2 - (2^2+3^2) = \ldots\ldots$
7. $\sqrt{5^2} = \ldots\ldots$
8. $\sqrt{(-5)^2} = \ldots\ldots$

Oefening 1.5.2. Bereken

1. $2^2 \cdot 2^3 = 2^{\cdots\cdots}$
2. $(2^2)^3 = 2^{\cdots\cdots}$
3. $2^{(2^3)} = 2^{\cdots\cdots}$
4. $\dfrac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^{\cdots\cdots}$
5. $1302^5 \cdot 2^5 = \ldots\ldots^5$

1.5.1.2 Niveau 2

Oefening 1.5.3. Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Stel $x, y, a, b \in \mathbb{R}_0^+$.

1. $\dfrac{\sqrt{a}}{a^5} = \ldots\ldots$
2. $\left(x^6 y^8\right)^{-1/2} = \ldots\ldots$
3. $a^4 b \left(\dfrac{\sqrt{a^2 b^4}}{ab}\right)^3 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Goniometrische cirkel

Hoeken worden traditioneel *gemeten in (boog)graden*, waarbij een rechte hoek $90°$ is, een gestrekte hoek $180°$ en de nulhoek $0°$ of $360°$. Het maatgetal van een georiënteerde hoek is daarbij slechts bepaald 'op $360°$ na': per afspraak zijn $20°$, $20° + 360° = 380°$, $20° + 720° = 740°$ en $20° - 360° = -340°$ allemaal maatgetallen van *dezelfde georiënteerde hoek*. We schrijven dikwijls $\alpha + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$ voor *al* de maatgetallen van hoek α.

De keuze voor (boog)graden, die onderverdeeld zijn in (boog)minuten en (boog)seconden is historisch gemotiveerd, en gebaseerd op een zestigtallig talstelsel. Je kan het vergelijken met het meten van lengtes in mijl, el of voet. Er is een meer natuurlijke manier om hoeken te meten, die eigenlijk zelfs geen willekeurige keuze van een nieuwe eenheid vraagt. We zullen hiervoor een hoek bekijken op de goniometrische cirkel.

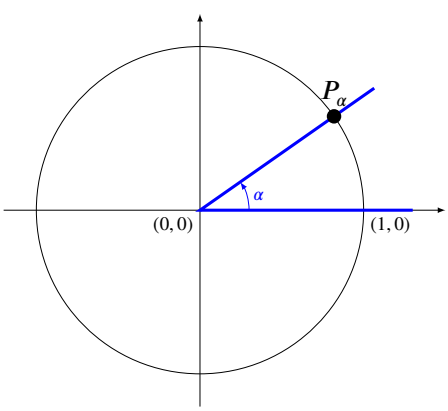
Door verschuiven en draaien (maar niet spiegelen) kan het hoekpunt van een georiënteerde hoek steeds in de oorsprong van het vlak gelegd worden en zijn eerste been op de positieve x-as. Dat leidt tot volgende definities:

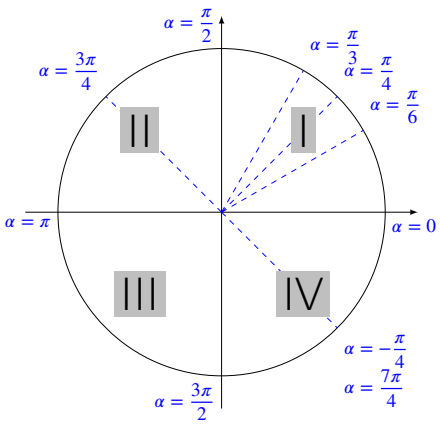
Definitie 1.6.1.

De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong.

Met elke georiënteerde hoek α komt een uniek **beeldpunt** P_α van de goniometrische cirkel overeen door het hoekpunt van α te verschuiven naar de oorsprong, het eerste been op de positieve x-as te leggen en het unieke snijpunt van het tweede been met de goniometrische cirkel P_α te noemen. Omgekeerd bepaalt elk punt P_α van de goniometrische cirkel een georiënteerde hoek α.

De goniometrische cirkel wordt verdeeld in vier **kwadranten**, die vanaf rechtsboven tegen de klok in genummerd worden met Romeinse cijfers I, II, III, IV zoals op de figuur hieronder.





Hoeken komen dus overeen met *punten van de goniometrische cirkel* en in de praktijk wordt meestal geen onderscheid gemaakt tussen het punt P_α en de hoek α.

Omdat de omtrek van een cirkel met straal één gelijk is aan 2π, ligt het voor de hand om een hoek die éénmaal ronddraait maatgetal 2π te geven; een 'halve draai', dus een gestrekte hoek heeft dan maat π, en de helft daarvan, dus een rechte hoek, heeft maatgetal $\pi/2$. Deze manier van hoeken meten noemt men 'meten in radialen'. Op bovenstaande figuur zijn enkele hoeken gemeten in radialen aangeduid.

Het blijkt wiskundig veel handiger hoeken te meten in *radialen* dan in *graden*. De formules voor afgeleiden van sinus en cosinus werken bijvoorbeeld enkel als de hoeken worden gemeten in radialen.

Het maatgetal van een georiënteerde hoek is slechts bepaald 'op 2π na', dus per afspraak zijn $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6}$ en $\frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{-11\pi}{6}$ allemaal maatgetallen van dezelfde hoek.
We schrijven dikwijls $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ voor *al* de maatgetallen van een hoek.

CC BY-NC-SA 4.0

1.6 Goniometrische cirkel

Als symbool voor radialen wordt **rad** gebruikt, maar het wordt meestal niet geschreven. Men schrijft dus meestal *een hoek met grootte π* in plaats van *een hoek met grootte π rad*.

Opmerking 1.6.1.

- De **lengte van de cirkelboog** tussen de twee benen van een hoek is gelijk aan het maatgetal van die hoek uitgedrukt in radialen, wanneer we dit maatgetal kiezen tussen 0 en 2π. Dit verklaart waarom men soms het begrip *booglengte* gebruikt voor de grootte van een hoek.
- Het verband tussen een hoek gemeten in graden en radialen wordt gegeven door $360° = 2\pi$, en dus geldt ook $90° = \frac{\pi}{2}$ en $180° = \pi$. Voor enkele gekende hoeken geldt dus $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{3\pi}{4} = 135°$, $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{3\pi}{2} = 270°$, ... Merk op dat de grootte in radialen erg dikwijls wordt uitgedrukt als een veelvoud van π.
- Een gestrekte hoek van $180°$ meet π radialen, en dus komt één graad overeen met $\frac{\pi}{180} \approx 0.017\ldots$ rad. Omgekeerd komt 1 rad overeen met ongeveer $\frac{180°}{\pi} \approx 57,\ldots°$.
- Zowel het maatgetal van een hoek als de hoek zelf worden meestal genoteerd met Griekse letters. We spreken dus zowel van 'de hoek α' (waarbij α een letter is, namelijk de naam van de hoek) als 'de hoek met grootte α' (waar α dan staat voor een getal, namelijk het maatgetal van de hoek). Het maatgetal is altijd in radialen uitgedrukt, tenzij er expliciet staat $\alpha°$. De dubbelzinnigheid tussen een 'hoek' en 'de grootte van een hoek' is gelukkig compatibel met de optelling van hoeken: de grootte van de som van twee hoeken is de som van de groottes.
-

Voorbeeld 1.6.1 (Omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd)**.**

Je kan de omzetting van graden naar radialen maken met behulp van *de regel van drie*. Je vertrekt van het feit dat $360°$ gelijk is aan 2π radialen, berekent dan hoeveel radialen één graad is, en daarna hoeveel radialen bijvoorbeeld 7 graden zijn. Dezelfde redenering werkt voor de omrekening van radialen naar graden.

Graden	Radialen
$360°$	2π
$:2$	$:2$
$180°$	π

Graden	Radialen
$360°$	2π
$:360$	$:360$
$1°$	$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$
$\times 7$	$\times 7$
$7°$	$\frac{7\pi}{180}$

Graden	Radialen
$360°$	2π
$:2\pi$	$:2\pi$
$\frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$	1
$\times 7$	$\times 7$
$\frac{7\cdot 180°}{\pi}$	7

Een hoek van $180°$ meet π radialen, $7°$ is gelijk aan $\frac{7\pi}{180}$ radialen en 7 radialen is gelijk aan $\frac{7\cdot 180°}{\pi}$.

CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Herhalingsoefeningen breuken, haakjes, machten

Oefening 1.7.1. Vul aan. Je mag veronderstellen dat een uitdrukking die in de noemer staat steeds verschilt van 0.

1. $\frac{4x^2}{5} - 3x = 4x \cdot [\dots\dots]$

2. $(p+1)^2 + \frac{(p+1)^3}{2} + \frac{(p+1)^2}{6} = \frac{(p+1)^2}{2} \cdot [\dots\dots]$

3. $\frac{(m+n)}{2} \cdot \frac{m^2}{(m+n)^2} - \frac{m}{2} = \frac{\dots\dots}{2(m+n)}$

4. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} = \dots\dots \cdot \sqrt{2}$

5. $\frac{4}{q} - \frac{8+q}{2q^2} = \frac{\dots\dots}{2q^2}$

6. $\frac{-8}{2x} + \frac{4}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{\dots\dots}{2x(x-1)^2}$

7. $\left(a^{-1} \cdot b^{-3} \cdot c^2\right)^3 \cdot \left(a^{-2} \cdot b^{-4} \cdot c^3\right)^{-2} = a^{\dots\dots} \cdot b^{\dots\dots} \cdot c^{\dots\dots}$

8. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right)^{-1} = \frac{\dots\dots}{x+y^2}$

9. $(a+b)^3 - \left(a^3 + b^3\right) = (a+b) \cdot \dots\dots$

10. $\frac{a+b}{a^2+b^2} - \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{\dots\dots}{a^4-b^4}$

11. $(t-1) \cdot (1+t+t^2) = \dots\dots$

12. $\frac{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2}}{2p-2} = \dots\dots \cdot \frac{1}{p}$

13. $\frac{1}{2 + \frac{1}{2+1}} = \dots\dots$

14. $n^{-1} + n^{-2} + n^{-3} = n^{-3} \cdot (\dots\dots) = \frac{\dots\dots}{n^3}$

15. $x + 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{\dots\dots}{x-1}$

16. $xy^2z^3 + \frac{x^2yz}{2} + \frac{xyz^2w}{3} = xyz \cdot [\dots\dots]$

17. $\frac{3}{q} + \frac{1}{2q} - \frac{2}{4q} = \frac{\dots\dots}{4q} = \frac{\dots\dots}{q}$

18. $\left(\frac{n^4}{m^3} \cdot \frac{m^{-5}}{n^3}\right)^2 = \frac{n^{\dots\dots}}{m^{\dots\dots}}$

19. $\frac{1}{b+c} - \frac{1}{c} = \frac{\dots\dots}{c(b+c)}$

20. $\frac{x^2z}{2} + zyx + \frac{zy^2}{2} = \frac{x+y}{2} \cdot [\dots\dots]$

CC BY-NC-SA 4.0

1.7 Herhalingsoefeningen breuken, haakjes, machten

21. $\left(\frac{-4}{a}\right)^2 + \frac{3}{2a} = \frac{3}{a^2} \cdot [\ldots\ldots]$

22. $a^x \cdot a^{-\frac{2x}{3}} = a^{\ldots\ldots x}$

23. $(k+l+m)^2 = ((k+l)+m)^2 = k^2 + 2kl + l^2 + \ldots\ldots$

24. $\left(-(-x+y)\cdot(-1)^{-3}\right)^2 =$ $\boxed{+(y-x)^2}$ $\boxed{-(y-x)^2}$

25. $\frac{2}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot 3a - \frac{1}{a+1} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\ldots\ldots}{a(a+1)}$

26. $\dfrac{-1}{1 - \dfrac{x+1}{x}} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 2

Functies

(Versie 2026/09/26HB.14)

2.1 Introductie Week 2



In deze eerste voorbereiding herhalen we nog wat basistechnieken en -rekenregels die van pas zullen komen in deze en volgende oefenzittingen. In de oefenzittingen wordt verwacht dat je deze technieken en regels vlot kan gebruiken.

CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Begintest Week 2

Indien je deze oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je de opfrissingsmodules verder overslaan, anders herhaal je best grondig deze modules.

Oefening 2.2.1. Los de volgende vergelijkingen op:

1. $|x-3|=2$: ... ...
2. $|x+5|\leq 1$: ... ...

Oefening 2.2.2. Bepaal in de volgende oefeningen de vergelijking van de rechte die aan de voorwaarden voldoet. Schrijf de vergelijking in de standaardvorm.

1. De rechte door $(-2,-3)$ en $(1,4)$: ... ...
2. De rechte door $(2,-3)$ en evenwijdig met $x+2y-4=0$: ... ...
3. De rechte door $(1,4)$ en loodrecht op $2y-5x+7=0$: ... ...

Oefening 2.2.3. Vereenvoudig de volgende exponentiële uitdrukkingen:

1. $4^3 4^{\frac{-2}{3}} = 4^{\cdots\cdots}$
2. $\dfrac{3^2 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{-1}{2}}} = 3^{\cdots\cdots}$
3. $\dfrac{5^k 5^{2k-1}}{5^{1-k}} = 5^{\cdots\cdots}$

Oefening 2.2.4. Bepaal welk reëel getal x voldoet aan de volgende uitdrukkingen. Formuleer je antwoord in de vorm $x=\ldots$.

1. $\log_{\frac{1}{2}} 32 = x$: ... ...
2. $\log_{\frac{1}{3}} 81 = x$: ... ...
3. $\log_{10} 0.001 = x$: ... ...

Oefening 2.2.5. Los op naar x. Formuleer je antwoord in de vorm $x=\ldots$.

1. $e^{3x-1}=2$: ... ...
2. $e^{-2x}=10$: ... ...
3. $e^{x^2-1}=10$: ... ...

Oefening 2.2.6. Los op naar x. Formuleer je antwoord in de vorm $x=\ldots$.

1. $\ln(x-3)=5$: ... ...
2. $\ln(x+2)+\ln(x-2)=1$: ... ...
3. $\log_3 x^2 - \log_3 2x = 2$: ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Ongelijkheden

Ongelijkheden

Een belangrijke eigenschap van reële getallen is dat we ze kunnen ordenen: voor twee getallen $x, y \in \mathbb{R}$ geldt altijd $x \leq y$ of $y \leq x$. We kunnen dus niet alleen vergelijkingen bestuderen en oplossen, maar ook zogenaamde on*gelijk*heden. Daarbij zoeken we niet naar de waarden van een onbekende die een *gelijkheid* oplost, maar naar de waarden van een onbekende die een *ongelijkheid* oplost.

Voorbeeld 2.3.1 (Voorbeelden van ongelijkheden)**.**

- $x^2 > 2x - 1$
- $\sin(x) \geq 0.5$

Opmerking 2.3.1.

- Ongelijkheden kunnen aan elkaar worden gekoppeld:

  $$a < b < c \iff a < b \text{ en } b < c.$$

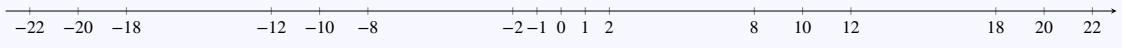
  Merk op dat uit beide uitdrukkingen telkens ook volgt dat $a < c$.
- Uitdrukkingen van de vorm $a < b > c$ worden *nooit* gebruikt: je schrijft bv. $a < b$ en $c < b$, of korter $a, c < b$

Ongelijkheden oplossen is in het algemeen *moeilijker* dan het oplossen van vergelijkingen, onder meer omwille van de extra complicatie dat twee leden van een ongelijkheid vermenigvuldigen met een *negatief* getal de ongelijkheid *omdraait*:

Eigenschap 2.3.1. Voor elke $a, b, r \in \mathbb{R}$ geldt

	$a < b$	$\iff$	$a + r < b + r$		(plus getal)
Geval $0 < r$:	$a < b$	$\iff$	$r \cdot a < r \cdot b$		(maal positief getal)
Geval $r < 0$:	$a < b$	$\iff$	$r \cdot a > r \cdot b$	(of $r \cdot b < r \cdot a$)	(maal negatief getal)

Voorbeeld 2.3.2. We hebben $10 < 20$, en dus ook $10 + 2 < 20 + 2$, $10 - 2 < 20 - 2$ en $2 \cdot 10 < 2 \cdot 20$, maar $(-2) \cdot 10 > (-2) \cdot 20$. Ook is $1 < 2$, maar $-1 > -2$. Deze ongelijkheden zie je ook op de getallenrechte:



Opmerking 2.3.2.

- De eerste eigenschap zegt dat je bij beide leden van een ongelijkheid eenzelfde getal mag optellen

  $$a < b \Rightarrow a + r < b + r$$

  of aftrekken

  $$a + r < b + r \Rightarrow a < b.$$

  Als we bij de ongelijkheid $x < y$ van beide leden y aftrekken krijgen we $x - y < 0$, wat neerkomt op de term y naar het andere lid brengen.

  $$x < y \iff x - y < 0$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Ongelijkheden

- De tweede eigenschap zegt dat je beide leden van een ongelijkheid mag vermenigvuldigen

$$a < b \Rightarrow\ r \cdot a < r \cdot b$$

of delen

$$r \cdot a < r \cdot b \Rightarrow\ a < b$$

met eenzelfde strikt positief getal r. De ongelijkheid blijft hierbij behouden.
Als we bij de ongelijkheid $x < y$, met $y > 0$, beide leden delen door y krijgen we $\frac{x}{y} < 1$, wat neerkomt op de factor y naar het andere lid brengen.

$$x < y \iff \frac{x}{y} < 1 \text{ indien } y > 0$$

- De derde eigenschap zegt dat je beide leden van een ongelijkheid mag vermenigvuldigen

$$a < b \Rightarrow\ r \cdot a > r \cdot b$$

of delen

$$r \cdot a > r \cdot b \Rightarrow\ a < b$$

met eenzelfde strikt negatief getal r. De ongelijkheid draait hierbij om.

Met deze notatie en eigenschappen van de ongelijkheden kunnen we de oplossingsverzameling zoeken van ongelijkheden, namelijk de verzameling alle getallen die voldoen aan de ongelijkheid.

Ongelijkheden met veeltermen

We geven eerst een voorbeeld van het oplossen van een ongelijkheid met een eerstegraadsveelterm.

Voorbeeld 2.3.3 (Ongelijkheid eerstegraadsveelterm)**.**

1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $-2x + 3 < 5$.

$$\begin{array}{rcll} -2x+3 & < & 5 & \\ & \Updownarrow & & (\ -3 \text{ optellen}) \\ -2x & < & 2 & \\ & \Updownarrow & & (\ \text{delen door } -2\text{, ongelijkheid omkeren}) \\ x & > & -1 & (x \text{ is groter dan } -1) \end{array}$$

Dus is de oplossingsverzameling $V =]-1, +\infty[$.
Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -5 op te tellen

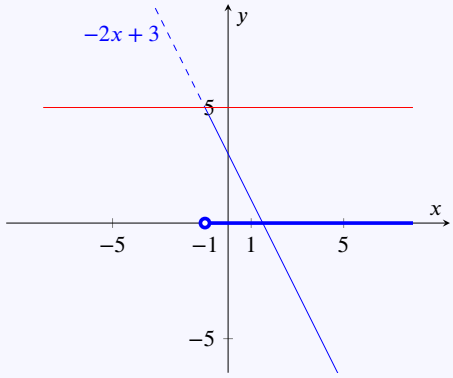
$$-2x - 2 < 0$$

en dan het tekenverloop van de eerstegraadsfunctie $x \mapsto -2x - 2$ te gebruiken:

x		-1	
$-2x-2$	$+$	0	$-$

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Ongelijkheden



Het oplossen van ongelijkheden met hogere graadsveeltermen kan door alle termen naar één lid te brengen en van de verkregen veelterm het tekenverloop op te stellen.

Ongelijkheden met veeltermbreuken

Net als bij rationale vergelijkingen stellen we eerst de bestaansvoorwaarde op.

Voorbeeld 2.3.4 (Oplossen van ongelijkheden)**.** Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$.

We mogen *niet* zomaar linker- en rechterlid vermenigvuldigen met $x-3$, want we kennen het teken niet van $x-3$. We maken dus een *gevalsonderscheid*:

- Bestaansvoorwaarde: $x \neq 3$
- $x-3>0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$. De ongelijkheid blijft behouden omdat $x-3$ positief is.

$$\begin{array}{rcll} x+4 & < & 2x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen}) \\ 4 & < & x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen}) \\ 10 & < & x & (x \text{ is groter dan } 10) \end{array}$$

- $x-3<0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$. De ongelijkheid keert om omdat $x-3$ negatief is.

$$\begin{array}{rcll} x+4 & > & 2x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen}) \\ 4 & > & x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen}) \\ 10 & > & x & (x \text{ is kleiner dan } 10) \end{array}$$

Dus

- in het geval dat $x-3>0$ (of $x>3$), dan wordt de ongelijkheid $x>10$.
- in het geval dat $x-3<0$ (of $x<3$), dan wordt de ongelijkheid $x<10$. Dat is natuurlijk automatisch het geval: Als $x<3$ dan is ook $x<10$. Dus, als $x<3$ dan is automatisch $\dfrac{x+4}{x-3}<2$

Samengevat: $\dfrac{x+4}{x-3}<2$ als $x<3$ of $x>10$.

CC BY-NC-SA 4.0

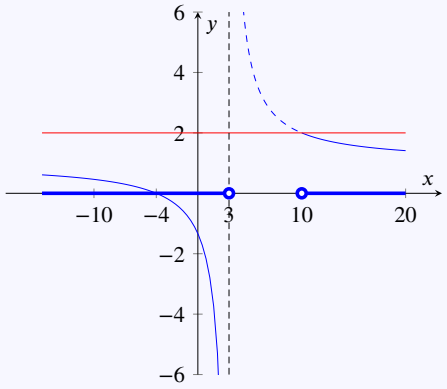
2.3 Ongelijkheden

Dus is de oplossingsverzameling is $V =]-\infty, 3[\cup]10, +\infty[$.

Herinner je de notatie '$\cup$' om aan te duiden dat V de unie is van de twee halfrechten.

We kunnen dus ook zeggen: $\frac{x+4}{x-3} < 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3[\cup]10, +\infty[$.

Dit kunnen we ook zien op de grafiek van $\frac{x+4}{x-3}$:



Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -2 op te tellen

$$\frac{x+4}{x-3} - 2 < 0$$

dan het linkerid op gelijke noemer te brengen

$$\frac{x+4-2(x-3)}{x-3} < 0$$

en dan het tekenverloop van de rationale functie $\frac{-x+10}{x-3}$ te onderzoeken.

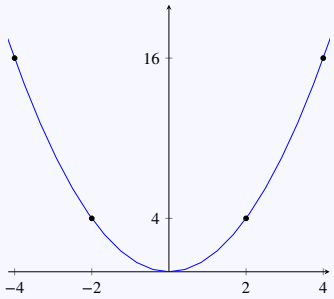
Bron: Schaum's outline series, Beginning Calculus, Second Edition, p.4

Functies toepassen op ongelijkheden

Zij $x, y \in \mathbb{R}$ en f een reële functie. We kunnen ons het volgende afvragen:

als $x < y$, kunnen we dan iets zinnigs zeggen over $f(x)$ en $f(y)$?

Voorbeeld 2.3.5. We onderzoeken bij wijze van voorbeeld het verband voor de functie $f(x) = x^2$.



CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Ongelijkheden

Er geldt dan:

$$\begin{array}{rcl} 2 < 4 & \text{en} & 2^2 < 4^2 \\ -4 < -2 & \text{en} & (-4)^2 > (-2)^2 \\ -2 < 4 & \text{en} & (-2)^2 < 4^2 \\ -4 < 2 & \text{en} & (-4)^2 > 2^2 \\ -2 < 2 & \text{en} & (-2)^2 = 2^2 \end{array}$$

Als x en y beide positief zijn, wordt de orde behouden. Als x en y beide negatief zijn, draait de orde om. Als x en y een verschillend teken hebben, kunnen we niets zeggen over de relatie tussen x^2 en y^2: zowel $x^2 < y^2$, $x^2 > y^2$ als $x^2 = y^2$ zijn mogelijk. In dit geval mogen we dus niet kwadrateren.

We kunnen de verschillende gevallen samenvatten als:

Als $x, y \geq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$.

Als $x, y \leq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 > y^2$.

Als $x < 0 < y$ zijn zowel $x^2 \leq y^2$ als $x^2 \geq y^2$ mogelijk.

Dit voorbeeld toont aan dat je erg moet opletten bij het al dan niet behouden blijven van ongelijkheden.

Definitie 2.3.1. Zij f een reële functie op een interval $I \subset \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$\begin{array}{rcl} f \text{ is strikt stijgend op } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) < f(y)) \\ f \text{ is strikt dalend op } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) > f(y)) \end{array}$$

Dus, als je *weet* dat een bepaalde functie stijgt (omdat je de grafiek kent), dan weet je ook dat $f(x) < f(y)$ van zodra $x < y$.

Voorbeeld 2.3.6.

1. De functie $f : x \mapsto 2x + 3$ is stijgend, en dus is $f(2) < f(4)$.
2. De functie $f : x \mapsto -2x + 3$ is dalend, en dus is $f(2) > f(4)$.
3. De functie $f : x \mapsto x^2$ is stijgend op het interval $[0, 10]$, en dus is $f(2) < f(4)$.
4. De functie $f : x \mapsto x^2$ is dalend op het interval $[-10, 0]$, en dus is $f(-4) > f(-2)$.
5. De functie $f : x \mapsto \sqrt{x}$ is stijgend op het interval $[0, +\infty[$ en dus is $f(2) < f(4)$.

Oefening 2.3.1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid

1. $2 < \sqrt{x} \iff x \in$ | $]4, +\infty[$ | $]-4, +\infty[$ | $[0, +\infty[$ | $[0, 4[$ | geen oplossingen |
2. $-2 < \sqrt{x} \iff x \in$ | $]4, +\infty[$ | $]-4, +\infty[$ | $[0, +\infty[$ | $[0, 4[$ | geen oplossingen |
3. $2 < -\sqrt{x} \iff x \in$ | $]4, +\infty[$ | $]-4, +\infty[$ | $[0, +\infty[$ | $[0, 4[$ | geen oplossingen |
4. $-2 < -\sqrt{x} \iff x \in$ | $]4, +\infty[$ | $]-4, +\infty[$ | $[0, +\infty[$ | $[0, 4[$ | geen oplossingen |

Voorbeeld 2.3.7. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x-1} > 3$.

De uitdrukking onder het wortelteken moet positief zijn, anders heeft de opgave geen betekenis. Dit

CC BY-NC-SA 4.0

2.3 Ongelijkheden

is de bestaansvoorwaarde:

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1\,.$$

We mogen kwadrateren omdat beide leden van de ongelijkheid positief zijn en de orde blijft bewaard. We krijgen dan $x - 1 > 9$.

Omdat $x - 1 > 9$ overeenstemt met $x > 10$, is aan de bestaansvoorwaarde $(x \geq 1)$ zeker voldaan.

De oplossingsverzameling is dus $V =]10, +\infty[$.

In volgende voorbeelden geven we enkel de methode, niet de gehele uitwerking.

Voorbeeld 2.3.8. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \leq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, geen oplossing

Voorbeeld 2.3.9. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \geq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, ongelijkheid steeds voldaan

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Absolute waarde

Definitie 2.4.1 (Absolute waarde)**.**

Voor een reëel getal $a \in \mathbb{R}$ definiëren we de *absolute waarde* van a, genoteerd $|a|$, als

$$|a| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a & \text{als} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{als} \quad a < 0. \end{cases}$$

Als a positief is, dan is $|a|$ gewoon a, maar als a negatief is, dan is $|a|$ het overeenkomende *positieve* getal $-a$. Dus, $|a|$ is altijd positief.

Voorbeeld 2.4.1 (Eenvoudige voorbeelden van absolute waarden)**.**

(a) $|5| = 5$ en $|-5| = 5$

(b) $|2 + (-1)| \neq |2| + |-1|$ (want $1 \neq 3$)

(c) $|(-3)^2| = |3^2| = 9 \quad (= |-3^2| = |-9|)$

(d) $|a^2 + 1| = a^2 + 1$, met $a \in \mathbb{R}$

(e) $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$

(f) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

(g) $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$

(h) $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$

Volgende eigenschappen volgen eenvoudig uit de definitie:

Eigenschap 2.4.1. Als $x, y, z \in \mathbb{R}$, dan is

(a) $|x| \geq 0$

(b) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(c) $|-x| = |x|$

(d) $|x|^2 = x^2 = |x^2|$ $\qquad (= |-x^2| = |(-x)^2|)$

(e) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ (absolute waarde van product is product van absolute waarden)

(f) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ met $y \neq 0$ (absolute waarde van quotiënt is quotiënt van absolute waarden)

Waarschuwing 2.4.1 (Veelgemaakte fouten)**.**

(a) $|-a| = |a|$, maar ZEER ZEKER NIET ~~$|-a| = a$~~
$|-a| = a$ is FOUT als $a < 0$: als $a = -7$, dan is $|-a| = |-(-7)| \neq -7 = a$

(b) De absolute waarde van een som is niet steeds de som van de absolute waardes:

~~$|x + y| = |x| + |y|$~~

$$|2 + 3| = |2| + |3| = 2 + 3 = 5$$

maar

$$|2 + (-3)| = |-1| = 1 \quad \text{terwijl} \quad |2| + |-3| = 2 + 3 = 5$$

(c) De wortel van het kwadraat van een reëel getal is niet steeds gelijk aan dat reëel getal.

CC BY-NC-SA 4.0

2.4 Absolute waarde

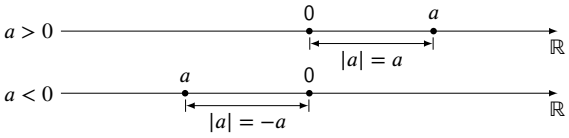
$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{maar} \quad \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$$

Algemeen geldt

- voor $a \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt{a^2} = a$
- voor $a \in \mathbb{R}^-$: $\sqrt{a^2} = -a$

Dit kunnen we samenvatten als $\sqrt{a^2} = |a|$ voor elke reële a.

Bij de voorstelling van a op de reële rechte $\mathbb{R}$ is $|a|$ gelijk aan de afstand van het punt a tot de oorsprong:

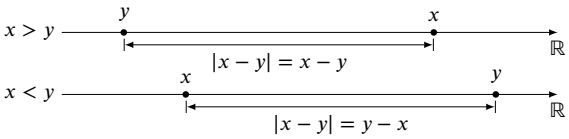


Deze eenvoudige opmerking leidt onmiddellijk tot volgend belangrijk inzicht:

Eigenschap 2.4.2. Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Dan geldt (op de reële rechte $\mathbb{R}$)

$|x - y|$ is de afstand tussen x en y.

In het bijzonder is $|x|$ de afstand van x tot de oorsprong.



Opmerking 2.4.1.

Uit $|x + y| = |x - (-y)|$ volgt dat $|x + y|$ gelijk is aan de afstand tussen x en $-y$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.4.1 Oefeningen absolute waarde

Oefening 2.4.1. Bereken (zonder rekenmachine) volgende absolute waarden.

1. $|2-9| = \ldots\ldots$
2. $|-2-(-6)| = \ldots\ldots$
3. $\left|\frac{11}{10} - \frac{51}{10}\right| = \ldots\ldots$
4. $|\pi - 3\pi| = \ldots\ldots$

Oefening 2.4.2. Los volgende vergelijkingen op.

1. $|x| = 5$ $\ldots\ldots$
2. $|2x+5| = 4$ $\ldots\ldots$
3. $|x-3| = 7$ $\ldots\ldots$
4. $\left|\frac{x}{2} - 1\right| = 1$ $\ldots\ldots$

Oefening 2.4.3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|x-4| < 2$. $\ldots\ldots$
2. $|4-x| \leq 2$. $\ldots\ldots$
3. $|3x| < 6$. $\ldots\ldots$
4. $|3x-4| < 5$. $\ldots\ldots$
5. $|3(x-1)| < 2$. $\ldots\ldots$
6. $\left|\frac{1}{3}(1-x)\right| < 1$. $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Rechten in het vlak

Definitie 2.5.1 (Cartesiaanse vergelijkingen van een rechte)**.**

Een **Cartesiaanse vergelijking** van een rechte is een uitdrukking van de vorm

$$ax + by + c = 0 \quad (\text{ of ook } ax + by = d)$$

met a en b niet beide nul, en waarbij een punt (x_0, y_0) op de rechte ligt als en slechts als $ax_0+by_0+c = 0$.

We zeggen ook dat de vergelijking *in standaardvorm* staat.

Als $b \neq 0$ kan dergelijke vergelijking na delen door b ook worden geschreven in de vorm

$$y = mx + q$$

We noemen $m = -\frac{a}{b}$ de **richtingscoëfficiënt** van de rechte.
De richtingscoëfficiënt geeft de stijging of daling van de rechte aan als x met één eenheid toeneemt.

Eigenschap 2.5.1. Voor de rechte met vergelijking $ax + by + c = 0$ geldt:

$a = 0$	$\iff$	de rechte is evenwijdig met de x-as	$\iff$	$y = k$
$b = 0$	$\iff$	de rechte is evenwijdig met de y-as	$\iff$	$x = k$
$c = 0$	$\iff$	de rechte gaat door de oorsprong	$\iff$	$ax + by = 0$ of $y = kx$ of $x = k'y$

Eigenschap 2.5.2 (Vergelijking van een rechte)**.**

- De rechte door punt (x_1, y_1) met richtingscoëfficiënt m heeft (wegens verschuiving van voorgaande) vergelijking
$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$
- De rechte door de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) heeft als richting het verschil tussen beide punten, en dus als richtingscoëfficiënt
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \left(= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right),$$
en dus als vergelijking
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Voorbeeld 2.5.1. Geef de vergelijking van volgende rechten. Noteer je antwoord in de vorm $y = \ldots$:

1. door de oorsprong en $(3, 6)$: $y = 2x$

Uitwerking: Indien de rechte door de oorsprong (0,0) gaat, is het slim om $(x_1, y_1) = (0, 0)$ te nemen om het rekenwerk te beperken. De formule wordt dan immers

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{y_2}{x_2} \cdot x$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Rechten in het vlak

We hoeven nu enkel nog $(x_2, y_2) = (3, 6)$ in te vullen:

$$y = \frac{6}{3} \cdot x = 2x.$$

Stel dat we omgekeerd $(x_1, y_1) = (3, 6)$ en $(x_2, y_2) = (0, 0)$ nemen, dan krijgen we:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \\ \Leftrightarrow y - 6 &= \frac{0 - 6}{0 - 3} \cdot (x - 3) \\ \Leftrightarrow y &= 2 \cdot (x - 3) + 6 \\ \Leftrightarrow y &= 2x - 6 + 6 = 2x. \end{aligned}$$

Het resultaat is hetzelfde, maar deze methode vraagt veel meer rekenwerk.

2. door de $(0, 1)$ en $(3, 7)$: $y = 2x + 1$

Uitwerking: We nemen $(x_1, y_1) = (0, 1)$ en $(x_2, y_2) = (3, 7)$. Dan krijgen we:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \\ \Leftrightarrow y - 1 &= \frac{7 - 1}{3 - 0} \cdot (x - 0) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{6}{3} \cdot x + 1 \\ \Leftrightarrow y &= 2x + 1. \end{aligned}$$

Eigenschap 2.5.3 (Evenwijdigheid en loodrechte stand)**.**

- Twee rechten $y = mx + q$ en $y = nx + r$ zijn *evenwijdig* als en slechts als ze dezelfde richtingscoëfficiënt hebben, dus als en slechts als $m = n$.
- Twee rechten $y = mx + q$ en $y = nx + r$ staan *loodrecht* op elkaar als en slechts als het product van hun richtingscoëfficiënten gelijk is aan -1, dus als en slechts als $m \cdot n = -1$.

Voorbeeld 2.5.2.

1. Geef de vergelijking van de rechte die door (-1,2) gaat en loodrecht is met de rechte $2x+3y-4 = 0$. Noteer je antwoord in standaardvorm: $-3x + 2y - 7 = 0$.

Uitwerking: We herschrijven de rechte $2x + 3y - 4 = 0$ naar de vorm $y = \ldots$ om de richtingscoëfficiënt te vinden:

$$2x + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow 3y = 4 - 2x \Leftrightarrow \frac{4 - 2x}{3} = \frac{-2}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Aangezien de nieuwe rechte loodrecht moet staan op de vorige, moet het product van de richtingscoëfficiënt van de gezochte rechte met $\frac{-2}{3}$ gelijk zijn aan -1. We vinden dus

$$\left(\frac{-2}{3}\right) \cdot m = -1 \Leftrightarrow m = (-1) \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Rechten in het vlak

We vinden de vergelijking van de rechte nu als volgt:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 2 &= \frac{3}{2}(x - (-1)) \\ 2(y-2) &= 3x + 3 \qquad \text{(Vermenigvuldig beide leden met 2)} \\ 2y - 4 &= 3x + 3 \\ -3x + 2y - 7 &= 0 \end{aligned}$$

2. Geef de vergelijking van de rechte die door (2,-3) gaat en evenwijdig is met de rechte $-5x+3y-6=0$. Noteer je antwoord in standaardvorm. $-5x + 3y + 19 = 0$.

Uitwerking: We herschrijven de rechte $-5x + 3y - 6 = 0$ naar de vorm $y = \ldots$ om de richtingscoëfficiënt te vinden:

$$-5x + 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow 3y = 5x + 6 \Leftrightarrow \frac{5x+6}{3} = \frac{5}{3}x + 2.$$

Aangezien de nieuwe rechte evenwijdig moet zijn met de vorige, moet de richtingscoëfficiënt gelijk zijn. We vinden de vergelijking van de rechte nu als volgt:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (-3) &= \frac{5}{3}(x - 2) \qquad \text{(Vermenigvuldig beide leden met 3)} \\ 3(y+3) &= 5(x-2) \\ 3y + 9 &= 5x - 10 \\ -5x + 3y + 19 &= 0 \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.5.1 Oefeningen rechten in het vlak

Oefening 2.5.1. Geef de vergelijking van volgende rechten. Schrijf de oplossing steeds in de vorm $y = \ldots$.

1. door de oorsprong en $(-1,-2)$: ... ...

2. door $(0,0)$ en $(-1,-1)$: ... ...

3. door $(0,0)$ en $(-1,-2)$: ... ...

4. door $(0,1)$ en $(-1,-1)$: ... ...

5. door $(1,2)$ en $(-1,-2)$: ... ...

Oefening 2.5.2. Geef de vergelijking van volgende rechten. Schrijf de oplossing steeds in standaardvorm.

1. door de oorsprong en evenwijdig met $5y + 2x - 3 = 0$: ... ...

2. door de oorsprong en loodrecht op $5y + 2x - 3 = 0$: ... ...

3. door $(1,-2)$ en evenwijdig met de x-as: ... ...

4. door $(2,3)$ en loodrecht op $4y - 3x + 2 = 0$: ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

2.6 De logaritme

We kennen voor een gegeven grondtal a en een gegeven exponent r de *macht* a^r. Zo hoort bij grondtal 3 en exponent 2 de macht $3^2 = 9$ en bij grondtal 2 en exponent 3 de macht $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Bij *logaritmen* keren we de berekening om: we *vertrekken* van een gegeven grondtal a en een gegeven macht a^r en *zoeken* de *exponent* r die hoort bij dat grondtal a om die macht a^r te bekomen. Als de macht geschreven is als a^r kunnen we r natuurlijk gewoon aflezen, maar als de macht is uitgerekend werkt dat niet meer. In het voorbeeld hierboven: we krijgen het grondtal 3 en de macht 9 en we zoeken de exponent r zodat $3^r = 9$. Die is 2 want $3^{\mathbf{2}} = 9$. We noemen die exponent 2 de 3-logaritme van 9, en we noteren die als $\log_3 9$. We hebben dus:

$$\log_3 9 = \mathbf{2} \quad \text{omdat} \quad 3^{\mathbf{2}} = 9 \quad \text{en er geldt dus dat } 3^{\log_3 9} = 9 \text{ en } \log_3 3^2 = 2$$

$$\log_2 8 = \mathbf{3} \quad \text{omdat} \quad 2^{\mathbf{3}} = 8 \quad \text{en er geldt dus dat } 2^{\log_2 8} = 8 \text{ en } \log_2 2^3 = 3$$

Definitie 2.6.1 (Logaritme)**.** De **logaritme** met grondtal a van x, ook de a-logaritme van x genoemd, genoteerd $\log_a x$, is per definitie

de exponent r waartoe men het grondtal a moet verheffen om x als uitkomst te krijgen.

Met symbolen:

$$\log_a x = r \Leftrightarrow a^r = x.$$

Deze definitie is enkel zinvol voor a en x strikt positieve reële getallen met $a \neq 1$ (zie verder) .

Voorbeeld 2.6.1.

Je kan de logaritme $\log_a x$ dus *direct aflezen* als je x als een macht met grondtal a kan schrijven.

1. $\log_2 8 = \log_2 2^{\mathbf{3}} = 3$
2. $\log 1000 = \log 10^{\mathbf{3}} = 3$
3. $\log_4 \frac{1}{4} = \log_4 4^{\mathbf{-1}} = -1$
4. $\log_4 4 = 1$
5. $\log_4 1 = 0$

Opmerking 2.6.1.

- In het secundair onderwijs wordt soms de notatie ${}^a\log x$ gebruikt.
  In de wetenschappen gebruikt men meestal $\log_a x$.
- Net zoals wortels als $\sqrt{4}, \sqrt{25}$ en $\sqrt[3]{8}$ makkelijk te berekenen zijn terwijl je voor $\sqrt{2}, \sqrt{5}$ of $\sqrt[3]{9}$ een rekentoestel nodig hebt, geldt voor logaritmen dat $\log_2 4, \log_5 25$ en $\log_2 8$ makkelijk te berekenen zijn, terwijl je voor $\log_3 8$ of $\log_5 30$ een rekentoestel nodig hebt.
- Onmiddellijke gevolgen van de definities (met $a > 0$ en $a \neq 1$):

  $\log_a 1 = 0$ $\qquad$ $\log_a a^b = b$

  $\log_a a = 1$ $\qquad$ $\log_a \frac{1}{a^b} = -b$

- De **tiendelige** logaritme $\log x$: het grondtal $a = 10$ komt veel voor omdat we rekenen met het tiendelig talstelsel. We spreken af om het grondtal 10 *weg* te laten: $\log 100 = \log_{10} 100 = 2$. De *tiendelige* logaritme wordt ook wel *Briggse* logaritme genoemd.
- De **natuurlijke** logaritme $\ln x$: een tweede bijzondere grondtal is het *getal van Euler*: $e \approx 2.718281$. Dit getal e neemt binnen de wiskunde een speciale plaats in, net zoals bijvoorbeeld het getal $\pi \approx 3.14159$. De logaritme met grondtal e krijgt een eigen notatie: $\log_e x = \ln x$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6 De logaritme

en een eigen naam: de 'ln' verwijst naar 'logaritmus naturalis' (dus '*natuurlijke logaritme*'), en wordt soms ook de *Neperse* logaritme genoemd.

Voorbeeld 2.6.2.

1. $\log_3 27 = 3$
2. $\log_5 25 = 2$
3. $\log_5 1 = 0$
4. $\log_4 2 = \frac{1}{2}$

Opmerking 2.6.2. Speciale grondtallen en argumenten waarbij de logaritme niet bestaat:

(a) $\log_1 5$ bestaat niet. Er bestaat immers geen exponent r zodat $1^r = 5$, want 1^r is steeds 1.

(b) $\log_0 5$ bestaat niet. Er bestaat geen exponent r waarvoor geldt dat $0^r = 5$. Positieve machten van 0 zijn 0, negatieve machten van 0 bestaan niet omdat je dan door 0 zou moeten delen, wat niet toegelaten is. Het resterende geval 0^0 is wiskundig onbepaald.

(c) $\log_{-4} 2$ bestaat niet, want er bestaat geen r waarvoor geldt dat $(-4)^r = 2$. Er bestaat zeker geen natuurlijk getal r waarvoor $(-4)^r = 2$, en rationale getallen r zijn problematisch omdat bijvoorbeeld $(-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$ niet bestaat.

(d) $\log_2(-4)$ bestaat ook niet, want er bestaat geen r waarvoor geldt dat $2^r = -4$. Inderdaad, machten van 2 zijn altijd positief.

(e) $\log_3 10$ bestaat, maar we kunnen dit niet exact berekenen omdat we het getal 10 niet kunnen schrijven als een macht met grondtal 3. Omdat $3^2 < 10 < 3^3$ kunnen we wel besluiten dat $\log_3 10$ een waarde moet zijn tussen 2 en 3. Met een rekentoestel of computer kunnen we een betere benaderende waarde vinden. Zo is bijvoorbeeld $\log_3 10 \approx 2.0959$, afgerond op 4 decimalen.

We merken dus op dat de definitie van de logaritme $\log_a x$ inderdaad moet beperkt worden:

- we aanvaarden als grondtal a enkel *strikt positieve getallen*
- we aanvaarden als grondtal a niet de waarde 1 (want machten van 1 zijn altijd gelijk aan 1)
- we aanvaarden als argument x enkel *strikt positieve getallen* (want machten met een strikt positief grondtal a zijn altijd strikt positief).

De logaritme $\log_a x$ kan zelf *wel alle reële waarden aannemen* (dus zowel negatief, nul als positief).

Uit de definitie volgt onmiddellijk volgende eigenschap:

Eigenschap 2.6.1 (Basisformules van de logaritme)**.**

Als a, x positieve reële getallen zijn, en $a \neq 1$, dan geldt

$$\log_a a^x = x \quad \text{en} \quad a^{\log_a x} = x$$

In het bijzonder geldt

$$\ln e^x = x \quad \text{en} \quad e^{\ln x} = x \quad \text{en} \quad \log 10^x = x \quad \text{en} \quad 10^{\log x} = x$$

Als we $\log_a a^x = x$ toepassen voor $x = 0$ en $x = 1$ krijgen we

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1$$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6 De logaritme

Oefening 2.6.1.

Bereken volgende logaritmen (zonder rekenmachine).

1. $\log_3 81 = \ldots\ldots$

2. $\log 100 = \ldots\ldots$

3. $\log 0.01 = \ldots\ldots$

4. $\log_2 64 = \ldots\ldots$

5. $\log_2 128 = \ldots\ldots$

6. $\log_2(4^7) = \ldots\ldots$

7. $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = \ldots\ldots$

8. $\log_9 3 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.6.1 Basisoefeningen logaritmen

2.6.1.1 Niveau 1

Oefening 2.6.2. Bereken indien mogelijk de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Indien de logaritme bestaat maar niet exact berekend kan worden, geef dan de grenzen aan (bv. $\log_3 10$ is een waarde tussen 2 en 3).

1. $\log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = \ldots\ldots$

2. $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \ldots\ldots$

3. $\log_1 1$: $\ldots\ldots$

4. $\log \frac{1}{1000} = \ldots\ldots$

5. $\ln \sqrt[3]{e^2} = \ldots\ldots$

6. $\log_6 1 = \ldots\ldots$

7. $\log_4 8 = \ldots\ldots$

8. $\log_5 10$: $\ldots\ldots$

9. $\log_3(-3)^6 = \ldots\ldots$

10. $\log_{-3}(-3)^6$: $\ldots\ldots$

2.6.1.2 Niveau 2

Oefening 2.6.3. Bereken zonder rekenmachine.

1. $\log_2 64 = \ldots\ldots$

2. $\log_5 125 = \ldots\ldots$

3. $\log_2 \frac{1}{32} = \ldots\ldots$

4. $\log_6(36\sqrt{6}) = \ldots\ldots$

5. $\log 0,00001 = \ldots\ldots$

6. $\log_4\left(\log_4 \sqrt[4]{4}\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.7 Exponentiële vergelijkingen

Een **exponentiële vergelijking** is een vergelijking waarbij de onbekende minstens één keer voorkomt in de *exponent* van een uitdrukking.
Voorbeelden van dergelijke vergelijkingen zijn $3^x - 81 = 0$, $3^x = 81x$ en $2^x = 4 \cdot 3^{x-1}$.

Niet alle exponentiële vergelijkingen kunnen exact opgelost worden. Voor de oplossing van $3^x = 81x$ bestaat bijvoorbeeld geen exacte formule. Als een exponentiële vergelijking *wel* exact kan worden opgelost, wordt ergens in de berekening de *logaritme* gebruikt om *de onbekende uit de exponent te verdrijven*. We illustreren enkele oplossingsmethoden aan de hand van onderstaande voorbeelden.

Voorbeeld 2.7.1. Los op naar x: $3^x - 81 = 0$.

In deze vergelijking komt de onbekende x slechts één keer voor, en wel als exponent. Dergelijke vergelijkingen zijn eenvoudig op te lossen door de macht waarbij x in de exponent voorkomt te isoleren en dan een gepaste logaritme te nemen:

$$\begin{array}{rcll} 3^x - 81 & = & 0 & \\ 3^x & = & 81 & \text{(breng naar het andere lid)} \\ \log_3(3^x) & = & \log_3 81 & \text{(neem links en rechts } \log_3\text{)} \\ x & = & \log_3 3^4 = 4 & \text{(want } \log_3 3^x = x, \text{ en } 81 = 9^2 = 3^4\text{)} \end{array}$$

Omdat x voorkomt als exponent met grondtal 3 werd hier de logaritme met grondtal 3 toegepast op linker- en rechterlid. Maar omdat *elke* logaritme exponenten voorop brengt, kan je het grondtal van de logaritme eigenlijk kiezen. Hieronder is dezelfde vergelijking opgelost met de logaritme log met grondtal 10 en met de natuurlijk logaritme ln:

$$\begin{array}{rcl} 3^x & = & 81 \\ \log(3^x) & = & \log 81 \\ x \cdot \log 3 & = & \log 81 \end{array} \quad \text{of ook} \quad \begin{array}{rcl} 3^x & = & 81 \\ \ln(3^x) & = & \ln 81 \\ x \cdot \ln 3 & = & \ln 81 \end{array}$$

$$x = \frac{\log 81}{\log 3} \qquad x = \frac{\ln 81}{\ln 3}$$

Het resultaat ziet er telkens anders uit, maar het is wel degelijk steeds dezelfde oplossing $x = 4$, want uit de formule voor verandering van grondtal bij logaritmen volgt dat

$$\frac{\ln 81}{\ln 3} = \frac{\log 81}{\log 3} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4.$$

Voorbeeld 2.7.2. Los op naar x: $3^x = 81x$.

In deze vergelijking komt de onbekende x twee keer voor: eenmaal in de exponent van een macht met grondtal 3 in het linkerlid en eenmaal als lineaire term in het rechterlid. Dergelijke vergelijking is in het algemeen niet exact op te lossen. Uit het vorige voorbeeld blijkt dat de onbekende x uit de exponent kan gehaald worden door een logaritme toe te passen. Laat ons dat doen in dit geval:

$$\begin{array}{rcll} 3^x & = & 81x & \\ \log_3(3^x) & = & \log_3(81x) & \text{(neem links en rechts } \log_3\text{)} \\ x & = & \log_3 81 + \log_3 x & (\log_3 3^x = x, \log ab = \log a + \log b) \\ x & = & 4 + \log_3 x & (81 = 3^4) \end{array}$$

De onbekende is nu uit de exponent verdwenen, maar er is een nieuwe complicatie: de onbekende komt nu voor binnen de logaritme. Je zou de onbekende x uit de logaritme kunnen krijgen door een exponentiële functie te gebruiken. Maar dan wordt de x in het linkerlid terug een exponent. Een exacte oplossing is op deze manier niet mogelijk. Er bestaan wel technieken om de vergelijking *benaderend* op te lossen, maar deze behoren niet tot de leerstof van deze cursus. Men kan aantonen

CC BY-NC-SA 4.0

2.7 Exponentiële vergelijkingen

dat er een unieke oplossing is: $x \approx 0.0125\ldots$

Voorbeeld 2.7.3. Los op naar x: $2^x = 4 \cdot 3^{x-1}$.

In deze vergelijking komt de onbekende twee keer voor, telkens in de exponent van een macht, maar voor twee verschillende grondtallen. Dergelijk vergelijking kan op twee manieren worden opgelost.

De eerste oplossingsmethode herschrijft de vergelijking zodanig dat er maar één macht meer voorkomt. We kunnen dan, zoals in het eerste voorbeeld, eenvoudigweg de logaritme nemen om de vergelijking op te lossen.

$$\begin{aligned} 2^x &= 4 \cdot 3^{x-1} = 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = \frac{4}{3} \cdot 3^x && \text{(rechterlid herschrijven)} \\ \frac{2^x}{3^x} &= \frac{4}{3} && \text{(breng onbekenden naar linkerlid)} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x &= \frac{4}{3} && \left(\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x\right) \\ x &= \log_{2/3}\left(\frac{4}{3}\right) \approx -0.7095\ldots && \text{(bereken met een rekentoestel)} \end{aligned}$$

Een tweede oplossingsmethode bestaat erin de logaritme te nemen van linker- en rechterlid met de bedoeling van de onbekende x uit de exponenten te halen. Uit het eerste voorbeeld weten we dat het grondtal van de logaritme geen belang heeft. We gebruiken hier de logaritme met grondtal 10. We krijgen in dit geval een *lineaire* vergelijking in x die we zonder problemen kunnen oplossen.

$$\begin{aligned} 2^x &= 4 \cdot 3^{x-1} \\ \log(2^x) &= \log(4 \cdot 3^{x-1}) = \log 4 + \log(3^{x-1}) \\ x \cdot \log 2 &= \log 4 + (x-1) \cdot \log 3 = x \cdot \log 3 + (\log 4 - \log 3) \\ x \cdot \log 2 - x \cdot \log 3 &= \log 4 - \log 3 \\ x \cdot (\log 2 - \log 3) &= \log 4 - \log 3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{\log 4 - \log 3}{\log 2 - \log 3}.$$

Opnieuw ziet de gevonden oplossing er helemaal anders uit dan wat we met de eerste oplossingsmethode hebben gevonden. Met behulp van de rekenregels voor logaritmen kan je echter zien dat beide oplossingen gelijk zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

2.7.1 Basisoefeningen exponentiële vergelijkingen

Oefening 2.7.1. Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen:

1. $e^{3\ln x}$: ... ...
2. $e^{-\ln(x^2+1)}$: ... ...
3. $e^{-2\ln(\frac{1}{x})}$: ... ...
4. $e^{-2\ln x}$: ... ...

Oefening 2.7.2. Schrijf de volgende uitdrukkingen zodanig dat je een macht krijgt met grondtal e en vereenvoudig:

1. 3^x : ... ...
2. 4^{x^2-1} : ... ...
3. 2^{-x-1} : ... ...
4. 3^{-4x+1} : ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

2.8 Rekenregels voor logaritmen

Uit de rekenregels voor machten volgen de rekenregels voor logaritmen.

Omdat $x = a^{\log_a x}$ en $y = a^{\log_a y}$ volgt uit de rekenregel voor het product van machten $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ dat

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}) = \log_a(a^{\log_a x + \log_a y}) = \log_a x + \log_a y$$

Op gelijkaardige manier volgt uit de rekenregel voor de macht van een macht $(a^r)^s = a^{s \cdot r}$ dat

$$\log_a(x^r) = \log_a\left(\left(a^{\log_a x}\right)^r\right) = \log_a(a^{r \cdot \log_a x}) = r \log_a x$$

en dus in het bijzonder (voor $r = -1$) dat $\log_a \frac{1}{x} = \log_a x^{-1} = -\log_a x$

Omdat $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$, geldt dus ook $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a\left(x \cdot y^{-1}\right) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y$.

Voor een willekeurige b geldt ook volgend verband tussen $\log_a x$ en $\log_b x$:

$$\log_b x = \log_b a^{\log_a x} = \log_a x \cdot \log_b a$$

Samengevat wordt dit:

Eigenschap 2.8.1 (Rekenregels logaritmen).

Logaritme van een product: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

of in woorden: *de logaritme van een product is de som van de logaritmen.*

Logaritme van een quotiënt: $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

of in woorden: *de logaritme van een quotiënt is het verschil van de logaritmen.*

Logaritme van een macht: $\log_a(x^s) = s \cdot \log_a x$

of in woorden: *de logaritme zet een macht om in een product.*

Speciaal geval $s = -1$: $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a x^{-1} = -\log_a x$

Verandering van grondtal: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ of ook $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$

Speciaal geval $b = x$: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

CC BY-NC-SA 4.0

2.8 Rekenregels voor logaritmen

Voorbeeld 2.8.1.

1. $\log 4 + \log 25 = \log(4 \cdot 25) = \log(100) = 2$

2. $\log_8 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 8} = \dfrac{2}{3}$

3. $\dfrac{\log 16}{\log 2} = \log_2 16 = 4$

4. $\log_5 125 = \log_5(5 \cdot 25) = \log_5 5 + \log_5 25 = 1 + 2 = 3$.
of ook: $\log_5 125 = \log_5(5^3) = 3$.

5. $\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right) = \log_2 32 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3$
of ook: $\log_2\left(\dfrac{32}{4}\right) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

6. $\ln e^2 - \ln e = \ln\left(\dfrac{e^2}{e}\right) = \ln e = 1$
of ook: $\ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1$

7. $\log_2 4^5 = 5 \cdot \log_2 4 = 5 \cdot 2 = 10$.
of ook: $\log_2 4^5 = \log_2(2^2)^5 = \log_2 2^{10} = 10$.

Waarschuwing 2.8.1 (Veelgemaakte fouten)**.** Bekijk grondig volgende uitdrukkingen:

1. $\log_5(20 + 5) \neq \log_5 20 + \log_5 5$

2. $\ln(20 + 5) \neq \ln 20 \cdot \ln 5$

3. $\log_5(30 - 5) \neq \dfrac{\log_5 30}{\log_5 5}$

4. $(\log 10)^3 \neq 3 \cdot \log 10$

5. $2 \ln \dfrac{e}{4} \neq \ln \dfrac{e^2}{4}$

In het algemeen kan je dus niet veel doen met de logaritme van een som (of verschil) (zie 1, 2 en 3).

~~$\log(x + y) = \log x + \log y$~~

~~$\log(x + y) = \log x \cdot \log y$~~

~~$\log(x - y) = \dfrac{\log x}{\log y}$~~

~~$(\log x)^n \neq n \cdot \log x$~~

Opmerking 2.8.1 (Logaritmen met rekenmachine)**.**

Eenvoudige rekentoestellen kennen soms enkel de functie 'log()'. Je kan hiermee $\log_{10}(25)$ berekenen maar niet bijvoorbeeld $\log_5(25)$. Je kan echter gebruik maken van de formule om van grondtal te veranderen zodat je $\log_5(25)$ kan bereken als $\dfrac{\log 25}{\log 5}$.

In volgende voorbeelden worden de verschillende rekenregels tegelijk gebruikt:

CC BY-NC-SA 4.0

2.8 Rekenregels voor logaritmen

Voorbeeld 2.8.2. Schrijf de uitdrukking $2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log_3 x - 3 \cdot \log_3 y + 0.5 \cdot \log_3 z &= \log_3(x^2) - \log_3(y^3) + \log_3(z^{0.5}) \\ &= \log_3(x^2 z^{0.5}) - \log_3(y^3) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2 z^{0.5}}{y^3}\right) \\ &= \log_3\left(\frac{x^2\sqrt{z}}{y^3}\right). \end{aligned}$$

Hierbij hebben we eerst de rekenregel voor machten gebruikt, daarna de rekenregel voor product en tenslotte de rekenregel voor quotiënt.

Voorbeeld 2.8.3. Schrijf de uitdrukking $\log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z$ als één logaritme:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + 2\log_{\frac{1}{5}} z &= \log_{\frac{1}{5}} x - \log_{\frac{1}{5}}(yz) + \log_{\frac{1}{5}}(z^2) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}(xz^2) - \log_{\frac{1}{5}}(yz) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz^2}{yz}\right) \\ &= \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{xz}{y}\right). \end{aligned}$$

Opnieuw hebben we gebruik gemaakt van de rekenregel voor machten, de rekenregel voor product en de rekenregel voor quotiënt, in deze volgorde, en tenslotte de breuk binnen de logaritme vereenvoudigd.

Voorbeeld 2.8.4. Bereken de waarde van $\log_2 3 - \log_2 12$ zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Dat kan met behulp van de quotiëntregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 = \log_2\left(\frac{3}{12}\right) &= \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \log_2(2^{-2}) = -2. \end{aligned}$$

Een alternatieve manier gebruikt de productregel:

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 12 = \log_2 3 - \log_2(3 \cdot 4) &= \log_2 3 - \log_2 3 - \log_2 4 \\ &= -\log_2(2^2) = -2. \end{aligned}$$

Voorbeeld 2.8.5. Als gegeven is dat $\log x = 2.4$ en dat $\log y = -1.1$, bereken dan $\log\left(\sqrt{x} \cdot y^3\right)$.

Dit kan gebeuren op twee manieren.

Eerst gebruiken we de betekenis van de logaritme om x en y te bepalen: $x = 10^{2.4}$ en $y = 10^{-1.1}$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.8 Rekenregels voor logaritmen

Dan geldt:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(\sqrt{10^{2.4}}\cdot(10^{-1.1})^3\right)\\ &= \log\left((10^{2.4/2})\cdot(10^{-1.1\cdot 3})\right)\\ &= \log\left(10^{1.2}\cdot 10^{-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{1.2-3.3}\right)\\ &= \log\left(10^{-2.1}\right) = -2.1.\end{aligned}$$

Anderzijds kunnen we gebruik maken van de rekenregels van logaritmen om de gegeven formule te herschrijven als een uitdrukking in $\log x$ en $\log y$:

$$\begin{aligned}\log\left(\sqrt{x}\cdot y^3\right) &= \log\left(x^{0.5}\cdot y^3\right)\\ &= \log(x^{0.5}) + \log(y^3)\\ &= 0.5\cdot\log x + 3\cdot\log y\\ &= 0.5\cdot 2.4 + 3\cdot(-1.1) = 1.2 - 3.3 = -2.1.\end{aligned}$$

Voorbeeld 2.8.6. Herschrijf de uitdrukking $\log_a\sqrt{\dfrac{yz^2}{ax}}$ in functie van $\log_a x$, $\log_a y$ en $\log_a z$, weer door gebruik te maken van de rekenregels:

$$\begin{aligned}\log_a\sqrt{\frac{yz^2}{ax}} &= \log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)^{0.5}\\ &= 0.5\log_a\left(\frac{yz^2}{ax}\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a(yz^2) - \log_a(ax)\right)\\ &= 0.5\cdot\left(\log_a y + log_a(z^2) - \log_a a - \log_a x\right)\\ &= 0.5\cdot\left(-\log_a x + \log_a y + 2\log_a z - 1\right).\end{aligned}$$

We schrijven eerst de vierkanstwortel als een macht, passen dan de rekenregel voor machten toe, vervolgens de regel voor quotiënt, de regel voor product en nogmaals de regel voor macht.

CC BY-NC-SA 4.0

2.8.1 Oefeningen rekenregels logaritmen

2.8.1.1 Niveau 1

Oefening 2.8.1. Zij $a, b, c > 0$. Schrijf in functie van $\log a$, $\log b$ en $\log c$.

1. $\log \dfrac{a}{b^4} = \ldots\ldots$
2. $\log\left(c^3\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right) = \ldots\ldots$
3. $\log \dfrac{a^4bc}{\sqrt{bc^2}} = \ldots\ldots$

Oefening 2.8.2. Schrijf als één logaritme. $(x > 0, y > 0, z > 0)$

1. $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log(xy^2) + 5 \cdot \log y = \log \ldots\ldots$
2. $\dfrac{1}{2} \cdot \log_3\left(\dfrac{y}{x}\right) - \log_3 \sqrt{\dfrac{x}{y}} = \log_3 \ldots\ldots$
3. $\log_5(xy) - \log_5(yz) + \log_5(zx) = \log_5 \ldots\ldots$

2.8.1.2 Niveau 2

Oefening 2.8.3. Schrijf elke uitdrukking in functie van $\log x$, $\log(x-5)$ en $\log(x+1)$.

1. $\log \dfrac{x(x+1)}{x-5} = \ldots\ldots$
2. $\log\left((x+1)^2\sqrt{x-5}\right) = \ldots\ldots$
3. $\log \sqrt{\dfrac{x-5}{x^3(x+1)}} = \ldots\ldots$
4. $\log \dfrac{1}{(x+1)^2} = \ldots\ldots$

Oefening 2.8.4. Schrijf elke uitdrukking als één enkele logaritme.

1. $\log(x+1) - \log x^2 + \dfrac{1}{2}\log(x-3) = \ldots\ldots$
2. $3 - \log x = \ldots\ldots$
3. $5\log(x-1) - \dfrac{1}{2}\log(x+3) = \ldots\ldots$

Oefening 2.8.5. Bereken de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Neem zeker pen en papier bij de hand, want je kan ze niet allemaal uit je hoofd uitrekenen.

1. $\log 25 + \log 40 = \ldots\ldots$
2. $\log_3 36 - \log_3 4 = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2.8.1 Oefeningen rekenregels logaritmen

3. $\log_9 25 - \log_3 15 = \ldots\ldots$

4. $\ln 108 - 2 \cdot \ln 6 + \ln\left(\frac{e}{3}\right) = \ldots\ldots$

Oefening 2.8.6. Bereken zonder gebruik te maken van een rekentoestel.

1. $e^{3\ln 2} = \ldots\ldots$

2. $4^{\log_2 3} = \ldots\ldots$

3. $27^{\log_3 2} = \ldots\ldots$

Oefening 2.8.7. Schrijf als één logaritme. Je mag het grondtal zelf kiezen. $(x > 0, y > 0)$

1. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{\frac{1}{3}} x = \ldots\ldots$

2. $\log_5(4xy) - \log_{\frac{1}{5}}(4xy) = \ldots\ldots$

Oefening 2.8.8.

1. Schrijf onderstaande uitdrukking in functie van $\log(k-1)$, $\log k$ en $\log(k+1)$.

$$\log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \ldots\ldots$$

2.8.1.3 Niveau 3

Oefening 2.8.9.

1. Stel dat y impliciet gegeven is als functie van t door volgende formule:

$$k \cdot t = \frac{1}{3}[\ln(y-2) - \ln(y-5)]$$

Hierin is k een strikt positieve parameter.
Toon aan dat $y = \dfrac{5 - 2e^{-3kt}}{1 - e^{-3kt}}$

Oefening 2.8.10.

1. Zij $a, b, c, d > 0$. Toon aan dat $\log\frac{a}{b} - \log\frac{c}{d} = -\log\frac{b}{d} + \log\frac{a}{c}$

2. Zij $a, b > 0$. Toon aan dat $-\log\frac{2}{a} + \log\frac{2}{b} = -\log\frac{b}{a}$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 3
Afgeleiden

(Versie 2026/09/26HB.14)

3.1 Introductie Week 3

In deze week staan afgeleiden centraal. Sommige studenten zullen hier al goed mee vertrouwd zijn, voor anderen is dit een uitdaging. Het is echter belangrijk om vlot afgeleiden te kunnen berekenen, daar ligt deze week dan ook de focus op. De rekenregels en theorie die je op deze pagina vindt hoor je al te kennen. We herhalen ze hier even. Je vindt deze ook terug in de leidraad van week 3.

Definitie 3.1.1. De afgeleide van een functie $f(x)$, genoteerd als $f'(x)$ of $\frac{d}{dx}[f(x)]$, wordt gegeven door

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

als deze limiet bestaat.

De afgeleide $f'(c)$ is een getal dat aangeeft in welke zin en hoe sterk $f(x)$ verandert als x verandert, vertrekkend vanuit c.

Eigenschap 3.1.1.

- Afgeleide van basisfuncties:

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}; \quad \frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}; \quad \frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a; \quad \frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}$$

- Afgeleide van goniometrische functies: $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x); \quad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
- Veelvoudregel: $\frac{d}{dx}[af(x)] = a\frac{d}{dx}[f(x)]$ of $(au)' = au'$.
- Somregel: $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$ of $(u+v)' = u'+v'$.
- Productregel: $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$ of $(uv)' = u'v + v'u$.
- Quotiëntregel: $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{g(x)^2}$ of $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$.
- Kettingregel in Leibniznotatie: $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{d}{dx}[f(v)] = \frac{df}{dv}\frac{dv}{dx}$.
- Kettingregel (speciaal geval): $\frac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)}\frac{d}{dx}[f(x)]$
- Afgeleide van een inverse functie: $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Definitie 3.1.2. De raaklijn in een punt $(c, f(c))$ aan een functie $y = f(x)$ wordt gegeven door

$$y - f(c) = f'(c)(x - c).$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Begintest Week 3

Indien je deze oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je de opfrissingsmodules verder overslaan, anders herhaal je best grondig deze modules.

Oefening 3.2.1. Bereken voor onderstaande functies de eerste afgeleide naar de variable x. Vereenvoudig je antwoord zo ver mogelijk en noteer je eindoplossing in de vorm $f'(x) = \ldots$.
Opmerking: de functie e^x wordt vaak ook genoteerd als $\exp(x)$.

1. $f(x) = 3x^5$: $f'(x) = \ldots\ldots$
2. $f(x) = 2\sin(3x+1)$: $f'(x) = \ldots\ldots$
3. $f(x) = \ln(1-2x)$: $f'(x) = \ldots\ldots$
4. $f(x) = \exp(x - \ln(x))$: $f'(x) = \ldots\ldots$
5. $f(x) = 2^{\sqrt{x^2-1}}$: $f'(x) = \ldots\ldots$
6. $f(x) = x \cdot \ln(x)$: $f'(x) = \ldots\ldots$
7. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sin(x)}$: $f'(x) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Basisregels

De meest eenvoudige regels voor het berekenen van afgeleiden gaan over afgeleiden van machten, sommen en scalaire veelvouden. Die basisregels moeten later worden aangevuld met de regels voor producten en quotiënten en voor samenstellingen.

Er worden telkens drie versies gegeven van de regels: eerst de notatie met f', vervolgens de notatie met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, en tenslotte een notatie met differentialen.

Het is belangrijk om na verloop van tijd met elke notatie vertrouwd te worden. Bij het begin van je studie kan je *zelf kiezen* welke notatie voor jou het meest duidelijk is. We vermelden hier niet de notatie Df die in vele handboeken van het secundair onderwijs voorkomt, maar als je er vertrouwd mee bent kan je die natuurlijk ook nog toevoegen.

Eigenschap 3.3.1 (Basisregels voor afgeleiden)**.**

De afgeleide van constante en machtsfunctie $x \mapsto c$ en $x \mapsto x^r$ (met $c, r \in \mathbb{R}$) zijn:

$$(x^r)' = rx^{r-1} \qquad (c)' = 0$$

Dezelfde regel kan geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^r) = rx^{r-1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = 0$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}x^r = rx^{r-1}\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}c = 0$$

Oefening 3.3.1.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7) = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi^2) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3) = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{n+42}) = \ldots\ldots$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^\pi) = \ldots\ldots$

Merk op dat de machtregel niet alleen geldt voor natuurlijke getallen als exponent, maar voor *alle* exponenten.

Voorbeeld 3.3.1. Berekening afgeleiden van rationale machten:

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-2}) = (-2)\cdot x^{-2-1} = -2x^{-3}$

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-42}) = (-42)\cdot x^{-42-1} = -42x^{-43}$

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\cdot x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Oefening 3.3.2. Bereken volgende afgeleiden:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1/2}) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Basisregels

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{\sqrt{x}}) = \ldots\ldots$

Er zijn ook eenvoudige regels voor de som en scalaire veelvouden:

Eigenschap 3.3.2 (Lineariteit van afleiden)**.** De afgeleide van de som $f+g$ en het scalair veelvoud cf van afleidbare functies f en g (met $c \in \mathbb{R}$) wordt gegeven door:

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g'$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cf) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}(cf) = c\mathrm{d}f \qquad \mathrm{d}(f+g) = \mathrm{d}f + \mathrm{d}g$$

Oefening 3.3.3.

1. $(7x)' = \ldots\ldots$

2. $(7x^2)' = \ldots\ldots$

3. $(7x+1)' = \ldots\ldots$

4. $(7x^2+7x)' = \ldots\ldots$

Met deze beperkte set van regels kunnen de afgeleiden van *alle* veeltermen berekend worden.

CC BY-NC-SA 4.0

3.4 Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide functie kan men volgende formules aantonen (met $a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$).

Eigenschap 3.4.1 (Afgeleiden exponentiële en logaritmische functies)**.**

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a$$
$$(\ln x)' = 1/x \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a^x = a^x \ln a$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}e^x = e^x \,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}a^x = a^x \ln a \,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}(\ln x) = \frac{\mathrm{d}x}{x} = x^{-1}\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\log_a x) = \frac{\mathrm{d}x}{x \ln a}$$

Voorbeeld 3.4.1.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7^x) = 7^x \ln 7$. Verwar dit niet met $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^7) = 7x^6$.

Oefening 3.4.1. Bereken de afgeleiden van volgende exponentiële en logaritmische functies.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi^x) = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(25 \cdot 7^x) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((a+7)^x) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.5 Afgeleiden van goniometrische functies

Vertrekkend van de definitie van de afgeleide functie kan men volgende formules aantonen.

Eigenschap 3.5.1 (Afgeleiden goniometrische functies)**.**

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

Eigenschap 3.5.2 (Afgeleiden goniometrische functies)**.**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$$

of met differentialen:

Eigenschap 3.5.3 (Afgeleiden goniometrische functies)**.**

$$\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Product- en quotiëntregel

We tonen hoe je *producten en quotiënten* van functies kan afleiden. Later volgt nog een regel over de *samenstelling* van functies. Met deze technieken kunnen dan de afgeleiden van ongeveer alle afleidbare functies die in de praktijk voorkomen worden berekend. We geven de regels in de drie notaties.

Eigenschap 3.6.1 (Productregel en quotiëntregel)**.**

De afgeleide van het product $f \cdot g$ en het quotiënt $\frac{f}{g}$ van twee afleidbare functies f en g wordt gegeven door:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad \textbf{(productregel)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

Dezelfde regels kunnen ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f \cdot g) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g + f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \quad \textbf{(productregel)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot g - f \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

of met differentialen:

$$\mathrm{d}(f \cdot g) = (\mathrm{d}f) \cdot g + f \cdot (\mathrm{d}g) \quad \textbf{(productregel)} \qquad \mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\mathrm{d}f) \cdot g - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2} \quad \textbf{(quotiëntregel)}$$

Voorbeeld 3.6.1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto x^4 \ln x$.

We zoeken de afgeleide van het product van x^4 en $\ln x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4 \cdot \ln x\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^4\right) \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) \\ &= 4x^3 \cdot \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} = x^3(4 \ln x + 1)\,.\end{aligned}$$

Voorbeeld 3.6.2. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \frac{2x+3}{4x+5}$.

We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $2x+3$ en $4x+5$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{2x+3}{4x+5} &= \frac{2(4x+5) - 4(2x+3)}{(4x+5)^2} \\ &= \frac{8x + 10 - 8x - 12}{(4x+5)^2} = \frac{-2}{(4x+5)^2}\end{aligned}$$

Voorbeeld 3.6.3. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \frac{\ln x}{\sin x}$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.6 Product- en quotiëntregel

We zoeken de afgeleide van het quotiënt van $\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de quotiëntregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln x}{\sin x}\right) &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x)\cdot \sin x - \ln x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\frac{\sin x}{x} - \ln x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{x\,\sin x} - \frac{\ln x\,\cos x}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

Oefening 3.6.1.

1. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$

Eigenschap 3.6.2. De formule voor product kan je veralgemenen naar een product van meerdere factoren:

$$\begin{aligned}(f\cdot g\cdot h)' &= (f\cdot(g\cdot h))' \\ &= f'\cdot(g\cdot h) + f\cdot(g\cdot h)' \\ &= f'\cdot(g\cdot h) + f\cdot(g'\cdot h + g\cdot h') \\ &= f'\cdot g\cdot h + f\cdot g'\cdot h + f\cdot g\cdot h'\end{aligned}$$

Dus: leid *elke* factor af, vermenigvuldig die afgeleide met de andere factoren en tel al de producten op.

Voorbeeld 3.6.4. Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto x\cdot\ln x\cdot\sin x$.

We zoeken de afgeleide van het product van x,$\ln x$ en $\sin x$, dus we gebruiken de productregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\cdot\ln x\cdot\sin x) &= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x)(\ln x\cdot\sin x) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x)(x\cdot\sin x) + (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x)(x\cdot\ln x) \\ &= \ln x\sin x + \sin x + x\ln x\cos x.\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.7 Kettingregel

De zogenaamde *kettingregel* laat toe om de afgeleide te berekenen van *samengestelde* functies.

Eigenschap 3.7.1 (Kettingregel)**.**

De *afgeleide van de samenstelling* van twee afleidbare functies f en g is gelijk aan:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \textbf{(kettingregel)}$$

Dezelfde kettingregel kan ook geschreven worden met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) \quad \textbf{(kettingregel)}$$

of met differentialen:

$$d(f(g(x))) = f'(g(x))\, dg(x) = f'(g(x))\, g'(x)\, dx \quad \textbf{(kettingregel)}.$$

Opmerking 3.7.1. We hebben in de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie de afgeleide van f toch genoteerd als f' om de notatie eenvoudig te houden. De kettingregel kan ook geformuleerd worden als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}g}(f(g)) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$$

De formules worden duidelijker met enkele voorbeelden:

Voorbeeld 3.7.1.

(a) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto (5x+2)^2$:

Merk allereerst op dat je in dit voorbeeld de kettingregel niet *moet* gebruiken. Je kan ook het kwadraat eerst uitrekenen:

$$((5x+2)^2)' = (25x^2 + 20x + 4)' = 50x + 20$$

Je *mag* de kettingregel wel gebruiken en je vindt uiteraard hetzelfde resultaat.

We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

- De functie $x \mapsto (5x+2)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto 5x+2$$

dan is $f(g(x)) = f(5x+2) = (5x+2)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto 5$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{5x+2}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{5x+2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{5}^{g'(x)} = 10(5x+2) = 50x+20$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.7 Kettingregel

waarbij $f'(g(x)) = f'(5x+2) = 2(5x+2)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((5x+2)^2)' = 2(5x+2)\cdot 5 = 10(5x+2)$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x+2)^2 = 2(5x+2)\cdot 5.$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(5x+2)^2 = 2(5x+2)\,d(5x+2) = 2(5x+2)5\,dx = 10(5x+2)\,dx$$

(b) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin^2 x$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder het kwadraat met haakjes: $x \mapsto (\sin x)^2$.
We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

- De functie $x \mapsto (\sin x)^2$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto \sin x$$

dan is $f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^2$. Omdat

$$f' : x \mapsto 2x$$
$$g' : x \mapsto \cos x$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{(\overbrace{\sin x}^{g(x)})^2}_{f(g(x))}\Big)' = \underbrace{2(\overbrace{\sin x}^{g(x)})}_{f'(g(x))}\cdot \overbrace{\cos x}^{g'(x)} = 2\sin x\cos x$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(\sin x) = 2(\sin x)$

Indien je vertrouwd bent met de kettingregel *moet* je de samenstellende functies geen namen geven. Je mag ook sneller rekenen als volgt:

$$((\sin x)^2)' = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

- Je kan ook de notatie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken. Dat geeft (enkel kort opgeschreven):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)^2 = 2(\sin x)\cdot\cos x = 2\sin x\cos x$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(\sin x)^2 = 2(\sin x)\,d(\sin x) = 2(\sin x)\cos x\,dx = 2\sin x\cos x\,dx$$

(c) Bereken de afgeleide van de functie $x \mapsto \sin x^2$:
Voor de duidelijkheid schrijven we verder haakjes rond het kwadraat: $x \mapsto \sin(x^2)$.
We lossen de oefening op met de 3 verschillende notaties.

CC BY-NC-SA 4.0

3.7 Kettingregel

- De functie $x \mapsto \sin(x^2)$ is een samengestelde functie. Als we stellen dat

$$f : x \mapsto \sin x$$
$$g : x \mapsto x^2$$

dan is $f(g(x)) = f(x^2) = \sin(x^2)$. Omdat

$$f' : x \mapsto \cos x$$
$$g' : x \mapsto 2x$$

levert de toepassing van de kettingregel $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\Big(\underbrace{\sin(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f(g(x))} \Big)' = \underbrace{\cos(\overbrace{x^2}^{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \overbrace{2x}^{g'(x)} = 2x\cos x^2$$

waarbij $f'(g(x)) = f'(x^2) = \cos(x^2)$

Je *moet* de samenstellende functies geen namen geven. Je kan ook sneller rekenen als volgt:

$$(\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$$

- Je kan ook de notatie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ gebruiken, dat geeft

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x^2) = \cos x^2 \cdot 2x$$

- Het gebruik van differentialen geeft

$$d(\sin x^2) = \cos x^2 d(x^2) = \cos x^2\, 2x dx$$

Oefening 3.7.1.

1. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 5^{x^2} = \ldots\ldots$

2. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie

$$f(x) = \ln g(x)$$

in termen van de functie g en de afgeleide functie g'.

Eigenschap 3.7.2. De *ketting*regel berekent de afgeleide van een ketting of *keten* van samenstellingen:

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Dus je leidt de samenstellende functies af *van buiten naar binnen* en vermenigvuldigt de afgeleiden.

Voorbeeld 3.7.2. Bereken $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos^3(4x^2 - 7)$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.7 Kettingregel

We gebruiken weer de kettingregel, maar nu hebben we een samenstelling van drie functies: $f(x) = x^3$, $g(x) = \cos x$ en $h(x) = 4x^2 - 7$.

$$f(g(h(x))) = f(g(4x^2 - 7)) = f(\cos(4x^2 - 7)) = \cos^3(4x^2 - 7)$$

In de eerste stap van de berekening gebruiken we:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(g(h(x)))\right] = f'(g(h(x))) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(g(h(x)))\right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos^3\left(4x^2-7\right)\right] &= 3\left(\cos\left(4x^2-7\right)\right)^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos\left(4x^2-7\right)\right] \\
&= 3\cos^2\left(4x^2-7\right)\left(-\sin\left(4x^2-7\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[4x^2-7\right]\right) \\
&= -3\cos^2\left(4x^2-7\right)\sin\left(4x^2-7\right) \cdot 8x \\
&= -24x\sin\left(4x^2-7\right)\cos^2\left(4x^2-7\right).
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.7.1 Oefeningen Afgeleiden

3.7.1.1 Niveau 1

Oefening 3.7.2.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/3}) = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1/3}) = \ldots\ldots$

Oefening 3.7.3. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^4 = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(9x^9) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4 - 4x) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x + \sin x) = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x - \cos x) = \ldots\ldots$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7e^x) = \ldots\ldots$
7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{7x}) = \ldots\ldots$
8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x + e^x) = \ldots\ldots$

Oefening 3.7.4. Bereken de afgeleide van volgende rationale functies.

1. Bereken de afgeleide van $\frac{x-4}{x}$. Antwoord:$\ldots\ldots$
2. Bereken de afgeleide van $\frac{x}{x+3}$. Antwoord: $\ldots\ldots$
3. Bereken de afgeleide van $\frac{1}{x+5}$. Antwoord: $\ldots\ldots$
4. Bereken de afgeleide van $\frac{4-x}{3-x}$. Antwoord:$\ldots\ldots$

3.7.1.2 Niveau 2

Oefening 3.7.5. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((1+x)\ln x) = \ldots\ldots$
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2\cos t) = \ldots\ldots$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{-1}{t^2}\right) = \ldots\ldots$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{3t-1}{2t+2}\right) = \ldots\ldots$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(4x+5) = \ldots\ldots$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(7t^2) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

3.7.1 Oefeningen Afgeleiden

7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{4x^3+1}{3x} = \ldots\ldots$

8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(-8x^2-1) = \ldots\ldots$

9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^3 3x = \ldots\ldots$

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2-7x+8} = \ldots\ldots$

11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln t\ \sin(t^2)) = \ldots\ldots$

12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1-t^2) = \ldots\ldots$

13. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[3]{(x^2+3)^4} = \ldots\ldots$

Oefening 3.7.6. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie f in termen van g en van de afgeleide van de functie g voor volgende functies f:

1. Als $f(x) = 2g(x)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

2. Als $f(x) = (g(x))^2$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

3. Als $f(x) = g(x^2)$, dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

4. Als $f(x) = g(3x) + 3g(x) + (g(x))^3 + g(x) + g(3) + xg(3) + g(3^x) + 3^{g(x)}$,
dan is $f'(x) = \ldots\ldots$

Oefening 3.7.7. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de functie f in het gegeven punt.

1. $f(x) = 4x^{-4} - 1$ in het punt met als x-coördinaat 1. $\ldots\ldots$

2. $f(x) = 1 - \cos x$ in het punt met als x-coördinaat $\frac{\pi}{2}$. $\ldots\ldots$

3. $f(x) = 1 - x^2$ in het punt met als x-coördinaat 2. $\ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 4
Afgeleiden (toepassingen)

(Versie 2026/09/26HB.14)

4.1 Introductie Week 4

Voor sommige studenten valt de oefenzitting over 'Toepassingen van afgeleiden' in week 4.
Deze week bouwen we verder op de kennis die we in week 3 hebben opgedaan. De rekenregels van afgeleiden zal je opnieuw nodig hebben, maar worden hier niet herhaald. De klemtoon ligt deze week op toepassingen van afgeleiden: het onderzoeken van het functieverloop en het bepalen van extrema van functies. Partiële afgeleiden komen kort opnieuw aan bod en zullen deze week gebruikt worden om functies in meerdere veranderlijken te lineariseren.

CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Begintest Week 4

Indien je deze oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je de opfrissingsmodules verder overslaan, anders herhaal je best grondig deze modules.

Oefening 4.2.1. Geef het tekenverloop van de functie f met het gegeven functievoorschrift. Bepaal hiervoor het nulpunt/ de nulpunten van de functie en noteer de correcte tekens in een tabel. Controleer zelf je antwoord met behulp van een grafisch rekenmachine of websites zoals GeoGebra en WolframAlpha.

1. $f(x) = -x + 8$

2. $f(x) = x^2 + 5x - 6$

3. $f(x) = -x^2 + 4x - 7$

4. $f(x) = x^2 - 6x + 9$

Oefening 4.2.2. Bereken in de volgende oefeningen $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ van de gegeven functie f:

1.
$$f(x,y) = \frac{y^4}{x^3} - \frac{1}{x^3 y^4}$$
$$\dots\dots$$

2.
$$f(x,y) = e^{-y^2}\cos(x^2 - y^2)$$
$$\dots\dots$$

3.
$$f(x,y) = \ln(2x + y)$$
$$\dots\dots$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Minimum-Maximumproblemen

In heel wat wetenschappelijke problemen zoeken we het *maximum* of het *minimum* van een zekere grootheid. Deze grootheid kan van wiskundige, fysische, economische of andere aard zijn, bijvoorbeeld een maximale of minimale inhoud, oppervlakte of afstand, minimale kosten of maximale winst. Dergelijke minimum-maximumproblemen worden ook wel optimalisatieproblemen genoemd, en *afgeleiden* spelen een belangrijke rol bij het vinden van de oplossingen. We herhalen kort de theoretische achtergrond en geven enkele voorbeelden.

Definitie 4.3.1 (Minimum en maximum van een functie)**.**

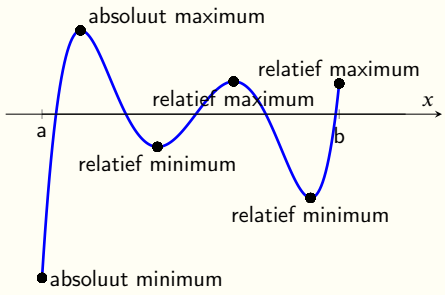
Een reële functie f gedefinieerd op $A \subseteq \mathbb{R}$

- bereikt een **absoluut maximum** in een punt $p \in A$ indien voor elke $x \in A$ geldt: $f(p) \geq f(x)$.
- bereikt een **absoluut minimum** in een punt $p \in A$ indien voor elke $x \in A$ geldt: $f(p) \leq f(x)$.
- bereikt een **relatief** of **lokaal maximum** in een punt $p \in A$ indien er een open interval I rond p bestaat zodat voor elke $x \in I \cap A$ geldt: $f(p) \geq f(x)$.
- bereikt een **relatief** of **lokaal minimum** in een punt $p \in A$ indien er een open interval I rond p bestaat zodat voor elke $x \in I \cap A$ geldt: $f(p) \leq f(x)$.

Een **extremum** is ofwel een maximum ofwel een minimum.

Opmerking 4.3.1.

Merk op dat een functie gedefinieerd op een interval $[a, b]$ ook een lokaal extremum kan bereiken in de randpunten a en b. Zo bereikt onderstaande functie een absoluut minimum in a en een relatief maximum in b.



Een *absoluut* maximum is dus steeds ook een *relatief* maximum, een *absoluut* minimum is steeds ook een *relatief* minimum.

Maak steeds onderscheid tussen de x-waarde(n) *waar een maximum wordt bereikt*, en *het maximum zelf*, dat een functiewaarde, dus een y-waarde is.

Bij het bepalen van de extrema van een functie f speelt de afgeleide f' een belangrijke rol:

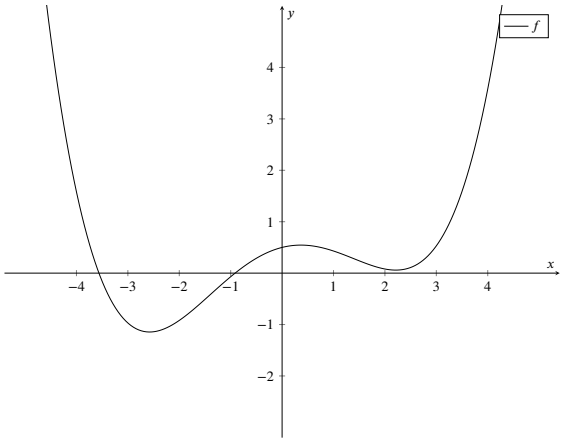
Eigenschap 4.3.1. Voor een continue functie f op $[a, b]$ die afleidbaar is op $]a, b[$ geldt:

- als $f'(x) > 0$ voor elke $x \in]a, b[$, dan is f *strikt stijgend* in $[a, b]$
- als $f'(x) < 0$ voor elke $x \in]a, b[$, dan is f *strikt dalend* in $[a, b]$
- als $f'(c) = 0$ voor een $c \in]a, b[$, dan heeft de grafiek van f in $(c, f(c))$ een *horizontale raaklijn*.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Minimum-Maximumproblemen

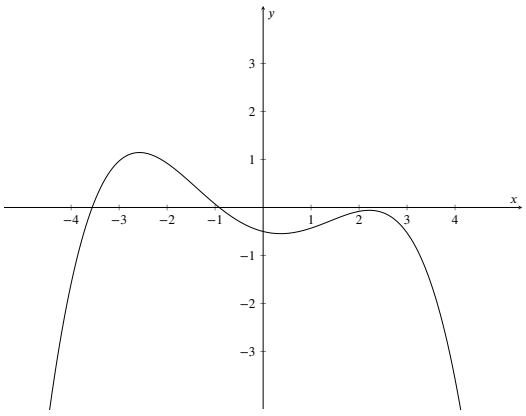
Oefening 4.3.1. Hieronder zie je de grafiek van een functie f.



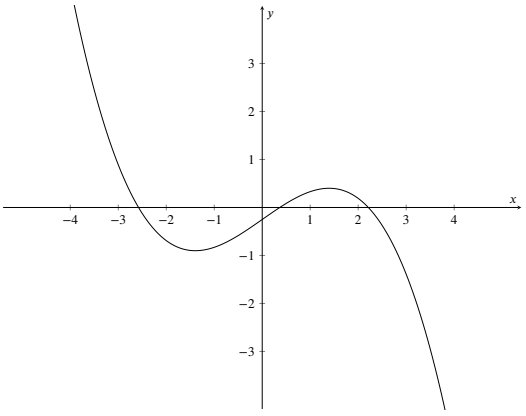
Welke van de volgende figuren is de grafiek van de afgeleide functie f'?

Meerkeuze:

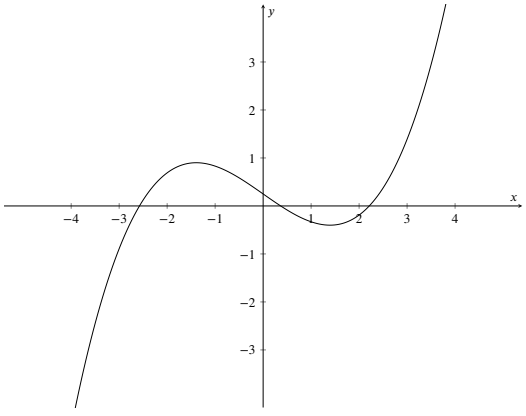
(a)



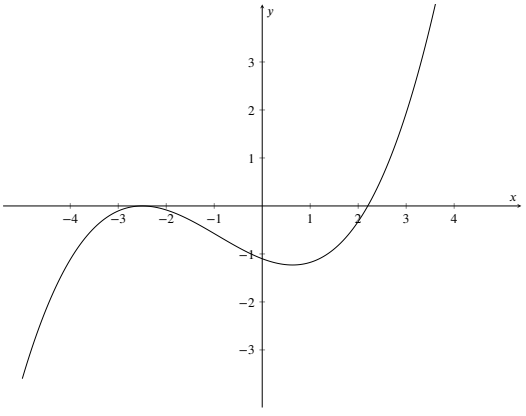
(c)



(b)



(d)



Definitie 4.3.2. Als $f'(c) = 0$ noemen we c een **kritiek punt** of een **stationair punt** van f.

Een *kritiek punt van* f is dus gewoon een andere naam voor *een nulpunt van de afgeleide van* f.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Minimum-Maximumproblemen

De kritieke punten en het tekenverloop van de afgeleide f' geven ons heel wat informatie over het verloop van f.

Voorbeeld 4.3.1. Onderzoek via de afgeleide het dalen en stijgen van de functie $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en bepaal de extrema.

We berekenen eerst de afgeleide:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

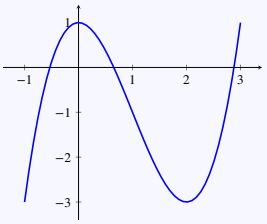
en bepalen daarvan de nulpunten (en dus de kritieke punten van f):

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = 2$$

Vervolgens maken we een *tabel* met

- op de eerste lijn de x-waarden die tot het domein van de functie behoren, met van klein naar groot alle *kritieke punten*,
- op de tweede lijn het *tekenverloop van* f': schrijf nul onder de kritieke punten, en plustekens/-mintekens daartussen naargelang het teken van f'. In dit voorbeeld kunnen we deze tekens vinden als het tekenverloop van een tweedegraadsveelterm.
- op de derde lijn *het verloop van de grafiek van* f: Waar $f'(x) > 0$ stijgt f en waar $f'(x) < 0$ daalt f. We gebruiken het symbool $\nearrow$ voor stijgend en $\searrow$ voor dalend.
- waar de functie overgaat van stijgend naar dalend, is er een relatief maximum, waar ze overgaat van dalend naar stijgend is er een relatief minimum.

x		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	rel max	$\searrow$	rel min	$\nearrow$



In dit voorbeeld is er geen absoluut minimum omdat $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ en geen absoluut maximum omdat $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Opmerking 4.3.2.

- Als het domein een begrensd interval [a,b] is, vermeld je in de tabel op de eerste lijn ook de randpunten a en b.
- Om extrema te bepalen is het niet nodig of nuttig *de nulpunten van de functie* f te bepalen.

In bovenstaand voorbeeld zijn de twee relatieve extrema ook de twee kritieke punten van f. Dat is echter *niet altijd* het geval.

Eigenschap 4.3.2. Voor een functie f op $[a, b]$ en een punt $c \in]a, b[$ met f afleidbaar in c geldt:

als f een relatief extremum bereikt in c **dan** is $f'(c) = 0$

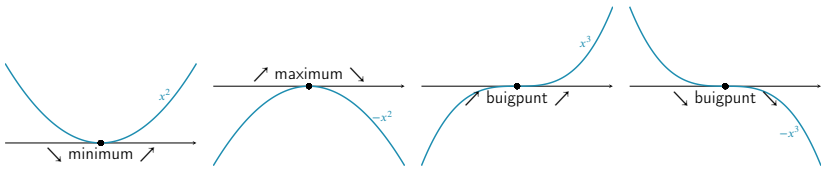
Wat kunnen we besluiten uit deze eigenschap? We zijn op zoek naar de relatieve extrema van een functie.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Minimum-Maximumproblemen

De kritieke punten kunnen we gemakkelijk berekenen. Volgens deze eigenschap zijn, onder de punten van $]a,b[$ waar de functie f een afgeleide heeft, de kritieke punten de enige *kandidaat-extrema*. Er zijn echter twee vervelende subtiliteiten: een kritiek punt is niet altijd een extremum, en randpunten en punten waar de functie niet afleidbaar is kunnen extrema zijn zonder kritieke punten te zijn.

Een kritiek punt is ofwel een extremum ofwel *een buigpunt*.



Om te weten of een kritiek punt een relatief minimum, relatief maximum of een buigpunt is zijn er twee methodes:

- Het *tekenverloop van de afgeleide* f' bepaalt of er een minimum, een maximum dan wel een buigpunt optreedt. Er zijn de volgende mogelijkheden:

x		c	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	relatief max	↘

x		c	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	relatief min	↗

x		c	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	geen extremum	↗

x		c	
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	geen extremum	↘

- Je kan ook het *teken van de tweede afgeleide* $f''(c)$ gebruiken als die bestaat, maar de techniek van de tweede afgeleide test behandelen we hier niet. Deze techniek kan wel nuttig zijn wanneer het moeilijk is om het tekenverloop van f' te vinden.

Je moet niet beide methodes toepassen, één van beide volstaat.

Voorbeeld 4.3.2. Onderzoek via de afgeleide het dalen en stijgen van de functie $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ en bepaal de extrema.

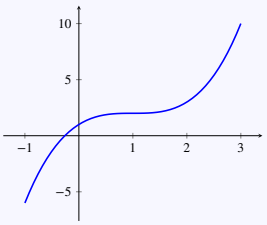
We berekenen eerst de afgeleide:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$$

en bepalen daarvan de nulpunten (en dus de kritieke punten van f):

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x		1	
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	↗	buigpunt	↗



De functie gaat in het kritiek punt over van stijgend naar stijgend. We hebben dus geen relatief maximum en ook geen relatief minimum, we hebben een buigpunt.

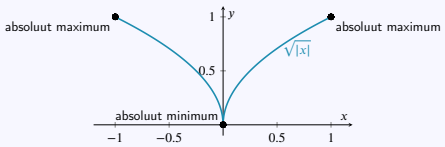
CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Minimum-Maximumproblemen

Extrema van functies kunnen *toch* voorkomen in punten die geen kritieke punten zijn.

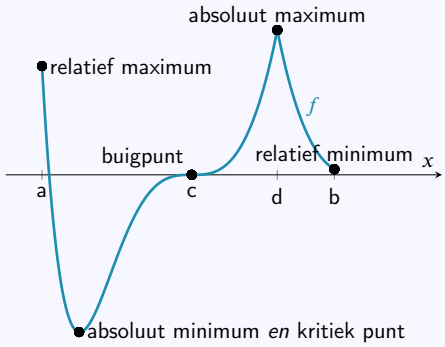
Extrema kunnen namelijk voorkomen in een *randpunt a of b van het interval* $[a, b]$ of in een punt waar de *functie niet afleidbaar* is.

Voorbeeld 4.3.3. De functie $x \mapsto \sqrt{|x|}$ op het interval $[-1, 1]$ heeft twee maxima en één minimum, en geen enkel van die drie punten zijn kritieke punten (ze behoren dus *niet* tot de punten waar de afgeleide nul is). De punten -1 en 1 zijn randpunten van $[-1, 1]$, en in 0 is de functie niet afleidbaar.



Volgend voorbeeld geeft een visueel overzicht van extrema die geen kritiek punt zijn en van kritieke punten die geen extremum zijn:

Voorbeeld 4.3.4. Onderstaande functie f, gedefinieerd op een interval $[a, b]$, bereikt een relatief maximum in a, een relatief minimum in b, een absoluut maximum in d, en een buigpunt in c. De punten a en b zijn *randpunten* (extrema, maar geen kritieke punten), de functie is *niet afleidbaar* in d (extremum, maar geen kritiek punt), en heeft een *buigpunt* in c (kritiek punt, maar geen extremum):



Opmerking 4.3.3.

- Wanneer je extrema zoekt van een functie gedefinieerd op een gesloten interval moeten de randpunten zeker bekeken worden.
- Voor functies die niet afleidbaar zijn in sommige punten van hun domein, moet je op een andere manier de extrema onderzoeken, bijvoorbeeld door de grafiek van de functie te tekenen.

In oefeningen en toepassingen zoeken we vaak geen *relatieve* extrema maar *absolute* extrema.

Eigenschap 4.3.3 (Algoritme voor absolute extrema)**.**

Voor begrensde functies is het absolute maximum het grootste van alle relatieve maxima, het absolute minimum is het kleinste van alle relatieve minima.

Voor een afleidbare functie f gedefinieerd op $[a, b]$ bepaal je absolute extrema door de *functiewaarde* te berekenen in elk relatief extremum en in de randpunten a en b. De grootste van die functiewaarden is het absolute maximum, de kleinste is het absolute minimum.

Volgende voorbeelden illustreren de werkwijze voor het vinden van extrema bij vraagstukken. Vooraleer

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Minimum-Maximumproblemen

je kritieke punten kan zoeken moet je eerst de veranderlijken, de functie die minimaal of maximaal moet zijn en het domein van deze functie vastleggen. In sommige vraagstukken zijn hievoor meerdere keuzes mogelijk.

Voorbeeld 4.3.5.

Toon aan dat van alle rechthoeken met gegeven oppervlakte $S \neq 0$ het vierkant (met oppervlakte S) de kleinste omtrek heeft.

Uitwerking:

- **Kies veranderlijken**: We noteren met x en y de lengtes van de zijden van een rechthoek met oppervlakte S.
- **Bepaal het domein**: Omdat x en y lengtes voorstellen en $S \neq 0$ weten we dat $x > 0$ en $y > 0$.
- **Bepaal de functie** die minimaal moet zijn:
  - Je zoekt het minimum van de omtrek, dus van $2x + 2y$. Deze uitdrukking bevat echter twee veranderlijken, en daarvoor werkt bovenstaande theorie niet. Je moet proberen één van de veranderlijken uit te drukken in termen van de andere.
  - Uit het gegeven halen we dat $S = x.y$ dus $y = \frac{S}{x}$. Dit geeft het **verband tussen de twee variabelen**.
  - We schrijven deze omtrek als een functie van één variabele $f(x)$, door het verband tussen beide variabelen te gebruiken:
    $f(x) = 2x + 2\frac{S}{x} = 2(x + \frac{S}{x})$ met $x > 0$
- **Zoek het (absolute) minimum van deze functie** f:
  - $f'(x) = 2(1 - \frac{S}{x^2})$
  - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{S}$
  - Omdat $x > 0$ behoud je verder alleen $\sqrt{S}$. Met behulp van het tekenverloop onderzoek je welk soort kritiek punt dit is.

x		$\sqrt{S}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	relatief min	$\nearrow$

    Nemen we $x > \sqrt{S}$, dan is $x^2 > S$, dus $1 > \frac{S}{x^2}$, dus $1 - \frac{S}{x^2} > 0$ en dus is f' groter dan 0. Vandaar het plusteken bij het tekenverloop van f'. Met een analoge redenering vind je het minteken voor $x < \sqrt{S}$.

    Omdat de functie $f(x)$ daalt tot $\sqrt{S}$ en dan stijgt, bereikt de omtrek f een *relatief minimum* in $x = \sqrt{S}$. Aangezien dit het enige minimum is voor $x > 0$ is dit ook het gezochte absolute minimum.
- **Besluit**: Als $x = \sqrt{S}$ dan is ook $y = \sqrt{S}$, en de gezochte rechthoek is dus een vierkant.

Voorbeeld 4.3.6.

Een draad van 4 meter wordt in 2 stukken geknipt. Met één stuk wordt een vierkant gemaakt, met het andere een cirkel. We willen de ingesloten oppervlakte voor beide figuren samen maximaliseren. Hoeveel draad gebruik je best voor de cirkel?

Uitwerking:

CC BY-NC-SA 4.0

4.3 Minimum-Maximumproblemen

- **Kies veranderlijken**: We noteren met x de omtrek van de cirkel, dan is $4-x$ de omtrek van het vierkant.
- **Domein:** Uit de opgave volgt dat $x \in [0,4]$.
- **Bepaal de functie** die maximaal moet zijn:
  - De oppervlakte van een vierkant is het kwadraat van de zijde, en de omtrek is vier keer zijde. De oppervlakte van het vierkant is dus $\frac{(4-x)^2}{4^2} = \frac{(4-x)^2}{16}$
  - De oppervlakte van een cirkel is π maal de straal in het kwadraat, de omtrek is 2π maal de straal. De straal is dus $\frac{x}{2\pi}$ en bijgevolg is de oppervlakte van de cirkel $\frac{x^2}{4\pi}$

  We zoeken bijgevolg het maximum van $f(x) = \frac{(4-x)^2}{16} + \frac{x^2}{4\pi}$ met $x \in [0,4]$
- **Zoek het (absolute) maximum van deze functie** f:
  - $f'(x) = -\frac{2(4-x)}{16} + \frac{2x}{4\pi} = -\frac{1}{2} + (\frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi})x$
  - $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{\pi+4}$
  - Hieruit mogen we niet meteen besluiten dat $x = \frac{4\pi}{\pi+4}$ het gezochte maximum is. Met behulp van het tekenverloop gaan we na welk soort kritiek punt dit is.

x	0		$\frac{4\pi}{\pi+4}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	relatief min	$\nearrow$	

  Dus bereikt f een relatief *minimum* in $x = \frac{4\pi}{\pi+4}$, en dit is bijgevolg **niet** het gezochte punt.
  - Uit het tekenverloop hierboven volgt dat de maxima van f te vinden zijn in de *randpunten van het domein* $[0,4]$. We berekenen de functiewaarden in deze randpunten om te weten waar het absolute maximum zich bevindt.

x	0		$\frac{4\pi}{\pi+4}$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	relatief min	$\nearrow$	$\frac{4}{\pi}$

- **Besluit:** We vinden het maximum van f in 4. De omtrek van de cirkel moet dus 4 meter zijn, deze van het vierkant 0. De ingesloten oppervlakte is dus maximaal als de draad volledig voor de cirkel gebruikt wordt.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3.1 Oefeningen Minimum-maximumproblemen

4.3.1.1 Niveau 2

Oefening 4.3.2. Hoe moet je een touw van lengte $L \neq 0$ leggen om er een rechthoek mee te vormen die een zo groot mogelijke oppervlakte heeft?

Oefening 4.3.3. De som van twee positieve getallen a en b is 100, waarbij $a \leq b$. Zoek deze getallen als

1. hun product maximaal moet zijn: $a = \ldots$ en $b = \ldots$

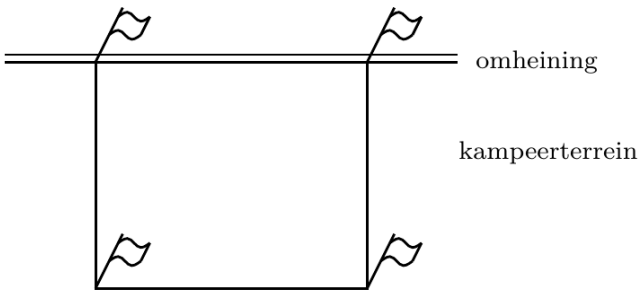
2. de som van hun kwadraten minimaal moet zijn: $a = \ldots$ en $b = \ldots$

3. de som van hun kwadraten maximaal moet zijn: $a = \ldots$ en $b = \ldots$

4. het product van het kwadraat van een getal met de derde macht van het andere getal maximaal moet zijn: $a = \ldots$ en $b = \ldots$

Oefening 4.3.4. Op een groot kampeerterrein in de Ardennen krijgt elke vakantieganger bij aankomst 4 vlaggetjes en 30 m touw om zijn kampeerplaats af te bakenen in de vorm van een rechthoek. Je mag echter ook de omheining aan de rand van het terrein gebruiken, zodat je een groter gebied kan afbakenen.

Wat is de maximale oppervlakte die je kan afspannen?

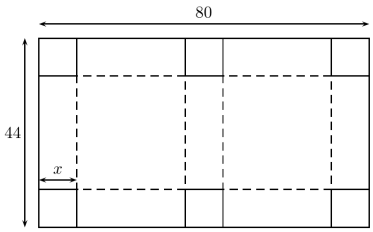


Oefening 4.3.5. Een poster moet een oppervlakte hebben van 0.18 m^2. Er wordt niet geprint op een afstand kleiner dan 3 cm van de boven- en onderzijde, en op 2 cm van de linker- en rechterzijde. Welke afmetingen moet de poster hebben opdat de printbare oppervlakte maximaal zou zijn.

Oefening 4.3.6. Bij Bakker Jansens thuis liggen een groot aantal kartonnen van 44 cm op 80 cm, en hij wil hieruit zelf taartendozen maken. Door 6 vierkantjes met zijde x weg te knippen komen de zijflappen vrij.

CC BY-NC-SA 4.0

4.3.1 Oefeningen Minimum-maximumproblemen



(a) Stel een formule op voor het volume van de taartendozen.

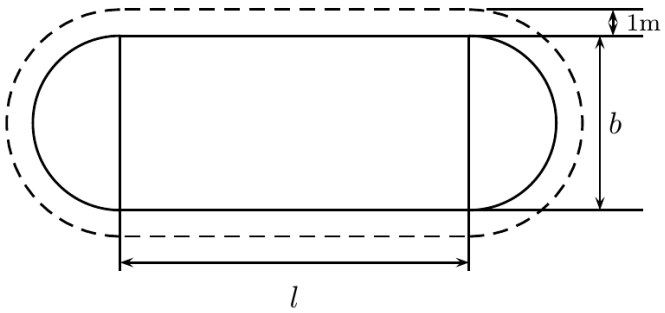
(b) Bij welke waarde van x is dit volume maximaal?

(c) Wat is dan dat maximaal volume?

(d) Is het nuttig voor bakker Jansens om zijn dozen deze maximale vorm te geven ?

4.3.1.2 Niveau 3

Oefening 4.3.7. Een atletiekpiste heeft een vorm zoals op de tekening. De baan (aangeduid met een stippellijn) die zich op één meter van het binnenplein bevindt, moet 400 m lang zijn.



Voor welke afmetingen van het rechthoekig deel van het binnenplein is de oppervlakte van de rechthoek maximaal?

Oefening 4.3.8. Wat is de minimale afstand van het punt $(4, 2)$ tot de parabool $y^2 = 8x$?

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Partiële afgeleiden

Belangrijk: voor je partieel gaat afleiden is het belangrijk dat je afleiden en alle rekenregels rond afgeleiden onder de knie hebt. Is dit nog moeilijk, dan kijk je best naar de modules uit Week 3.

Wanneer we partieel afleiden naar een variabele x beschouwen we alle andere variabelen als een constante en leiden we af naar x zoals we anders zouden doen. De eerste orde partiële afgeleide naar x wordt genoteerd met $\frac{\partial}{\partial x}$.

Voorbeeld 4.4.1. Bereken de eerste orde partiële afgeleide naar x $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ van de volgende functie f:

1. $f(x,y) = 2x^2 + xy$: $4x + y$

Uitwerking: Beschouw de functie $f(x) = 2x^2 + 3x$. Daarvan weten we dat

$$\frac{d}{dx} f(x) = 4x + 3.$$

In plaats van de constante '3' staat er nu de variabele 'y' die we ook als constante zullen beschouwen. Deze oefening kan dus op dezelfde manier opgelost worden als de bovenstaande, waarbij we '3' vervangen door 'y':

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 4x + y.$$

Let hier goed op het verschil in notatie tussen $\frac{d}{dx} f(x)$ en $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$.

Oefening 4.4.1. Bereken de eerste orde partiële afgeleide naar x $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ van de volgende functies f:

1. $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$: ……

2. $f(x,y) = \frac{y^2}{x}$: ……

Voorbeeld 4.4.2. Bereken de eerste orde partiële afgeleide naar elke variabele van deze functie:

1. $f(x,y) = 2x^2 + xy$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x$

Uitwerking: Beschouw de functie $f(x) = 2x^2 + 3x$. Daarvan weten we dat

$$\frac{d}{dx} f(x) = 4x + 3.$$

In plaats van de constante '3' staat er nu de variabele 'y' die we ook als constante zullen beschouwen. Deze oefening kan dus op dezelfde manier opgelost worden als de bovenstaande, waarbij we '3' vervangen door 'y':

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 4x + y.$$

Beschouw nu de functie $f(y) = 2 \cdot 3^2 + 3y$. Daarvan weten we dat

$$\frac{d}{dy} f(y) = 3.$$

In plaats van de constante '3' staat er nu de variabele 'x' die we ook als constante zullen beschouwen. Deze oefening kan dus op dezelfde manier opgelost worden als de bovenstaande, waarbij we '3' vervangen door 'x':

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x.$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Partiële afgeleiden

Oefening 4.4.2. Bereken de eerste orde partiële afgeleide naar elke variabele van de volgende functies:

1. $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$: ... ...

2. $f(x,y,z) = x^2y - \dfrac{y}{z} + z$: ... ...

Extra oefeningen over dit onderwerp vind je in de lijst met extra oefeningen op Toledo.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 5
Integralen

(Versie 2026/09/26HB.14)

5.1 Introductie Week 5

Voor sommigen van jullie zijn integralen waarschijnlijk al gekend terwijl dit voor anderen nieuwe leerstof is. Zorg ervoor dat je vlot wordt in het berekenen van integralen. Dit is een erg belangrijke vaardigheid voor het vervolg van dit opleidingsonderdeel. De rekenregels en theorie die je op deze pagina vindt moeten in je geheugen zitten voor je aan de oefenzitting begint.

Zowel bij het onderdeel 'Splitsen in partieelbreuken' van deze week als in de oefenzittingen van volgende week zullen we meermaals nulpunten van tweedegraadstermen moeten berekenen en moeten splitsen in factoren. Daarom raden we je aan om deze technieken ook te herhalen indien nodig.

Primitieve functies

Het berekenen van de onbepaalde integraal van een functie f, genoteerd $\int f(x)\,dx$, komt neer op het zoeken van een primitieve functie F, d.w.z. een functie F zodat $F'(x) = f(x)$. Dus

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

We geven hier enkele basisintegralen.

- $\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ met $r \neq -1$ een constante

  Bijvoorbeeld

  - $r = 0$: $\int 1\,dx = \int dx = x + C$
  - $r = 1$: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
  - $r = \frac{1}{2}$: $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$ en $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$ voor $a > 0, a \neq 1$
- $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$ en $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$
- $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ en $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Integratietechnieken

- **Substitutie:** $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(g(x))\,d(g(x)) = \int f(u)\,du.$
- **Partiële integratie:**

  Notatie 1: $\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$

  Notatie 2: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Introductie Week 5

- **Splitsen in partieelbreuken:** Integralen van het type

$$\int \frac{mx+q}{(x-a)(x-b)}\,dx$$

met $a \neq b$ zijn op te lossen door splitsing in partieelbreuken. Stel

$$\frac{mx+q}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

Vind A en B door het rechterlid op één noemer te brengen. Zie voorbeeld 3 in sectie 7.3 in het handboek of in de sectie Splitsen in partieelbreuken.

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Begintest Week 5

Indien je deze oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je de opfrissingsmodules verder overslaan, anders herhaal je best grondig deze modules.
Opmerking: de constante term wordt in deze oefeningen steeds met 'C' genoteerd. Bij oefeningen op papier ben je vrij om zelf een notatie te kiezen voor de constante.

Oefening 5.2.1. Bereken de primitieve functie van de volgende functies:

1. $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$: ... ...
2. $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$: ... ...
3. $f(x) = \cos\left(\frac{x}{5}\right) - \sin\left(\frac{x}{5}\right)$: ... ...

Indien je deze oefeningen juist maakt bij de eerste poging, kan je de opfrissingsmodules verder overslaan, anders herhaal je best grondig deze modules. Bereken de onderstaande onbepaalde integralen met behulp van de geziene integratietechnieken.

Oefening 5.2.2.

1. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx =$ ... ...
2. $\int x\sin(x)\,dx =$ ... ...
3. $\int \frac{1}{x^2-2x-3}\,dx =$ ... ...

Oefening 5.2.3. Los de volgende veeltermvergelijkingen op naar x.

1. $5x^2+2x-5 = 3x^2+4x+7$

$x=1$	$x=-2$ of $x=3$	geen reële oplossingen

2. $x^2-x+1 = -5+x$

$x=-4$	$x=1/2$ of $x=3/2$	geen reële oplossingen

3. $2x+1 = 2x^2-3$

$x=-1$	$x=-1$ of $x=2$	$x=-2$ of $x=4$	geen reële oplossingen

Oefening 5.2.4. Ontbind in factoren

1. $x^2+x-6 =$ ... ...
2. $3x^2+12x-15 =$ ... ...

Oefening 5.2.5. Splits de volgende functies in partieelbreuken:

1. $\frac{1}{x^2-9} =$ ... ...
2. $f(x) = \frac{2x-3}{x(x+1)} =$ ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

5.2 Begintest Week 5

Oefening 5.2.6. Gebruik de resultaten uit de vorige oefeningen om de volgende integralen te berekenen. Vereenvoudig hierbij zo veel mogelijk.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-9}\,dx = \ldots\ldots$

2. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x(x+1)}\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Basisintegralen

In onderstaand overzicht is de afgeleide van het rechterlid steeds de integrand in het linkerlid.

Eigenschap 5.3.1 (Basisintegralen)**.** (met $c \in \mathbb{R}$)

$$\int 0\,dx = c \qquad \int dx = x + c$$
$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c \quad (r \in \mathbb{R}, r \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$
$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

De rekenregels voor som en scalaire veelvouden zijn analoog aan deze voor afgeleiden:

Eigenschap 5.3.2. Voor integreerbare functies f en g en $a, b \in \mathbb{R}$ gelden volgende formules:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \qquad \text{(veelvoud)}$$
$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \qquad \text{(som)}$$
$$\int (af(x)+bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx \qquad \text{(lineaire combinatie)}$$

De rekenregel voor de som noemt men ook *integratie door splitsing*.

Voorbeeld 5.3.1. Basisintegralen:

(a) $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

(b) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

(c) $\int 7^x\,dx = \frac{7^x}{\ln 7} + c$

(d) $\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\frac{x^2}{2} = x^2 + c$

Oefening 5.3.1. Bereken volgende onbepaalde integralen door splitsing:

1. $\int 3x^2 + 2x + \cos x + 7^x\,dx = \ldots\ldots$

Opmerking 5.3.1.

- De onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen WEL:

  som $\int (\cos x + x^2)\,dx = \int \cos x\,dx + \int x^2\,dx = \sin x + \frac{x^3}{3} + c$

  constante factor $\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = 3\,\frac{x^3}{3} + c = x^3 + c$

- Een onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen NIET:

  integraal van *product* ~~$\int \cos x \cdot x^2\,dx = \int \cos x\,dx \cdot \int x^2\,dx$~~

  integraal van *samenstelling* ~~$\int (\cos x)^2\,dx = \frac{(\cos x)^3}{3} + c$~~

CC BY-NC-SA 4.0

5.3 Basisintegralen

Er bestaan *geen algemene regels*, maar wel een aantal *technieken* die we verder zullen bespreken.

Oefening 5.3.2. Zijn volgende gelijkheden juist of fout? Verklaar.

1. Juist | Fout $\int (x \cdot x)\, dx \stackrel{?}{=} (\int x dx) \cdot (\int x\, dx)$

2. Juist | Fout $\int (2 \cdot x)\, dx \stackrel{?}{=} (\int 2 dx) \cdot (\int x\, dx)$

3. Juist | Fout $\int (2 \cdot x)\, dx \stackrel{?}{=} 2 \cdot (\int x\, dx)$

4. Juist | Fout $\int x^2\, dx \stackrel{?}{=} (\int x\, dx)^2$

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Integratie door substitutie

De *kettingregel voor afgeleiden* leidt tot de interessante methode van '*integratie door substitutie*'.

Eigenschap 5.4.1 (Substitutieregel)**.**

Als in een integraal $\int h(x)\,dx$ de *integrand* $h(x)$ kan beschouwd worden als

een *product* (dus $h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$)

van een *samengestelde* functie (dus $h_1(x) = f(u(x))$)

met de *afgeleide* van de *binnenste* functie (dus $h_2(x) = u'(x)$),

dan kunnen we de integraal reduceren tot

de *integraal van de buitenste functie* (dus $\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$).

In een formule: voor reële, afleidbare functies f en u waarvoor $f \circ u$ bestaat geldt

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u(x))\,du(x) = \int f(u)\,du.$$

Volgend voorbeeld legt in detail de methode van substitutie uit:

Voorbeeld 5.4.2. Bereken $\int e^{x^2} 2x\,dx$.

Merk eerst op dat $e^{x^2} = e^{(x^2)}$ en $e^{x^2} \neq (e^x)^2 = e^{2x}$.

We herkennen de functie x^2 en haar afgeleide $2x$ in de integrand. Het ligt dus voor de hand te proberen of we met $u(x) = x^2$ ergens geraken, want van de functie $u(x)$ komen zowel de functie als de afgeleide voor in de formule van de substitutieregel. De enige mogelijkheid is dan dat $f(x) = e^x$, of met andere letters genoteerd $f(u) = e^u$, want dan is $f(u(x)) = e^{x^2}$. We passen de substitutieregel toe:

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x\,dx &= \int f(u(x))u'(x)\,dx \\
&= \int f(u(x))\,d(u(x)) \\
&= \int f(u)\,du \\
&= \int e^u\,du \\
&= e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Het gebruik van de substitutieregel wordt meestal korter genoteerd.

We schrijven niet expliciet $u(x) = x^2$ zoals hierboven, maar noteren korter $u = x^2$. Dan is $du = dx^2 = 2x\,dx$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Integratie door substitutie

Deze beide uitdrukkingen *substitueer* je in $\int e^{x^2} 2x\, dx$ en je vindt

$$\begin{aligned}\int e^{x^2} 2x\, dx &= \int e^u\, du && \text{(want } x^2 = u \text{ en } 2x\, dx = du\text{)}\\ &= e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(basisintegraal)}\\ &= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(terug als functie van } x\text{).}\end{aligned}$$

Besluit: Omdat de afgeleide van x^2 gelijk is aan $2x$ is het nodig dat de factor x in de integrand voorkomt, anders kan je substitutie niet toegepassen, maar de constante factor mag willekeurig zijn.

Voorbeeld 5.4.3. Bereken $\int 3x^2(x^3+5)^7\, dx$

Stel $u = x^3 + 5$, dan is $du = d(x^3+5) = 3x^2\, dx$. Dit *substitueren* we in $\int 3x^2(x^3+5)^7\, dx$:

$$\int 3x^2(x^3+5)^7\, dx = \int u^7\, du = \frac{u^8}{8} + c = \frac{(x^3+5)^8}{8} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Voorbeeld 5.4.4. Bereken $\int 2x\cos(x^2)\, dx$

Stel $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x\, dx$. Dit *substitueren* we in $\int 2x\cos(x^2)\, dx$:

$$\int 2x\cos(x^2)\, dx = \int \cos(u)\, du = \sin(u) + c = \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Oefening 5.4.1. Bereken volgende integralen:

1. $\int e^{2x}\, dx = \ldots\ldots$
2. $\int 2^{3x}\, dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{4}{2x-3}\, dx = \ldots\ldots$

Volgende voorbeelden berekenen enkele integralen die in sommige boeken en cursussen in de lijst van basisintegralen staan. We hebben er hier voor gekozen om te werken met een eenvoudige lijst basisintegralen, omdat onderstaande integralen met de substitutieregel gemakkelijk berekend kunnen worden.

Voorbeeld 5.4.5. Bereken volgende integralen (met $a \in \mathbb{R}_0$)

(a) $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

Deze integraal lijkt op de basisintegraal $\int \cos x\, dx$. Merk ook op dat we de a *niet* uit de cosinus kunnen halen, want $\cos ax \neq a\cos x$. We stellen hier $u = ax$, want veel andere keuze is er niet.

CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Integratie door substitutie

Stel $u = ax$, dan is $du = a\,dx$, dus $dx = \frac{1}{a}\,du$.

$$\int \cos ax\,dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{a}\,du = \frac{1}{a}\int \cos u\,du = \frac{1}{a}\sin u + c = \frac{1}{a}\sin ax + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(b) $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$

Het enige startpunt om $\int \tan x\,dx$ te kunnen berekenen lijkt het toepassen van de definitie:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

Twee kandidaat substituties zijn dan $u(x) = \sin x$ en $u(x) = \cos x$. Nemen we $u(x) = \sin x$, dan is $du = \cos x\,dx$. In de teller staat echter $\sin x\,dx$. Daarom kiezen we voor $u(x) = \cos x$.

Stel $u = \cos x$, dan is $du = d\cos x = -\sin x\,dx$, dus $\sin x\,dx = -du$.
Dit *substitueren* we in $\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Merk op dat we de substitutieregel $\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$ hebben toegepast met $f(u) = \frac{1}{u}$. Dan wordt de substitutieregel $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du$. Dit is een voorbeeld waar de substitutieregel gebruikt wordt om de integraal van een quotiënt van 2 functies te berekenen.

Wanneer en welke substitutie moet uitgevoerd worden is niet altijd even duidelijk. Hier geldt de regel "Oefening baart kunst". De volgende oefening behandelt een typische situatie.

Oefening 5.4.2.

1. $\int (x+2)\sqrt{x-2}\,dx = \ldots\ldots$

Opmerking 5.4.1. Integralen van het type $\int \frac{1}{px^2+qx+r}\,dx$:

- met $D = q^2 - 4pr < 0$: worden in deze cursus niet behandeld
- met $D = q^2 - 4pr = 0$: noemer ontbinden in 2 identieke factoren en verder uitrekenen met substitutie
- met $D = q^2 - 4pr > 0$: noemer ontbinden in 2 verschillende factoren en splitsing in partieelbreuken, zie verder.

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Partiële integratie

De *productregel voor afgeleiden* leidt tot de interessante methode van '*partiële integratie*'.

De regel voor partiële integratie volgt onmiddellijk uit de regel voor de afgeleide van het product van twee functies u en v.

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Inderdaad, als we beide leden integreren krijgen we

$$\int (u(x)\cdot v(x))'\,dx = \int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx.$$

Na termen van lid veranderen krijgen we

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = \int (u(x)\cdot v(x))'\,dx - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx.$$

Omdat $\int (u(x)\cdot v(x))'\,dx = u(x)\cdot v(x) + c, \quad c\in\mathbb{R}$ wordt dit

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx.$$

Dit is de formule voor partiële integratie, zo genoemd omdat de integraal $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx$ gedeeltelijk, dus partieel, is geïntegreerd: we hebben al een deel van de primitieve functie, namelijk $u(x)\cdot v(x)$, en er blijft nog een ander - hopelijk eenvoudiger te berekenen - deel over, namelijk $\int u'(x)\cdot v(x)\,dx$. We hebben $u(x)\cdot v(x)$ genoteerd en niet $u(x)\cdot uv(x)+c$, omdat het resultaat van de berekening van de tweede term van het rechterlid, $\int u'(x)\cdot v(x)\,dx$, ook slechts op een constante na bepaald is.

Eigenschap 5.5.1 (Partiële integratie).

Als in een integraal $\int h(x)\,dx$ de *integrand* $h(x)$ kan beschouwd worden als

een *product* (dus $h(x) = h_1(x)\cdot h_2(x)$)

van een functie $u(x)$ (dus $h_1(x) = u(x)$)

en van de *afgeleide* van een functie $v(x)$ (dus $h_2(x) = v'(x)$),

dan kunnen we de integraal schrijven als

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Dus voor reële, afleidbare functies f en u geldt

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx,$$

of korter genoteerd:

$$\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx,$$

of

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du.$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Partiële integratie

In oefeningen wordt dikwijls $\overset{P.I.}{=}$ geschreven om het gebruik van partiële integratie aan te duiden.

Men schrijft de regel voor partiële integratie ook dikwijls met functies f en g (in plaats van u en v zoals hierboven):

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx,$$

Het is belangrijk dat je met elke versie van deze formules kan werken, onafhankelijk van de letters die gebruikt worden. In de volgende voorbeelden en oefeningen zullen we steeds de volgende notatie hanteren:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Voorbeeld 5.5.1. Bereken $\int xe^x\, dx$.

Stel $u = x$ en $dv = e^x dx$

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x\, dx}_{dv},$$

dan is $du = 1dx$ en v kunnen we vinden door dv te integreren: $v = \int dv = \int e^x\, dx = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.
Er zijn dus oneindig veel mogelijke functies u, maar we nemen deze met $c = 0$.
Partiële integratie geeft dan

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x\, dx}_{dv} \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v} \cdot \underbrace{1\, dx}_{du} = xe^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

De keuze van u en dv ligt niet vast. Stel dat we hier een andere keuze hadden gemaakt voor u en dv, namelijk $u = e^x$ en $dv = x\, dx$. Dan is $du = e^x\, dx$ en $v = \frac{x^2}{2}$. Partiële integratie geeft dan

$$\int xe^x\, dx \overset{P.I.}{=} e^x\, \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 e^x\, dx.$$

In de tweede integraal is de macht van x *verhoogd* van 1 naar 2. Dus de x in de eerste integraal wordt een x^2 in de tweede integraal. Met deze keuze van f en u wordt de nieuwe integraal *nog ingewikkelder dan de oorspronkelijke*. Hoewel de gelijkheid correct is, helpt ze niet. *Een goede keuze* voor u en dv is dus erg belangrijk.

Voorbeeld 5.5.2. Bereken $\int x \sin x\, dx$.

Stel $u = x$ en $dv = \sin x\, dx$

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x\, dx}_{dv},$$

dan is $du = 1$ en v kunnen we vinden door dv te integreren: $v = \int dv = \int \sin x\, dx = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.
We kiezen de primitieve functie met $c = 0$. Partiële integratie geeft dan

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Partiële integratie

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x\, dx}_{dv} \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{v} \cdot \underbrace{1\, dx}_{du}$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

In de volgende oefeningen moet je partiële integratie combineren met een eenvoudige substitutie.

Oefening 5.5.1.

1. $\int xe^{2x}\, dx = \ldots\ldots$
2. $\int xe^{-3x}\, dx = \ldots\ldots$

We hebben in de voorbeelden en oefeningen tot nu toe telkens het product van de veelterm x met een exponentiële of goniometrische functie geïntegreerd. Wanneer deze veelterm van een hogere graad is moeten we herhaaldelijk partieel integreren om tot de oplossing te komen. Bij elke stap daalt de graad van de veelterm met één.

Voorbeeld 5.5.4. Bereken $\int (2x^2 - 4x)e^{2x}\, dx$.

Stel $u = 2x^2 - 4x$ en $dv = e^{2x}\, dx$, dan is $du = 4x - 4\, dx$ en $v = \int dv = \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

Partiële integratie geeft dan

$$\int \underbrace{(2x^2 - 4x)}_{u} \cdot \underbrace{e^{2x}\, dx}_{dv} \overset{P.I.}{=} \underbrace{(2x^2 - 4x)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{v} \cdot \underbrace{(4x - 4)\, dx}_{du}$$
$$= (x^2 - 2x)\, e^{2x} - \int (2x - 2)e^{2x}\, dx$$

We passen nogmaals partiële integratie toe. Ditmaal stellen we $u = 2x - 2$ en $dv = e^{2x}\, dx$, dan is $du = 2\, dx$ en $v = \frac{1}{2}e^{2x}dx$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Partiële integratie

$$
\begin{aligned}
&(x^2-2x)\,e^{2x} - \int \underbrace{(2x-2)}_{u}\cdot\underbrace{e^{2x}\,dx}_{dv} \\
&\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)\,e^{2x} - \left(\underbrace{(2x-2)}_{u}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{v}\cdot\underbrace{2\,dx}_{du}\right) \\
&= (x^2-2x)\,e^{2x} - (x-1)\,e^{2x} + \int e^{2x}\,dx \\
&= (x^2-2x)\,e^{2x} - (x-1)\,e^{2x} + \frac{1}{2}\,e^{2x} + c \\
&= (x^2-2x-x+1+\frac{1}{2})\,e^{2x} + c \\
&= (x^2-3x+\frac{3}{2})\,e^{2x} + c, \qquad c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Als de integrand het product is van een veelterm en een andere functie zoals een sinus, cosinus of exponentiële functie, kiezen we voor $f(x)$ de veelterm. Door partiële integratie toe te passen daalt dan immers de graad van de veelterm. In het volgende voorbeeld, het product van een veelterm met $\ln x$, doen we het andersom, omdat we $\ln x$ eenvoudig kunnen afleiden, maar nog niet integreren. Hoe we $\ln x$ kunnen integreren is één van de volgende voorbeelden.

Voorbeeld 5.5.5. Bereken $\displaystyle\int 9x^2 \ln x\,dx$.

Stel $u = \ln x$ en $dv = 9x^2\,dx$

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\cdot\underbrace{9x^2\,dx}_{dv},$$

dan is $du = 1/x\,dx$ en $v = \displaystyle\int dv = \int 9x^2\,dx = 3x^3 + c, \quad c\in\mathbb{R}.$

Partiële integratie geeft dan

$$
\begin{aligned}
\int \underbrace{\ln x}_{f(x)}\cdot\underbrace{9x^2\,dx}_{dv} &\overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{u}\cdot\underbrace{3x^3}_{v} - \int \underbrace{3x^3}_{v}\cdot\underbrace{1/x\,dx}_{du} \\
&= 3x^3\ln x - \int 3x^2\,dx = 3x^3\ln x - x^3 + c, \quad c\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Om partiële integratie te kunnen toepassen moet de integrand het product zijn van 2 functies. Maar ook als de integrand bestaat uit slechts 1 functie kunnen we partiële integratie toepassen door deze functie te vermenigvuldigen met de constante 1.

Voorbeeld 5.5.6. Bereken $\displaystyle\int \ln x\,dx$.

Om partiële integratie te kunnen toepassen beschouwen we $\ln x$ als een product $\ln x \cdot 1$.

Stel $u = \ln x$ en $dv = 1\,dx$, dan is $du = 1/x\,dx$ en $v = \displaystyle\int dv = \int 1\,dx = x + c, \quad c\in\mathbb{R}.$

CC BY-NC-SA 4.0

5.5 Partiële integratie

Partiële integratie geeft dan

$$\int \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{1\,dx}_{dv} \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{1/x\,dx}_{du}$$

$$= x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Soms bekom je na (herhaald) partieel integreren opnieuw de *oorspronkelijke* integraal. Onderstaand voorbeeld legt uit welke techniek je dan kan toepassen.

Voorbeeld 5.5.7. Bereken $\int \sin x\, e^x\, dx$.

We stellen $I = \int \sin x\, e^x\, dx$ voor de verdere berekening. Welke keuze we maken voor u en dv is niet zo belangrijk in deze oefening. We maken de keuze $u = \sin x$ en $dv = e^x\,dx$, dan is $du = \cos x\,dx$ en $v = e^x$. Maak deze oefening opnieuw met de andere keuze.

$$I = \int \sin x \cdot e^x\,dx = \sin x \cdot e^x - \int \cos x \cdot e^x\,dx$$

We passen nogmaals partiële integratie toe. Ditmaal stellen we $u = \cos x\,dx$ en $dv = e^x$, dan is $f\,du = -\sin x$ en $v = e^x$.

$$I = \sin x \cdot e^x - \left(\cos x \cdot e^x - \int (-\sin x) \cdot e^x\,dx\right) = (\sin x - \cos x)e^x - \int \sin x \cdot e^x\,dx$$

In het rechterlid staat nu terug de oorspronkelijke integraal I.

$$I = (\sin x - \cos x)e^x - I$$

We brengen I naar het linkerlid en bekomen:

$$2\,I = e^x\,(\sin x - \cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dus

$$I = \frac{1}{2}\,e^x\,(\sin x - \cos x) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}\ (\text{Stel } c_1 = c/2).$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6 Splitsen in partieelbreuken

5.6.1 Stappenplan

In sommige toepassingen is het handig om een rationale functie te kunnen schrijven als een som van eenvoudige rationale functies. We beschouwen een rationale functie:

$$f(x) = \frac{px+q}{ax^2+bx+c}.$$

Stap 1: Ontbind de noemer in factoren. Dit wil zeggen dat je nulpunten x_1 en x_2 zoekt van de noemer en de noemer herschrijft in de vorm $a(x-x_1)(x-x_2)$.

Stap 2: Splits de breuk in partieelbreuken van de vorm $\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)$.

Stap 3: Na het schrijven van de breuk als een som zijn er nog enkele onbekende constanten. Deze kunnen bepaald worden door de partieelbreuken terug op gelijke noemer te zetten. Door dan te eisen dat de tellers gelijk moeten zijn kan je de onbekenden bepalen.

Opmerking 5.6.1. Een veelgemaakte fout bij het ontbinden in factoren is dat de coëfficiënt a bij de hoogstegraadsterm vergeten wordt. We lichten dit toe in het volgende voorbeeld. Controleer je ontbinding steeds door de termen weer met elkaar te vermenigvuldigen. Indien je niet dezelfde vergelijking uitkomt, heb je ergens een fout gemaakt.

Voorbeeld 5.6.1.

1. Ontbind $2x^2-10x+12$ in factoren: $2(x-2)(x-3)$

Uitwerking: We zoeken de nulpunten van de functie $f(x)=2x^2-10x+12$:

$$\begin{aligned} D &= 10^2-4\cdot 2\cdot 12 = 4\\ x &= \frac{-(-10)\pm\sqrt{4}}{2\cdot 2}\\ &= \frac{10\pm 2}{4} = \frac{5\pm 1}{2}\\ x_1 &= \frac{5+1}{2} = 3\\ x_2 &= \frac{5-1}{2} = 2 \end{aligned}$$

We weten nu dat de functie f factoren $(x-2)$ en $(x-3)$ heeft. Echter is $2x^2-10x+12 \neq (x-2)(x-3) = x^2-5x+6$. Vermenigvuldigen we de factoren met de coëfficiënt van de hoogstegraadsterm,in dit geval 2, dan zien we dat de vergelijking wel klopt:

$$2(x-2)(x-3) = 2(x^2-2x-3x+6) = 2x^2-10x+12.$$

5.6.2 Voorbeelden: splitsen in partieelbreuken

Voorbeeld 5.6.2. Splits de volgende functies in partieelbreuken:

1. $f(x) = \dfrac{px+q}{ax+bx+c} = \dfrac{x+2}{x^2+x-12} = \dfrac{x+2}{x^2+x-12} = \dfrac{5}{7(x-3)} + \dfrac{2}{7(x+4)}$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6 Splitsen in partieelbreuken

Uitwerking: Stap 1: Om de noemer te ontbinden in factoren zoeken we eerst de nulpunten van de noemer.

$$x^2+x-12=0$$
$$D=1-4\cdot(-12)=49$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 7}{2}=3 \text{ en } -4$$

Zo vinden we

$$\frac{x+2}{x^2+x-12}=\frac{x+2}{(x-3)(x+4)}$$

Stap 2: De coëfficiënt van de hoogstegraadsterm, a, is hier 1. We krijgen dus een partieelbreuk van de volgende vorm:

$$\frac{x+2}{x^2+x-12}=1\cdot\left(\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}\right)$$

Stap 3: Nu rest ons nog de onbekenden A en B te bepalen. Hiervoor brengen we de breuken in het rechterlid op gelijke noemer:

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^2+x-12}&=\frac{A(x+4)}{(x-3)(x+4)}+\frac{B(x-3)}{(x-3)(x+4)}\\&=\frac{Ax+4A+Bx-3B}{(x-3)(x+4)}\\&=\frac{(A+B)x+4A-3B}{(x-3)(x+4)}\end{aligned}$$

Om deze gelijkheid te doen kloppen, moeten de veeltermen in de tellers van beide leden, $x-2$ en $(A+B)x+4A-3B$, gelijk zijn aan elkaar. Herinner je dat twee veeltermen gelijk zijn aan elkaar als en slechts als de coëfficienten bij elke macht van x aan elkaar gelijk zijn. Bijvoorbeeld: $3x+5=cx+d$ als en slechts als $c=3$ en $d=5$. We moeten dus het volgende stelsel oplossen:

$$\begin{cases} A+B=1 & \text{(coefficienten voor } x\text{)}\\ 4A-3B=2 & \text{(constante term)}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} B=1-A\\ 4A-3+3A=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} B=1-A\\ 7A=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} B=\frac{2}{7}\\ A=\frac{5}{7}\end{cases}$$

Zo vinden we dat

$$\frac{x+2}{x^2+x-12}=\frac{5}{7(x-3)}+\frac{2}{7(x+4)}.$$

2. $f(x)=\dfrac{px+q}{ax+bx+c}=\dfrac{3x}{2x^2-2x-12}=\dfrac{3}{10}\cdot\left(\dfrac{3}{x-3}+\dfrac{2}{x+2}\right)$

Uitwerking: Stap 1: Om de noemer te ontbinden in factoren zoeken we eerst de nulpunten van de noemer.

$$2x^2-2x-12=0$$
$$x^2-x-6=0$$
$$D=1-4\cdot(-6)=25$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm 5}{2}=3 \text{ en } -2$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6 Splitsen in partieelbreuken

Stap 2: De coëfficiënt van de hoogstegraadsterm, a, is hier 2. We krijgen dus een partieelbreuk van de volgende vorm:

$$\frac{3x}{2x^2-2x-12} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}\right)$$

Stap 3: Nu rest ons nog de onbekenden A en B te bepalen. Hiervoor brengen we de breuken in het rechterlid op gelijke noemer:

$$\begin{aligned}\frac{3x}{2x^2-2x-12} &= \frac{A(x+2)}{2(x-3)(x+2)}+\frac{B(x-3)}{2(x-3)(x+2)}\\ &= \frac{Ax+2A+Bx-3B}{2(x-3)(x+2)}\\ &= \frac{(A+B)x+2A-3B}{2(x-3)(x+2)}\end{aligned}$$

Om deze gelijkheid te doen kloppen, moeten de veeltermen in de tellers van beide leden gelijk zijn aan elkaar. Merk op dat de constante term in het linkerlid, $3x$, gelijk is aan nul, want $3x = 3x+0$. We moeten dus het volgende stelsel oplossen:

$$\begin{cases} A + B = 3 & \text{(coefficienten voor } x\text{)}\\ 2A - 3B = 0 & \text{(constante term)}\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} A+B = 3\\ A = \frac{3}{2}B\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} \frac{3}{2}B+B = 3\\ A = \frac{3}{2}B\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} \frac{5}{2}B = 3\\ A = \frac{3}{2}B\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} B = \frac{6}{5}\\ A = \frac{9}{5}\end{cases}$$

Zo vinden we dat

$$\frac{3x}{2x^2-2x-12} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{9}{5(x-3)}+\frac{6}{5(x+2)}\right) = \frac{3}{10}\cdot\left(\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x+2}\right).$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.1 Oefeningen onbepaalde integralen

5.6.1.1 Niveau 1

Oefening 5.6.1. Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\int e^{2x}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int 2^{3x}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{4}{2x-3}\,dx = \ldots\ldots$

Oefening 5.6.2. Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int \frac{1}{3-x}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \frac{x}{3-x}\,dx = \ldots\ldots$

5.6.1.2 Niveau 2

Oefening 5.6.3. Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\int (3x+5)\sqrt{3x+4}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int 4x\sqrt{x-1}\,dx = \ldots\ldots$
3. $\int \cos x \sin^2 x\,dx = \ldots\ldots$
4. $\int \cos 2x \sin^3 2x\,dx = \ldots\ldots$
5. $\int \frac{\sin x \cos x}{2-\cos x}\,dx = \ldots\ldots$
6. $\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \ldots\ldots$
7. $\int \frac{3t}{1+t^2}\,dt = \ldots\ldots$
8. $\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \ldots\ldots$
9. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.1 Oefeningen onbepaalde integralen

10. $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dx = \ldots\ldots$

11. $\displaystyle\int \frac{2R}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dR = \ldots\ldots$

12. $\displaystyle\int \frac{R^3}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dR = \ldots\ldots$

Oefening 5.6.4. Bereken volgende onbepaalde integralen via partiële integratie:

1. $\displaystyle\int \left(3x+x^2\right) e^x\,dx = \ldots\ldots$

2. $\displaystyle\int \ln\sqrt{x}\,dx = \ldots\ldots$

3. $\displaystyle\int e^x \cos 3x\,dx = \ldots\ldots$

4. $\displaystyle\int \frac{\ln t}{t^2}\,dt = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5.6.2 Extra oefeningen onbepaalde integralen met modeloplossing

Oefening 5.6.5. Bereken de volgende integralen door gebruik te maken van substitutie.

1. $$\int (4x-3)\sqrt{2x^2-3x+2}\,dx$$
2. $$\int \frac{x-1}{1+4x-2x^2}$$
3. $$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$

Oefening 5.6.6. Bereken de volgende integralen door gebruik te maken van partiële integratie.

1. $$\int x\cos x\,dx$$
2. $$\int \sqrt{x}\ln\sqrt{x}\,dx$$
3. $$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$$

Oefening 5.6.7. Splits de volgende breuken in partieelbreuken:

1. $$\frac{-(x+1)}{(2x+1)(x-1)}$$
2. $$\frac{4x+1}{x^2-3x-10}$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.7 Bepaalde integralen

5.7.1 Definitie bepaalde integraal

Definitie 5.7.1 (Bepaalde integraal)**.**

Zij f een continue, *positieve* functie op een interval $[a, b]$.

De **bepaalde integraal** van f over het interval $[a, b]$, genoteerd als

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

is per definitie gelijk aan de *oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$.

We noemen a en b de **integratiegrenzen** en $[a, b]$ het **integratie-interval**, en we **integreren over** dat interval.

5.7.2 Verband met de onbepaalde integraal

Eigenschap 5.7.1 (Verband tussen bepaalde en onbepaalde integralen)**.**

Zij f een continue functie op een interval $[a, b]$ en F een primitieve functie van f (dus $\int f(x)\,dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$). Dan geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a) \qquad \overset{\text{notatie}}{=} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Deze formule laat toe om het berekenen van een *bepaalde* integraal te reduceren tot het berekenen van de *onbepaalde* integraal, en dan de integratiegrenzen in te vullen.

Merk op dat het hierbij geen probleem is dat een primitieve functie slechts op een constante na bepaald is:

$$\big(F(b) + c\big) - \big(F(a) + c\big) = F(b) - F(a).$$

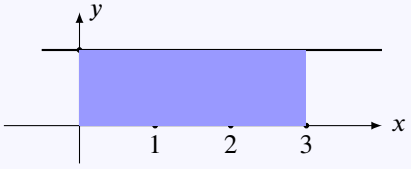
Elke primitieve functie F van f is dus geschikt om de bepaalde integraal uit te rekenen.

Hierbij is $\Big[F(x)\Big]_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b) - F(a)$ een handige notatie. Soms gebruikt men ook $F(x)\Big|_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b) - F(a)$.

Voorbeeld 5.7.1. Eenvoudige bepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int_0^3 1\,dx = \Big[x\Big]_0^3 = 3 - 0 = 3$

De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de de rechte $y = 1$ (dit is de grafiek van $f(x) = 1$), de x-as en de verticale rechten $x = 0$ en $x = 3$.

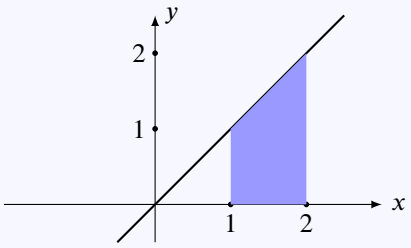


2. $\displaystyle\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) = \frac{1}{2}(4 - 1) = \frac{3}{2}$

CC BY-NC-SA 4.0

5.7 Bepaalde integralen

De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de de rechte $y = x$ (dit is de grafiek van $f(x) = x$), de x-as en de verticale rechten $x = 1$ en $x = 2$.



3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$

Eigenschap 5.7.2 (Eigenschappen van de bepaalde integraal)**.**

Zij f een functie gedefinieerd op $[a, b]$ en $c \in [a, b]$. Dan is

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 \qquad \text{(integreren over een leeg interval)}$$

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b (-f(t))\,dt \qquad \text{(integreren in omgekeerde richting)}$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \qquad \text{(integratie-interval opsplitsen)}$$

Voorbeeld 5.7.2.

1. $\displaystyle\int_4^8 x\,dx = \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_4^8 = \frac{1}{2}(8^2 - 4^2) = \frac{1}{2}(64 - 16) = 24$

2. $\displaystyle\int_8^4 x\,dx = -\int_4^8 x\,dx = -24,$

of anders berekend $\displaystyle\int_8^4 x\,dx = \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_8^4 = \frac{1}{2}(4^2 - 8^2) = \frac{1}{2}(16 - 64) = -24$

3.

$$\begin{aligned}\int_4^8 x\,dx &= \int_4^6 x\,dx + \int_6^8 x\,dx \\ &= \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_4^6 + \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_6^8 = \frac{1}{2}(6^2 - 4^2) + \frac{1}{2}(8^2 - 6^2) = \frac{1}{2}(36 - 16 + 64 - 36) = 24\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.8 Substitutie bij bepaalde integralen

Bij het berekenen van *bepaalde* integralen met substitutie moeten voor de *nieuwe* substitutie-variabele ook de integratiegrenzen worden aangepast. Er zijn twee oplossingsmethodes: ofwel bereken je de nieuwe integratiegrenzen en gebruik je deze om de integraal uit te rekenen, ofwel bereken je eerst de *onbepaalde* integraal, en vul je in de uitkomst de oorspronkelijke grenzen in.

Voorbeeld 5.8.1. Bereken $\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx$

- **Schrijfwijze 1:** We illustreren beide methodes:
  - *Methode 1:* **Eerst de onbepaalde integraal berekenen** met de substitutie $u = x^2$;

$$\int e^{x^2} 2x\, dx = e^{x^2} + c, c \in \mathbb{R},$$

  en dan $\int_a^b f(x)\, dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ toepassen:

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e.$$

  - *Methode 2:* **Integratiegrenzen aanpassen**: Stel $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2xdx$. Als $x = 1$ dan is $u = 1$, als $x = 2$ dan is $u = 4$

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx = \int_1^4 e^u\, du = \left[e^u\right]_1^4 = e^4 - e$$

- **Schrijfwijze 2:**

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx = \int_1^2 e^{x^2}\, dx^2 = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e$$

Opmerking 5.8.1. De eerste methode, dus eerst de onbepaalde integraal uitrekenen en dan $\int_a^b f(x)\, dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ toepassen, heeft als voordeel dat je dan de nieuwe grenzen niet moet zoeken. Vaak gemaakte fouten zijn:

- De grenzen van x gebruiken als grenzen voor u:

$$\cancel{\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx = \int_1^2 e^u\, du}$$

- Tijdens de berekening van de bepaalde integraal de grenzen niet aanpassen, ook al geeft dit een correct resultaat:

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x\, dx \neq \int_1^2 e^u\, du \neq \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.9 Partiële integratie bij bepaalde integralen

Voorbeeld 5.9.1. Bereken $\int_0^1 xe^x\,dx$.

Stel $u = x$ en $dv = e^x dx$, dan is $du = 1dx$ en $v = e^x$.

Partiële integratie geeft dan

$$\int_0^1 x \cdot e^x\,dx \overset{P.I.}{=} \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x\,dx$$
$$= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = 1;$$

Ook hier kan je echter eerst de onbepaalde integraal uitrekenen, en vervolgens Eigenschap 1 gebruiken. Dit is altijd de veiligste optie, omdat je dan geen problemen kan hebben met integratiegrenzen.

CC BY-NC-SA 4.0

5.9.1 Oefeningen bepaalde integralen

Oefening 5.9.1. Bereken volgende bepaalde integralen:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \ldots\ldots$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta = \ldots\ldots$
3. $\int_0^1 xe^{2x} \, dx = \ldots\ldots$
4. $\int_0^1 \frac{x}{(4+x^2)^2} \, dx = \ldots\ldots$
5. $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x+1}} \, dx = \ldots\ldots$
6. $\int_0^{\pi} x^2 \cos 3x \, dx = \ldots\ldots$
7. $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx = \ldots\ldots$
8. $\int_0^1 x^3 e^{-x^2} \, dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 6
Differentiaalvergelijkingen

(Versie 2026/09/26HB.14)

6.1 Introductie Week 7

Om differentiaalvergelijkingen op te lossen met behulp van scheiding van variabelen is het noodzakelijk dat je vlot onbepaalde integralen kunt berekenen. Vandaar verwijzen we je graag naar de voorkennismodules en voorkennistest van week 5. Zorg zeker dat je de verschillende integratietechnieken goed onder de knie hebt.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 7
Geen oefenzitting

(Versie 2026/09/26HB.14)

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 8

Differentiaalvergelijkingen (evenwichten)

(Versie 2026/09/26HB.14)

8.1 Introductie Week 8

Deze week bereiken we een belangrijk punt: de verwachte voorkennis voor de oefenzittingen zal nu niet enkel meer zijn wat je in het middelbaar gezien hebt, maar zal vooral de kennis zijn die je de voorbije weken vergaard hebt. Het is daarom zeer belangrijk dat je de leerstof van de vorige weken onder de knie hebt. Deze week ligt de focus op evenwichten van differentiaalvergelijkingen. We leerden hoe we autonome differentiaalvergelijkingen moeten oplossen met behulp van scheiding van veranderlijken. Indien je deze methode nog niet beheerst, is het verwerken van deze zelfstudie belangrijk.

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Begintest Week 8

Oefening 8.2.1. Los de volgende differentiaalvergelijking met de gegeven beginvoorwaarde op:

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x}, \text{ met } y(1) = 1$$

Antwoord: $y(x) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Scheiden van veranderlijken

Stappenplan:

Stap 1: In dit geval zijn de veranderlijken y en x. We zorgen ervoor dat alle uitdrukkingen waarin y voorkomt aan de linkerkant van het gelijkheidsteken staan en alle uitdrukkingen waarin x voorkomt aan de rechterkant. We schrijven ook de integratietekens.

$$\frac{dy}{dx} = f(y)\cdot g(x) \Rightarrow \frac{dy}{f(y)} = g(x)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)\,dx$$

Stap 2: Los beide integralen op. Je krijgt nu een uitdrukking van de vorm

$$F(y) = G(x) + C \qquad C \in \mathbb{R},$$

waarbij $F(y) = \int \frac{dy}{f(y)}$ en $G(x) = \int g(x)\,dx$.

Stap 3: Vorm de bovenstaande uitdrukking om naar een uitdrukking in de vorm $y = \ldots$. In het rechterlid mag enkel nog x staan, geen y.

Stap 4: Noteer de algemene oplossing als $y(x) = \ldots$. In deze oplossing moet nog een constante staan.

Stap 5: Indien er beginvoorwaarden gegeven zijn, gebruik je deze om de constante te bepalen. Noteer dan de particuliere oplossing als $y(x) = \ldots$, waarbij je de constante nu vervangen hebt door een concrete waarde.

Opmerking 8.3.1. In stap 2 integreren we beiden leden. We lossen hier tweemaal een onbepaalde integraal op. We krijgen dus eigenlijk de uitdrukking

$$F(y) + C_1 = G(x) + C_2.$$

Aangezien C_1 en C_2 beiden constanten zijn, is $C = C_2 - C_1$ ook een constante. Het is dus voldoende om enkel $+C$ te schrijven in één van de leden.

Voorbeeld 8.3.1.

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$\frac{dN}{dt} = 5 - N, \qquad \text{met } N(2) = 3$$

Uitwerking: Stap 1:

$$\frac{dN}{dt} = 5 - N \Leftrightarrow \frac{dN}{5-N} = dt \Leftrightarrow \int \frac{dN}{5-N} = \int dt.$$

Stap 2:

$$\int \frac{dN}{5-N} = \int \frac{-du}{u} \qquad (u = 5-N;\, du = -dN)$$
$$= -\ln|u| + C_1 = -\ln|5-N| + C_1$$
$$\int dt = t + C_2$$
$$\int \frac{dN}{5-N} = \int dt$$
$$\Leftrightarrow -\ln|5-N| = t + C \qquad (C = C_2 - C_1)$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Scheiden van veranderlijken

Stap 3:

$$
\begin{aligned}
&-\ln|5-N| = t + C \\
\Leftrightarrow\ &\ln|5-N| = -(t+C) \\
\Leftrightarrow\ &|5-N| = e^{-(t+C)} \\
\Leftrightarrow\ &5-N = \pm e^{-(t+C)} = \pm e^{-C}\cdot e^{-t} \\
\Leftrightarrow\ &5-N = Ke^{-t} \qquad (K = \pm e^{-C}) \\
\Leftrightarrow\ &-N = Ke^{-t} - 5 \\
\Leftrightarrow\ &N = 5 - Ke^{-t}
\end{aligned}
$$

Stap 4: $N(t) = 5 - Ke^{-t}$

Stap 5:

$$
\begin{aligned}
&N(2) = 5 - Ke^{-2} = 3 \\
\Leftrightarrow\ &Ke^{-2} = 5 - 3 \\
\Leftrightarrow\ &K = 2e^{2} \\
&N(t) = 5 - Ke^{-t} = 5 - 2e^{2}e^{-t} = 5 - 2e^{2-t}.
\end{aligned}
$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.3.1 Oefeningen scheiden van veranderlijken

Oefening 8.3.1. Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

1. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1-t}$, met $x(0) = 2$

Oplossing: $x(t) = \ldots\ldots$

2. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}y^2 - 2y$, met $t_0 = 0$ en $y_0 = -3$.

Antwoord: $y(t) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 9
Recursievergelijkingen

(Versie 2026/09/26HB.14)

9.1 Introductie Week 9

Deze week bekijken het discrete analogon van differentiaalvergelijkingen namelijk recursievergelijkingen. A priori zijn we op zoek naar rijen die voldoen aan een gegeven recursievergelijking. We zijn niet zozeer geïntereseerd in de oplossingen zelf, maar naar het gedrag van deze oplossingen nabij een evenwichtsoplossing. Om dit gedrag analytisch te onderzoeken, maak je gebruik van het stabiliteitscriterium. Dit criterium maakt gebruik van het concept afgeleiden, vandaar dat belangrijk is dat je dat concept goed onder de knie hebt. We verwijzen je dus graag naar week 3, waarin deze concepten ingeoefend worden.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 10
Lineaire algebra

(Versie 2026/09/26HB.14)

10.1 Introductie Week 10



Deze week beginnen we met lineaire algebra. Het is zowel voor de oefeningen van deze week als voor de volgende weken belangrijk dat je bewerkingen met matrices vlot kan uitvoeren. In deze voorbereidingsmodule kun je testen of je deze skills al beheerst. Zo niet, dan bekijk je best het remediërend materiaal.

CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Begintest Week 10

Oefening 10.2.1. Zij $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Bereken AB. ... ...

2. Bereken BA. ... ...

Oefening 10.2.2. Zij

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \text{ en } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Bereken AB. ... ...

2. Bereken BA. ... ...

Oefening 10.2.3. Zij A een $l \times p$ matrix. Wat zijn de afmetingen van de getransponeerde matrix A'? ... ...

Oefening 10.2.4. Zij A een 4×3 matrix, B een 1×3 matrix, C een 3×1 matrix en D een 4×3 matrix. Welke van deze matrixproducten zijn gedefinieerd? Geef, indien mogelijk, telkens ook de afmetingen van de resulterende matrices.

1. Bereken BD'. ... ...

2. DA. ... ...

3. $D'A$. ... ...

4. ACB. ... ...

CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Matrices

Net zoals een vector een manier is om veel *getallen* bij te houden, is een *matrix* een manier om veel *vectoren* (van dezelfde dimensie) bij te houden. Een matrix is *een rechthoek van getallen*, met m rijen van telkens n getallen. Matrices zijn erg nuttig bij de studie van stelsels van vergelijkingen maar komen ook voor in andere contexten.

10.3.1 Definitie van een matrix

Voorbeeld 10.3.1. Examenresultaten voor verschillende vakken kan je bijhouden in een tabel:

	Wiskunde	Nederlands	Engels	Duits
An	80	80	40	20
Bart	72	62	23	11
Chris	74	65	38	10
Dirk	73	70	29	17
Els	75	71	30	15

Je kan dezelfde gegevens ook in volgende (punten)matrix $\mathbf{A}$ opschrijven

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 & 20 \\ 72 & 62 & 23 & 11 \\ 74 & 65 & 38 & 10 \\ 73 & 70 & 29 & 17 \\ 75 & 71 & 30 & 15 \end{bmatrix}.$$

In deze voorstelling bevat elke rij de punten van een bepaalde leerling, en elke kolom de punten van een bepaald vak. We noemen deze matrix $\mathbf{A}$ een 5×4-matrix met 5 *rijen* en 4 *kolommen*. Het getal op rij 3 en kolom 2 zijn de punten van Chris voor Nederlands.

Definitie 10.3.1 (Matrix)**.**

Een reële $m \times n$ **matrix** $\mathbf{A}$ is een rechthoekig rooster van reële getallen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{met } m \text{ rijen en } n \text{ kolommen.}$$

- De **matrixelementen** (of soms ook *componenten*) van $\mathbf{A}$ zijn de getallen $a_{11}, \ldots a_{ij}, \ldots, a_{mn}$.
- Men noteert ook $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.
- Een $m \times n$ matrix heeft m rijen en n kolommen.
- Een $n \times n$ matrix (dus met evenveel rijen als kolommen) noemen we een **vierkante matrix**.
- Een $m \times 1$ **kolommatrix** (of **kolomvector**) is een matrix met één kolom.
- Een $1 \times n$ **rijmatrix** (of **rijvector**) is een matrix met één rij.
- De **diagonaal** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ bestaat uit de elementen a_{ii} die we de **diagonaalelementen** van de matrix noemen. Voor een vierkante matrix vormen ze inderdaad de diagonaal

CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Matrices

van de matrix. In volgende voorbeelden zijn de diagonaalelementen blauw gekleurd:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 10.3.2.

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ is een 2×2 matrix met $a_{11} = 1, a_{21} = 3, a_{12} = 2$ en $a_{22} = 4$
- $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 2×3 matrix en $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 3×2 matrix.
- $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ is een rijmatrix, en $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ is een kolommatrix.

Opmerking 10.3.1.

- De eerste index i geeft het nummer van de *rij* aan, de tweede index j die van de *kolom*.
- In sommige cursussen gebruikt men ronde haakjes in plaats van rechte haakjes: $\mathbf{A} = (a_{ij})$.
- Strikt wiskundig zijn vectoren, rijmatrices en kolommatrices *verschillend*,dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \neq (1, 3, -2).$$

Enkele speciale types van vierkante matrices krijgen een eigen naam:

Definitie 10.3.2 (Speciale matrices)**.**

De **nulmatrix** $\mathbf{O}_n$	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen 0 zijn.
De **eenheidsmatrix** $\mathbf{I}_n$	is een $n \times n$ matrix waarvan de diagonaalelementen gelijk zijn aan 1 en alle andere elementen gelijk zijn aan 0.
Een **diagonaalmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen buiten de diagonaal 0 zijn.
Een **bovendriehoeksmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen *onder* de diagonaal 0 zijn.
Een **onderdriehoeksmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen *boven* de diagonaal 0 zijn.

Voorbeeld 10.3.3. Een eenheidsmatrix, een diagonaalmatrix en een bovendriehoeksmatrix:

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Matrices

Definitie 10.3.3. Zij $\mathbf{A}$ een $m \times n$ matrix.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{met } m \text{ rijen en } n \text{ kolommen.}$$

De **getransponeerde** matrix $\mathbf{A}'$ is een $n \times m$ matrix waarbij de rij-elementen van $\mathbf{A}'$ overeenkomen met de kolomelementen van $\mathbf{A}$ en de kolomelementen van $\mathbf{A}'$ overeenkomen met de rij-elementen van $\mathbf{A}$. Dus

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{met } n \text{ rijen en } m \text{ kolommen.}$$

Voorbeeld 10.3.4. Zij $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ een 2×3 matrix.

Dan is $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ een 3×2 matrix.

10.3.2 Rekenen met matrices

We definiëren de optelling en de scalaire vermenigvuldiging van matrices op dezelfde manier als voor vectoren: element-per-element. Voor de optelling is het dus belangrijk dat beide matrices dezelfde afmetingen hebben: allebei evenveel rijen en evenveel kolommen.

Definitie 10.3.4 (Optelling en scalair veelvoud van matrices)**.**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$r \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{bmatrix}$$

Het verschil van matrices en de tegengestelde matrix worden gedefinieerd net zoals voor vectoren.

Voorbeeld 10.3.5 (Som, verschil, tegengestelde en scalair veelvoud van matrices)**.**

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 33 & 36 \end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 44 \end{bmatrix} \qquad -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

maar de sommen $\begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 40 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 10 & 200 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ bestaan niet.

CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Matrices

Het product van een matrix met een kolomvector:

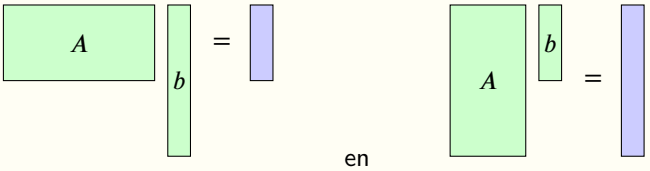
Definitie 10.3.5 (Matrix-vector-product)**.**

Het product van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ met een $n \times 1$ kolomvector $\mathbf{b}$ is de $m \times 1$ kolomvector $\mathbf{Ab}$ gegeven door

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \ldots + a_{mn}b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_k \end{bmatrix}.$$

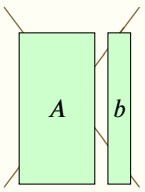
Opmerking 10.3.2.

(a) Het product $\mathbf{Ab}$ is enkel gedefinieerd als het aantal *kolommen* van $\mathbf{A}$ gelijk is aan het aantal *rijen* van $\mathbf{b}$. Het resultaat is een *kolomvector* met evenveel rijen als $\mathbf{A}$. Visueel betekent dit:

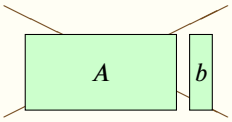


en

maar volgende producten zijn onmogelijk:

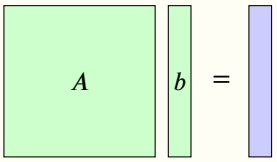


en



.

Enkel voor *vierkante* matrices heeft $\mathbf{Ab}$ dezelfde vorm als $\mathbf{b}$:



(b) Zoals gebruikelijk bij producten schrijft men soms ook een punt: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{Ab}$. Bij matrices wordt de punt echter meestal weggelaten.

(c) Als $\mathbf{A}$ een rijvector is schrijven we dergelijke matrix soms ook met een kleine letter $\mathbf{a}$, dan is het product $\mathbf{ab}$ het reële getal gegeven door

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \quad \in \mathbb{R}.$$

en dit komt neer op het *scalair product* van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.

CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Matrices

Voorbeeld 10.3.6.

(a) $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} = 1\cdot 5 + 2\cdot 7 = 19$ en $\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} = 3\cdot 5 + 4\cdot 7 = 43.$

(b) $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix} = 1\cdot 6 + 2\cdot 8 = 22$ en $\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix} = 3\cdot 6 + 4\cdot 8 = 50.$

(c) $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 5 + 2\cdot 7\\3\cdot 5 + 4\cdot 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19\\43\end{bmatrix}.$

(d) $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 6 + 2\cdot 8\\3\cdot 6 + 4\cdot 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}22\\50\end{bmatrix}.$

(e) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\3 & 4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 4\cdot 2\\3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 1 + 6\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 + 6 + 3 + 8\\6 + 12 + 5 + 12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19\\35\end{bmatrix}.$

CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Matrixvermenigvuldiging

Definitie 10.4.1 (Herhaling matrix-vector-product)**.**

Het product van een $m \times n$ matrix met een $n \times 1$ kolomvector is de $m \times 1$ kolomvector gegeven door

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \ldots b_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1}b_1 + a_{1,2}b_2 + \ldots + a_{1,n}b_n \\ a_{2,1}b_1 + a_{2,2}b_2 + \ldots + a_{2,n}b_n \\ \\ \vdots \\ \\ a_{m,1}b_1 + a_{m,2}b_2 + \ldots + a_{m,n}b_n \end{bmatrix}.$$

Definitie 10.4.2 (Matrix-matrix-product)**.**

Het product van $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is $m \times n$ matrix $\mathbf{C} = [c_{i,j}]$ waarbij het element $c_{i,j}$ op de i-de rij en de j-de kolom gelijk is aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met j-de kolom van $\mathbf{B}$:

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \ldots + a_{i,p}b_{p,j}$$

Visueel zien we dit als

$$AB = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & b_{p,2} & \cdots & b_{p,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,n} \end{bmatrix}$$

waarbij $c_{1,2} = a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} + \ldots + a_{1,p}b_{p,2}$

Voorbeeld 10.4.1.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 19 & 22 \end{bmatrix}.$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 31 & 36 \end{bmatrix}.$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 19 & 22 \\ 18 & 31 & 36 \end{bmatrix}.$

Opmerking 10.4.1. Optellen van twee matrices werkt enkel als ze dezelfde vorm hebben: evenveel rijen en evenveel kolommen. De vermenigvuldiging daarentegen werkt enkel voor $m \times p$ met $p \times n$ matrices, dus als het aantal *kolommen* van de eerste matrix gelijk is aan het aantal *rijen* van de tweede. Het product van een 5×3 matrix $\mathbf{A}$ en een 3×2 matrix $\mathbf{B}$ is de 5×2 matrix $\mathbf{AB}$. Maar een matrix $\mathbf{BA}$ *bestaat dan niet*. Het product $\mathbf{BA}$ is in dit geval *niet gedefinieerd*! Dit toont al meteen

CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Matrixvermenigvuldiging

aan dat in het algemeen matrixvermenigvuldiging niet commutatief kan zijn: er geldt niet altijd dat $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

CC BY-NC-SA 4.0

10.4.1 Oefeningen Matrixvermenigvuldiging

Oefening 10.4.1. Voer de bewerkingen uit indien ze gedefinieerd zijn. Bepaal de afmetingen van alle matrices.

1. Bereken AB en BA voor de matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 15 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

2. Bereken AB en BA voor de matrices $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ end $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

3. Bereken AB en BA voor de matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 9 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Bereken $A(BC)$ en $(AB)C$ en bepaal de afmetingen van BC, AB, $A(BC)$ en $(AB)C$ voor de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 11

Stelsels van recursievergelijkingen

(Versie 2026/09/26HB.14)

11.1 Introductie Week 11



Deze week behandelen we lineaire algebra. We oefenen op het berekenen van eigenwaarden en -vectoren. Eigenwaarden en -vectoren hebben onder meer toepassingen in matrixmodellen zoals het Lesliemodel. Bij het berekenen van eigenwaarden en -vectoren zullen we gebruik maken van complexe getallen.

CC BY-NC-SA 4.0

11.2 Begintest Week 11

Gebruik deze test om te controleren of je vaardig bent met het rekenen met complexe getallen.

Oefening 11.2.1. Vereenvoudig volgende uitdrukkingen en schrijf in de vorm $a + bi$.

1. $(3 - 2i) - (-2 + 5i) = \ldots\ldots$

2. $(2 - 3i)(5 + 2i) = \ldots\ldots$

3. $(6 - i)(6 + i) = \ldots\ldots$

Oefening 11.2.2. Bepaal de oplossing van de onderstaande vierkantsvergelijking.

1. $x^2 + 4x + 5 = 0 \implies x = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

11.3 Complexe getallen

Veeltermvergelijkingen hebben niet altijd reële oplossingen. Zo hebben vierkantsvergelijkingen met een negatieve discriminant geen reële wortels. Een erg eenvoudig voorbeeld is de vergelijking $x^2 + 1 = 0$ of, anders geschreven, $x^2 = -1$. Deze vergelijking heeft geen reële wortels, omdat het kwadraat van een reëel getal nooit negatief kan zijn, en dus nooit gelijk aan -1.

De zogenaamde *complexe getallen* vormen een uitbreiding van de reële getallen. Aan de reële getallen wordt een nieuw 'getal' toegevoegd dat traditioneel i genoemd wordt, en i is *per definitie* een oplossing van de vergelijking $x^2 + 1 = 0$. Er geldt dus per definitie dat $i^2 = -1$. Het is een hoogst merkwaardig feit dat door een oplossing van deze vergelijking $x^2 + 1 = 0$ toe te voegen, ineens *alle* veeltermvergelijkingen met reële coëfficiënten oplossingen blijken te hebben.

Definitie 11.3.1.

We noemen de uitdrukking $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $i^2 = -1$ een **complex getal**. Het symbool i noemen we de **imaginaire eenheid**. De verzameling van alle complexe getallen noemen we $\mathbb{C}$.

Per definitie zijn twee complexe getallen $a + bi$ en $c + di$ enkel aan elkaar gelijk als $a = c$ en $b = d$.

We noteren een willekeurig complex getal dikwijls met z. Stel $z = a + bi$.

- We noemen a het **reëel deel** van z en noteren $\mathrm{Re}(z) \stackrel{\text{def}}{=} a$.
- We noemen b het **imaginair deel** van z en noteren $\mathrm{Im}(z) \stackrel{\text{def}}{=} b$.
- Als $b = 0$ noemen we $z = a$ een **(zuiver) reëel getal** ($\mathbb{R}$ is dus een deelverzameling van $\mathbb{C}$).
- Als $a = 0$ noemen we $z = bi$ een **(zuiver) imaginair getal**.

Voorbeeld 11.3.1. Volgende uitdrukkingen zijn allemaal complexe getallen:

(a) $2 + 3i$ (c) $42i$ (e) $1 + i\sqrt{2}$

(b) 42 (d) $1 + \pi$ (f) $\dfrac{1 - i\sqrt{5}}{2}$

De getallen 42 en $1 + \pi$ zijn zuiver reële getallen, en $42i$ is een zuiver imaginair getal.

11.3.1 Rekenen met complexe getallen

Voor complexe getallen kan, met de gebruikelijke rekenregels, de optelling en vermenigvuldiging gedefinieerd worden, waarbij steeds i^2 vervangen wordt door -1.

Definitie 11.3.2 (Som en product)**.**

Als $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, en dus $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \in \mathbb{C}$ geldt:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Opmerking 11.3.1.

Als je twee complexe getallen kan optellen, is het ook eenvoudig om ze van elkaar af te trekken: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$. Je kan twee complexe getallen ook *delen* door elkaar, maar daar gaan we in deze cursus niet verder op in.

CC BY-NC-SA 4.0

11.3 Complexe getallen

Oefening 11.3.1.

1. $(1+2i)+(3+4i) = \ldots\ldots$
2. $(1+2i)\cdot(3+4i) = \ldots\ldots$
3. $(1+2i)\cdot(1-2i) = \ldots\ldots$
4. $(1+2i)\cdot\dfrac{1-2i}{2} = \ldots\ldots$
5. $(1+2i)\cdot i = \ldots\ldots$
6. $i^3 = \ldots\ldots$
7. $i^4 = \ldots\ldots$

11.3.2 Vierkantsvergelijkingen

Voorbeeld 11.3.2. Bepaal alle oplossingen van volgende veeltermvergelijkingen.

1. $x^2 = 64$. Antwoord: $x = \pm 8$.
2. $x^2 = -64$

Uitwerking: We schrijven eerst -1 als i^2, dan wordt de vergelijking $x^2 = (i\,8)^2$ en vinden dan de oplossingen $x = 8i$, en $x = -8i$.

3. $x^2 = -3$

Uitwerking: We schrijven eerst -1 als i^2, dan wordt de vergelijking $x^2 = (i\sqrt{3})^2$ en vinden dan de oplossingen $x = i\sqrt{3}$, en $x = -i\sqrt{3}$.

We kunnen dus complexe getallen vinden waarvan het kwadraat een negatief reëel getal is. Stel dat we een vierkantsvergelijking hebben met negatieve disciminant D, bijvoorbeeld

$$z^2 + z + 1 = 0$$

met

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3,$$

dan zijn er geen reële oplossingen, maar kunnen we toch twee complexe oplossingen vinden. We weten dat $D = -3 = (i\sqrt{3})^2$, of ook $i\sqrt{3} = i\sqrt{-D}$ want $-D = 3$. We spreken af om het symbool $\sqrt{\cdot}$ enkel te gebruiken voor positieve reële getallen, niet voor complexe getallen, maar in andere cursussen kunnen andere afspraken gemaakt worden. De oplossingen van de vierkantsvergelijking zijn

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{en} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

Inderdaad $z_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ is een oplossing van $z^2 + z + 1 = 0$ want

$$\begin{aligned}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 1 &= \frac{(-1+i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{4} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 1\\ &= \frac{1 - i\,2\sqrt{3} - 3}{4} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 1\\ &= \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{-2}{2} + 1 = 0.\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

11.3 Complexe getallen

Met een analoge berekening kan je nagaan dat ook z_2 een oplossing is van $z^2 + z + 1 = 0$.

Zo maken de complexe getallen de theorie van het oplossen van vergelijkingen in zekere zin makkelijker. Bij vierkantsvergelijkingen moeten we geen gevalsonderscheid meer maken naargelang de waarde van de discriminant $D = b^2 - 4ac$. Bij $D < 0$ zijn de oplossingen dan geen reële getallen, maar twee complexe getallen.

Eigenschap 11.3.1 (Oplossen van vierkantsvergelijkingen met negatieve discriminant)**.**

De twee oplossingen z_1 en z_2 van een vierkantsvergelijking $az^2 + bz + c = 0$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ met discriminant $D = b^2 - 4ac < 0$ zijn

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a}$$

Oefening 11.3.2. Los volgende vergelijkingen op over de complexe getallen

1. $x^2 + 4 = 0$. Antwoord: … …

2. $x^2 + 2x + 5 = 0$. Antwoord: … …

3. $x^2 + 3x + 7 = 0$. Antwoord: … …

CC BY-NC-SA 4.0

11.3.1 Oefeningen complexe getallen

Oefening 11.3.3. Bereken volgende uitdrukkingen. Schrijf de complexe getallen in de vorm $a + bi$.

1. $(4 + i) + (1 - 2i) = \ldots\ldots$

2. $(2 + 4i) - (6 - 7i) = \ldots\ldots$

3. $(2 + 3i)(-5 + i) = \ldots\ldots$

4. $(2 + i)^2 = \ldots\ldots$

Oefening 11.3.4. Bepaal alle oplossingen van volgende veeltermvergelijkingen.

1. $x^2 + x = 0$

2. $x^3 + 16x = 0$

3. $x^2 + 5x + 2 = 0$

4. $9x^2 - 14 = 4x$

5. $x = 2x^2 + 5$

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 12

Stelsels van differentiaalvergelijkingen

(Versie 2026/09/26HB.14)

12.1 Introductie Week 12



Enkele weken geleden bestudeerden we differentiaalvergelijkingen. In het laatste deel van dit opleidingsonderdeel bestuderen we stelsels differentiaalvergelijkingen, waarbij de focus deze week ligt op stelsels homogene eerste-orde lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten. In de vorige oefenzitting werden eigenwaarden en eigenvectoren bestudeerd. Deze kennis zal je deze week nodig hebben om de stelsels op te lossen en om uitspraken te doen over de stabiliteit van evenwichten. Daarom is het zeer belangrijk om vlot eigenwaarden en eigenvectoren te kunnen bepalen voordat je aan de oefeningen van deze week begint.

CC BY-NC-SA 4.0

12.2 Begintest Week 12

In deze voorkennistest bereken je de eigenwaarden en eigenvectoren van enkele matrices. Je zal deze uitkomsten nodig hebben voor de voorbereidingsoefeningen. Zorg dus dat je deze noteert!

Oefening 12.2.1. Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van de onderstaande matrices.

1.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

… …

2.

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

… …

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

… …

CC BY-NC-SA 4.0

12.3 Eigenwaarden en eigenvectoren

Definitie 12.3.1. Een $(n \times n)$-matrix A heeft eigenwaarde λ (een getal) en een bijhorende eigenvector $\vec{v} \neq \vec{0}$ (een kolomvector met n elementen) als geldt dat $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

- **Bepaling van λ:** oplossingen van $\det(A - \lambda * I) = 0$. Hierbij is I de eenheidsmatrix: een matrix met enen op de diagonaal en nul op alle andere plaatsen.
- **Bepaling van bijhorende $\vec{v}$:** oplossingen van het stelsel $(A - \lambda * I)\vec{v} = \vec{0}$.
  Merk op dat, per definitie van eigenvector, $\det(A - \lambda * I) = 0$. Dit wil zeggen dat dit stelsel ofwel geen oplossingen heeft, ofwel oneindig veel. Aangezien dit stelsel homogeen is, heeft het stelsel oneindig veel oplossingen. Eigenvectoren zijn dus **op een veelvoud na** bepaald.

Voorbeeld 12.3.1. Bereken de eigenwaarden van de onderstaande matrix

1.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -2$

Uitwerking: We berekenen eerst de karakteristieke veelterm $\det(A - \lambda * I)$.

$$A - \lambda * I = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda * I) &= (-4-\lambda)(1-\lambda) + 6 \\ &= \lambda^2 + 4\lambda - \lambda - 4 + 6 \\ &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \end{aligned}$$

Vervolgens zoeken we de nulpunten van deze karakteristieke veelterm:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 3\lambda + 2 &= 0 \\ D &= 3^2 - 4 \cdot 2 = 1 \\ \lambda &= \frac{-3 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

We vinden zo de twee eigenwaarden: $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = -2$.

Opmerking 12.3.1. Merk op dat de eigenvectoren van een driehoeksmatrix overeenkomen met de elementen die op de diagonaal staan:

- Zij $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ een bovendriehoeksmatrix. Dan geldt:

$$\det(A - \lambda * I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - 0$$

- Zij $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ een onderdriehoeksmatrix. Dan geldt:

$$\det(A - \lambda * I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - 0$$

In beide gevallen krijgen we dezelfde uitdrukking. Deze uitdrukking is gelijk aan nul als en slechts als $\lambda = a_{11}$ of $\lambda = a_{22}$.

CC BY-NC-SA 4.0

12.3 Eigenwaarden en eigenvectoren

Voorbeeld 12.3.2. Bereken de eigenwaarden van de onderstaande matrix

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -1$$

Uitwerking: Aangezien deze matrix een bovendriehoeksmatrix is, komen de eigenwaarden overeen met de elementen op de diagonaal, 2 en -1.

Het berekenen van eigenvectoren van een 2x2 matrix zullen we doen met behulp van het onderstaande stappenplan. Zij $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ een matrix met eigenvectoren $\lambda_{1,2}$.

1. Vul één van de gevonden eigenwaarden, bv. λ_1, in de matrixvergelijking $(A - \lambda * I)\vec{v} = \vec{0}$ in. We vinden dan een matrixvergelijking van de vorm

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. We schrijven deze matrixvergelijking als een stelsel. Deze stap moet je niet te doen indien je liever met matrices werkt. Het vervolg is analoog.

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)x + a_{12}y = 0 & (V1) \\ a_{21}x + (a_{22} - \lambda_1)y = 0 & (V2) \end{cases}$$

3. We controleren of beide vergelijkingen een veelvoud van elkaar zijn. Indien dit niet het geval is, heb je ergens een fout gemaakt.

4. We werken verder met één van beide vergelijkingen, zeg $V1$. Je mag ook $V2$ nemen, aangezien deze op een veelvoud na gelijk zijn. We kunnen kiezen uit 2 opties om een eigenvector te bepalen. Beide opties zijn evenwaardig aangezien de gevonden eigenvectoren veelvouden zijn van elkaar en eigenvectoren slechts tot op een veelvoud na bepaald zijn.

Optie 1: Stel $x = t$ dan $y = \dfrac{-(a_{11} - \lambda_1)}{a_{12}}t$. De eigenvector wordt dan van de vorm $\begin{pmatrix} t \\ \dfrac{-(a_{11} - \lambda_1)}{a_{12}}t \end{pmatrix}$. Vul nu een willekeurige niet-nulwaarde voor t in.

Optie 2: Stel $y = t$ dan $x = \dfrac{-a_{12}}{(a_{11} - \lambda_1)}t$. De eigenvector wordt dan van de vorm $\begin{pmatrix} \dfrac{-a_{12}}{(a_{11} - \lambda_1)}t \\ t \end{pmatrix}$. Vul nu een willekeurige niet-nulwaarde voor t in.

5. Herhaal dit proces voor de andere eigenwaarde.

Voorbeeld 12.3.3. Bereken de eigenvectoren van de onderstaande matrices

1.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

12.3 Eigenwaarden en eigenvectoren

Uitwerking: Merk op dat we de eigenwaarden van deze matrix al berekend hebben in voorbeeld 1, namelijk $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -2$. We volgen het bovenstaande stappenplan.

1. We vullen de eigenwaarde $\lambda_1 = -1$ in in de vergelijking $(A - \lambda * I)\vec{v} = \vec{0}$. We vinden zo
$$\begin{pmatrix} -4-(-1) & 2 \\ -3 & 1-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
2. We schrijven deze matrixvergelijking als een stelsel. Deze stap moet je niet te doen indien je liever met matrices werkt. Het vervolg is analoog.
$$\begin{cases} -3x + 2y = 0 & (V1) \\ -3x + 2y = 0 & (V2) \end{cases}$$
3. We vinden tweemaal dezelfde vergelijking. De vergelijkingen zijn dus zeker veelvouden van elkaar.
4. We vinden de vergelijking $-3x + 2y = 0$. We hebben nu twee opties om de eigenvector te bepalen. We werken ze in dit voorbeeld beiden uit. Verder zullen we telkens maar één optie bespreken.

Optie 1: Stel $x = t$, dan $y = \frac{3}{2}t$. De eigenvector krijgt dus de vorm
$$\begin{pmatrix} t \\ \frac{3}{2}t \end{pmatrix}.$$
We kiezen nu een willekeurige waarde voor t. Om breuken te vermijden, maken we hier de keuze om $t = 2$ te nemen. We vinden dan dat $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ een eigenvector is van A bij de eigenwaarde $\lambda_1 = -1$.

Optie 2: Stel $y = t$, dan $x = \frac{2}{3}t$. De eigenvector krijgt dus de vorm
$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}t \\ t \end{pmatrix}.$$
We kiezen nu een willekeurige waarde voor t. Om breuken te vermijden, maken we hier de keuze om $t = 3$ te nemen. We vinden dan dat $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ een eigenvector is van A bij de eigenwaarde $\lambda_1 = -1$.

5. We herhalen het hele proces voor de andere eigenwaarde $\lambda_2 = -2$. We zullen de stappen nu korter noteren. We vullen de eigenwaarde $\lambda_1 = -2$ in in de vergelijking $(A - \lambda * I)\vec{v} = \vec{0}$. We vinden zo
$$\begin{pmatrix} -4-(-2) & 2 \\ -3 & 1-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 & (V1) \\ -3x + 3y = 0 & (V2) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 & (V3) \\ -x + y = 0 \end{cases}$$
We zien dat $V1 = 2V3$ en $V2 = 3V3$. $V1$ en $V2$ zijn dus ook veelvouden van elkaar. Om het rekenwerk zo eenvoudig mogelijk te houden, werken we verder met de vergelijking $V3$.
Stel nu $x = t$, dan $y = t$. Voor $t = 1$ vinden we dan de eigenvector $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Overtuig jezelf ervan dat andere keuzes steeds tot dezelfde oplossing leiden, op een veelvoud na.

We vinden dus dat $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ een eigenvector is van A bij de eigenwaarde $\lambda_1 = -1$ en dat $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ een eigenvector is van A bij de eigenwaarde $\lambda_1 = -2$.

CC BY-NC-SA 4.0

12.3 Eigenwaarden en eigenvectoren

2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Uitwerking: Merk op dat we de eigenwaarden van deze matrix al berekend hebben in voorbeeld 2, namelijk $\lambda_1 = 2; \lambda_2 = -1$. We volgen het bovenstaande stappenplan.

1. We vullen de eigenwaarde $\lambda_1 = 2$ in in de vergelijking $(A - \lambda * I)\vec{v} = \vec{0}$. We vinden zo

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 2 \\ -3 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. We schrijven deze matrixvergelijking als een stelsel. Deze stap moet je niet te doen indien je liever met matrices werkt. Het vervolg is analoog.

$$\begin{cases} 2y = 0 & (V1) \\ -3y = 0 & (V2) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = 0 & (V3) \\ y = 0 \end{cases}$$

3. We zien dat $V1 = 2V3$ en $V2 = -3V3$. $V1$ en $V2$ zijn dus ook veelvouden van elkaar. Om het rekenwerk zo eenvoudig mogelijk te houden, werken we verder met de vergelijking $V3$.
4. We vinden de vergelijking $y = 0$. Aangezien y al bekend is, kunnen we enkel nog x gelijkstellen aan t. Voor de keuze $t = 1$ vinden we dan dat $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ een eigenvector is van A bij de eigenwaarde $\lambda_1 = 2$.
5. We herhalen het hele proces voor de andere eigenwaarde $\lambda_2 = -1$. We zullen de stappen nu korter noteren. We vullen de eigenwaarde $\lambda_1 = -1$ in in de vergelijking $(A - \lambda * I)\vec{v} = \vec{0}$. We vinden zo

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 0 & (V1) \\ 0 = 0 & (V2) \end{cases}$$

We zien dat $V2 = 0V1$. $V1$ en $V2$ zijn dus veelvouden van elkaar. Om het rekenwerk zo eenvoudig mogelijk te houden, zullen we $y = t$ kiezen. Zo vinden we $x = 3t$ Voor $t = 1$ vinden we dan de eigenvector $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Overtuig jezelf ervan dat andere keuzes steeds tot dezelfde oplossing leiden, op een veelvoud na.

We vinden dus dat $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ een eigenvector is van A bij de eigenwaarde $\lambda_1 = 2$ en dat $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ een eigenvector is van A bij de eigenwaarde $\lambda_1 = -1$.

In de vorige voorbeelden zagen we vaak op zicht dat de twee vergelijkingen veelvouden zijn van elkaar. Bij moeilijkere vergelijkingen kan je de onderstaande techniek toepassen.

Opmerking 12.3.2. Zij

$$\begin{cases} ax + by = 0 & (V1) \\ cx + dy = 0 & (V2) \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

12.3 Eigenwaarden en eigenvectoren

een stelsel van homogene vergelijkingen. Om na te gaan dat deze vergelijkingen veelvouden van elkaar zijn, vermenigvuldigen we $V1$ met c en $V2$ met a. We krijgen dan

$$\begin{cases} acx + bcy = 0 & (V1) \\ acx + ady = 0 & (V2) \end{cases}.$$

Indien $bc = ad$, zijn deze vergelijkingen veelvouden van elkaar.

Voorbeeld 12.3.4. Bereken de complexe eigenwaarden en eigenvectoren van deze matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Uitwerking: We berekenen eerst de karakteristieke veelterm $\det(A - \lambda * I)$.

$$A - \lambda * I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$\det(A - \lambda * I) = (2-\lambda)(-\lambda) + 3$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda + 3$$

Vervolgens zoeken we de nulpunten van deze karakteristieke veelterm:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$$
$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 = -8$$
$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{8}i}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \sqrt{2}i$$

We vinden zo de twee eigenwaarden: $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}i$ en $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}i$.

1. We vullen de eigenwaarde $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}i$ in in de vergelijking $(A - \lambda * I)\vec{v} = \vec{0}$. We vinden zo
$$\begin{pmatrix} 2-(1+\sqrt{2}i) & -1 \\ 3 & -(1+\sqrt{2}i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2}i & -1 \\ 3 & -1-\sqrt{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
2. We schrijven deze matrixvergelijking als een stelsel. Deze stap moet je niet te doen indien je liever met matrices werkt. Het vervolg is analoog.
$$\begin{cases} (1-\sqrt{2}i)x - y = 0 & (V1) \\ 3x - (1+\sqrt{2}i)y = 0 & (V2) \end{cases}$$
3. In dit geval zien we niet op zicht dat deze vergelijkingen veelvouden zijn van elkaar. We zullen daarom de techniek uit opmerking 2 gebruiken:
$$\begin{cases} 3 \cdot (1-\sqrt{2}i)x - 3y = 0 & (V1) \\ 3 \cdot (1-\sqrt{2}i)x - (1+\sqrt{2}i) \cdot (1-\sqrt{2}i)y = 0 & (V2) \end{cases}.$$
Aangezien $(1+\sqrt{2}i) \cdot (1-\sqrt{2}i) = 1^2 - (\sqrt{2}i)^2 = 1 - (-2) = 3$, zien we dat deze vergelijkingen inderdaad veelvouden van elkaar zijn.
4. We werken verder met vergelijking $V1$. Om het rekenwerk te beperken, zullen we $x = t$ nemen. We vinden dan $y = (1 - \sqrt{2}i)$. Voor de keuze $t = 1$ vinden we dan dat $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2}i \end{pmatrix}$ een eigenvector is van A bij de eigenwaarde $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}i$.

CC BY-NC-SA 4.0

12.3 Eigenwaarden en eigenvectoren

5. We herhalen het hele proces voor de andere eigenwaarde $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}i$. We zullen de stappen nu korter noteren. We vullen de eigenwaarde $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}i$ in in de vergelijking $(A - \lambda * I)\vec{v} = \vec{0}$. We vinden zo

$$\begin{pmatrix} 2-(1-\sqrt{2}i) & -1 \\ 3 & -(1-\sqrt{2}i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}i & -1 \\ 3 & -1+\sqrt{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} (1+\sqrt{2}i)x - y = 0 & (V1) \\ 3x - (-1+\sqrt{2}i)y = 0 & (V2) \end{cases}$$

In dit geval zien we niet op zicht dat deze vergelijkingen veelvouden zijn van elkaar. We zullen daarom de techniek uit opmerking 2 gebruiken:

$$\begin{cases} 3 \cdot (1+\sqrt{2}i)x - 3y = 0 & (V1) \\ 3 \cdot (1+\sqrt{2}i)x + (1+\sqrt{2}i) \cdot (-1+\sqrt{2}i)y = 0 & (V2) \end{cases}.$$

Aangezien $(1+\sqrt{2}i) \cdot (-1+\sqrt{2}i) = (\sqrt{2}i)^2 - 1^2 = (-2) - 1 = -3$, zien we dat deze vergelijkingen inderdaad veelvouden van elkaar zijn.

6. We werken verder met vergelijking $V1$. Om het rekenwerk te beperken, zullen we $x = t$ nemen. We vinden dan $y = (1+\sqrt{2}i)$. Voor de keuze $t = 1$ vinden we dan dat $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2}i \end{pmatrix}$ een eigenvector is van A bij de eigenwaarde $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}i$.

Meer oefeningen vind je in de map Oefeningen > Extra oefeningen op Toledo.

CC BY-NC-SA 4.0

KU LEUVEN

Groep Wetenschap en Technologie

Zomercursus Wiskunde

Module 13

Stelsels van niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

(Versie 2026/09/26HB.14)

13.1 Introductie Week 13



Tijdens de vorige oefenzitting werden stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde behandeld. In deze laatste oefenzitting staan stelsels niet-lineaire differentiaalvergelijkingen van de eerste orde centraal. Je zal merken dat veel zaken analoog verlopen, enkel het rekenwerk zal toenemen omdat je partiële afgeleiden zal moeten berekenen. Ook zal je weer eigenwaarden moeten kunnen berekenen. Zorg dus dat je beide technieken vlot kan uitvoeren voor je aan de oefenzitting begint.

CC BY-NC-SA 4.0

13.2 Begintest Week 13

De resultaten van deze oefeningen heb je nog nodig tijdens de voorbereiding. Zorg dat je je oplossingen dus goed noteert.

Oefening 13.2.1. Bereken de partiële afgeleiden $\frac{\partial}{\partial x}$ en $\frac{\partial}{\partial y}$ van de onderstaande functies:

1. $f(x,y) = \ln(x+y)$

…….

2. $g(x,y) = e^{x+y}$

…….

3. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

…….

4. $g(x,y) = e^{-x^2}$

…….

Oefening 13.2.2. Bereken de eigenwaarden van deze matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

…….

CC BY-NC-SA 4.0