Vergelijkingen in 1 onbekende

Het *oplossen van vergelijkingen* is een steeds weerkerend thema in de wiskunde. Er zijn verschillende soorten vergelijkingen, zoals veeltermvergelijkingen, rationale vergelijkingen, irrationale vergelijkingen, goniometrische vergelijkingen, exponentiële vergelijkingen en logaritmische vergelijkingen. We bespreken hier kort de terminologie en enkele algemene principes die daarmee samenhangen.

Definitie 1.

- Een **gelijkheid** is een uitdrukking die precies één gelijkheidsteken $=$ bevat. Het **linkerlid** van de gelijkheid is het deel van de uitdrukking vòòr het gelijkheidsteken, het **rechterlid** is het deel erachter.
- Een **vergelijking in één onbekende** is een *gelijkheid* waarin één onbekende voorkomt.
- Een **oplossing** van de vergelijking is een waarde van de onbekende waarvoor de gelijkheid waar is. De **oplossingsverzameling** van de vergelijking is de verzameling van *alle* oplossingen.
- We noemen twee vergelijkingen **equivalent** als ze dezelfde oplossingsverzameling hebben.

Opmerking 1.

Een gelijkheid die enkel getallen en gekende functies bevat

- kan **waar** zijn, bijvoorbeeld $1+1=2$ of $\sqrt{4}=2$,
- kan **niet waar** zijn, bijvoorbeeld $1+1=3$ of $\sqrt{4}=-2$,
- kan **geen betekenis** hebben, bijvoorbeeld $1+=3$ of $\sqrt{-4}=2$.

Voor de onbekende wordt vaak de letter x gebruikt, maar een onbekende kan met eender welke letter worden aangeduid. Het oplossen van een vergelijking komt erop neer dat je die waarden voor de onbekende zoekt waarvoor het linkerlid gelijk is aan het rechterlid. **Bij het oplossen van een vergelijking mag men enkel bewerkingen uitvoeren die de vergelijking vervangen door een equivalente vergelijking.** Een vergelijking kan precies één oplossing, meer dan één oplossing of geen oplossing hebben. We noteren deze oplossingsverzameling met V. Het is steeds een goed idee om je gevonden oplossing te controleren, door deze waarde van de onbekende in te vullen in de vergelijking, om zo na te gaan of linkerlid inderdaad gelijk is aan rechterlid.

Voorbeeld 1.

- In de vergelijking
$$2x+6=10$$
wordt het linkerlid $2x+6$, met daarin de onbekende x, gelijkgesteld aan het rechterlid 10. De vergelijking bevat één onbekende, namelijk x. Enkel $x=2$ is een oplossing van die vergelijking. Soms wordt de oplossing van een vergelijking genoteerd als een verzameling V. Voor dit voorbeeld schrijven we dan $V=\{2\}$.

  De vergelijking $2x+6=10$ is equivalent met de vergelijking $2x=4$, omdat beide vergelijkingen oplossingsverzameling $V=\{2\}$ hebben.
- De vergelijking
$$x^2-1=0$$
heeft 2 oplossingen, namelijk $x=1$ en $x=-1$. We noteren $V=\{-1,1\}$.

Een vergelijking vervangen door een (eenvoudigere) equivalente vergelijking kan met volgende eigenschappen van gelijkheden.

CC BY-NC-SA 4.0

Vergelijkingen in 1 onbekende

Eigenschap 1 (Overbrengingsregels)**.** Voor elke $a, b, r \in \mathbb{R}$ geldt

$$\begin{array}{rrcll} & a = b & \iff & a + r = b + r & \text{(plus getal)} \\ \text{Voor } r \neq 0: & a = b & \iff & a \cdot r = b \cdot r & \text{(maal getal)} \end{array}$$

Opmerking 2.

- De eerste eigenschap zegt dat je bij beide leden van een gelijkheid eenzelfde getal mag optellen

  $$a = b \Rightarrow\ a + r = b + r$$

  of aftrekken

  $$a + r = b + r \Rightarrow\ a = b.$$

  Als we bij de gelijkheid $x = y$ van beide leden y aftrekken krijgen we $x - y = 0$, wat neerkomt op de term y naar het andere lid brengen.

  $$x = y \iff x - y = 0$$

  Bij het overbrengen van een **term** van het ene naar het andere lid verandert het teken.

- De tweede eigenschap zegt dat je beide leden van een gelijkheid mag vermenigvuldigen

  $$a = b \Rightarrow\ a \cdot r = b \cdot r$$

  of delen

  $$a \cdot r = b \cdot r \Rightarrow\ a = b$$

  met eenzelfde getal, verschillend van nul.

  Als we bij de gelijkheid $x = y$, met $y \neq 0$, beide leden delen door y krijgen we $\frac{x}{y} = 1$, wat neerkomt op de factor y naar het andere lid brengen.

  $$x = y \iff \frac{x}{y} = 1 \text{ indien } y \neq 0$$

  Bij het overbrengen van een **factor** van het ene naar het andere lid wordt een vermenigvuldiging een deling en omgekeerd.

Met deze eigenschappen van gelijkheden kunnen we de oplossingsverzameling zoeken van vergelijkingen, namelijk de verzameling alle getallen die voldoen aan de gelijkheid.

We passen deze eigenschappen ter illustratie stap voor stap toe op volgend zeer eenvoudig voorbeeld.

Voorbeeld 2.

$$2x + 4 = 0$$

Het oplossen van deze vergelijking komt erop neer dat je de vergelijking herschrijft op een zodanige manier dat je in één lid enkel de onbekende hebt staan, en in het andere lid geen onbekende meer hebt. Op die manier kan je de oplossing direct aflezen.

In bovenstaande vergelijking kunnen we van beide leden 4 aftrekken, wat neerkomt op de term 4 naar het rechterlid brengen:

$$2x + 4\mathbf{-4} = 0\mathbf{-4}$$

dit geeft

$$2x = -4$$

CC BY-NC-SA 4.0

Om nu in het linkerlid alleen nog de onbekende over te houden kunnen we linkerlid en rechterlid delen door 2, wat neerkomt op de factor 2 naar het rechterlid brengen:

$$\frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{-4}{\mathbf{2}}$$

dit geeft

$$x = -2$$

als oplossing van de vergelijking. Dus de oplossingsverzameling is $V = \{-2\}$.

We controleren nog of voor de gevonden oplossing het linkerlid inderdaad gelijk is aan het rechterlid:

het linkerlid: $2(-2) + 4 = -4 + 4 = 0$

het rechterlid: 0

Uiteraard mag je deze uitwerking korter noteren als:

$$2x + 4 = 0 \iff 2x = -4 \iff x = -2$$

Eigenschap 2 (productregel)**.**

Als het product van twee factoren nul is, dan is minstens één van beide factoren nul.

Voorbeeld 3.

$$(x-1)\sqrt{x+2} = 0$$

Uit deze gelijkheid volgt dat $x - 1 = 0$ of $\sqrt{x+2} = 0$. De oplossingen van deze vergelijking zijn dus $x = 1$ en $x = -2$.

Opmerking 3. Een gelijkheid kan naast onbekenden ook parameters bevatten:

- Als x een **onbekende** is, dan is $2x + 4 = 0$ een vergelijking waarvan we oplossingen kunnen zoeken: de gelijkheid $2x + 4 = 0$ is *waar* als en slechts als $x = -2$.
- Als a een reëel getal is en x een **onbekende**, dan is $2x + a = 0$ een vergelijking waarvan we de oplossing kunnen zoeken, die zal afhangen van de **parameter** a: de gelijkheid $2x + a = 0$ is *waar* als en slechts als $x = -\frac{a}{2}$.

Als een gelijkheid *letters* bevat, noemen we die letters **onbekenden** of **parameters** naargelang de context of de rol die de letters vervullen. Voor onbekenden worden dikwijls de letters x en y gebruikt, maar ook andere letters komen voor (bijvoorbeeld t als de onbekende de tijd voorstelt, n als het een natuurlijk getal voorstelt, of z als het een complex getal voorstelt). Voor parameters kiezen we dikwijls $a, b, c \ldots$ of $k, l, m, \ldots$ of griekse letters $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.42)