Irrationale vergelijkingen

Irrationale vergelijkingen in één onbekende zijn vergelijkingen waarbij de onbekende onder minstens één wortelteken voorkomt. We beperken ons op deze pagina tot vierkantswortels, en nemen die wortels enkel van veeltermen.

Voorbeeld 1 (Irrationale vergelijkingen)**.**

- $\sqrt{x+2} = x$
- $\sqrt{3x+2} = \sqrt{5x+3}$

Bij het oplossen van een irrationale vergelijkingen zal men op een bepaald moment beide leden van de vergelijking kwadrateren. Maar hierdoor kan een specifiek type probleem optreden: het introduceren van 'valse oplossingen'.

Voorbeeld 2. Beschouw de vergelijking

$$\sqrt{x+2} = x.$$

Een mogelijkheid om deze vergelijking op te lossen is om beide leden van de vergelijking te *kwadrateren*:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= x^2 \\ \Leftrightarrow\ x+2 &= x^2, \end{aligned}$$

en dit is een tweedegraadsvergelijking $x^2 - x - 2 = 0$, waarvan je kan berekenen dat de oplossingen -1 en 2 zijn. Mooi, daarmee hebben we de vergelijking opgelost. Of toch niet?

Als we $x = 2$ invullen in $\sqrt{x+2} = x$ vinden we $\sqrt{4} = 2$, wat uiteraard klopt. Maar als we $x = -1$ invullen vinden we $\sqrt{1} = -1$. Maar $\sqrt{1}$ is helemaal niet gelijk aan -1, en $x = -1$ is dus *geen* oplossing van $\sqrt{x+2} = x$, ook al was het wel een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking.

Hoe kunnen we dit soort problemen voorkomen? Een vergelijking met een vierkantswortel zouden we graag oplossen zoals hierboven, namelijk door de vergelijking te kwadrateren. Kwadrateren introduceert echter mogelijk valse oplossingen, die we met behulp van zogenaamde *bestaansvoorwaarden* en *kwadrateringsvoorwaarden* kunnen uitsluiten. Bij het oplossen van een vergelijking met een vierkantswortel in, moeten we rekening houden met volgende voorwaarden:

- **Bestaansvoorwaarde**: wat onder de vierkantswortel staat moet positief zijn.
- **Kwadrateringsvoorwaarde**: wat gelijk is aan een vierkantswortel moet positief zijn.

De oplossingen van irrationale vergelijkingen moeten dus voldoen aan bestaans- en kwadrateringsvoorwaarden.

Opmerking 1. Van waar komt die kwadrateringsvoorwaarde precies?

Uit $a = b$, volgt dat $a^2 = b^2$.

Maar dit mogen we niet omdraaien, uit $a^2 = b^2$ volgt niet steeds dat $a = b$:

Uit $(3)^2 = (-3)^2$ volgt immers niet dat $3 = -3$.

De vergelijkingen $a = b$ en $a^2 = b^2$ zijn dus niet equivalent, ze hebben niet dezelfde oplossingsverzameling.

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 3. Herneem vorig voorbeeld:

$$\sqrt{x+2} = x.$$

De **bestaansvoorwaarde** zegt dat wat onder de vierkantswortel staat positief moet zijn, oftewel dat $x+2 \geq 0$. Dit kunnen we herschrijven als $x \geq -2$. Beide oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking (-1 en 2) voldoen aan deze voorwaarde.
De **kwadrateringsvoorwaarde** zegt dat wat gelijk is aan een vierkantswortel positief moet zijn. In dit geval is de vierkanstwortel gelijk aan x, en dus moet $x \geq 0$. Het getal 2 is groter dan nul, en is dan ook een oplossing van de vergelijking $\sqrt{x+2} = x$: het voldoet immers aan beide voorwaarden en is een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking. Het getal -1 is echter niet groter dan 0, de kwadrateringsvoorwaarde is niet voldaan, en -1 is inderdaad geen oplossing van $\sqrt{x+2} = x$.

We overlopen de oplossingsmethode in volgende drie gevallen:

(a) De onbekende komt onder slechts één wortelteken voor, bijvoorbeeld $\sqrt{x+5} - x = -1$.

(b) De vergelijking is een gelijkheid van twee wortels, bijvoorbeeld $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3}$.

(c) De onbekende komt onder twee worteltekens voor, bijvoorbeeld $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 3$.

Voorbeeld 4.

1. Los op naar x: $\sqrt{x+5} - x = -1$

Uitwerking:

We kunnen de **wortel isoleren** in één van beide leden: $\sqrt{x+5} = x - 1$

Bestaansvoorwaarde: $x+5 \geq 0$, dus $x \geq -5$

Kwadrateringvoorwaarde: $x - 1 \geq 0$, dus $x \geq 1$

We **kwadrateren** beide leden en lossen de bekomen vergelijking op:

$$x+5 = (x-1)^2 \iff x+5 = x^2 - 2x + 1 \iff x^2 - 3x - 4 = 0$$

De oplossingen van $x^2 - 3x - 4 = 0$ zijn 4 en -1. Enkel 4 voldoet aan de bestaans- en kwadrateringsvoorwaarde en is bijgevolg de enige oplossing van de gegeven vergelijking.

2. Los op naar x: $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3}$

Uitwerking:

Bestaansvoorwaarde: In dit geval hebben we twee bestaansvoorwaarden namelijk $2x+1 \geq 0$, dus $x \geq -\frac{1}{2}$ en $x+3 \geq 0$, dus $x \geq -3$. Beide voorwaarden zijn voldaan indien $x \geq -\frac{1}{2}$.

Kwadrateringvoorwaarde: Omdat beide leden positief zijn hebben we geen kwadrateringsvoorwaarde nodig.

We **kwadrateren** beide leden en lossen de bekomen vergelijking op:

$$2x+1 = x+3 \iff x = 2$$

De oplossing 2 voldoet aan de bestaansvoorwaarden en is bijgevolg de enige oplossing van de gegeven vergelijking.

3. Los op naar x: $\sqrt{x} + \sqrt{x-1} = 3$

Uitwerking:

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.40)

Irrationale vergelijkingen

Bestaansvoorwaarden: $x \geq 0$ en $x - 1 \geq 0$. Beide voorwaarden zijn voldaan indien $x \geq 1$.

Kwadrateringvoorwaarde: Omdat beide leden positief zijn hebben we geen kwadrateringsvoorwaarde nodig.

We **kwadrateren** beide leden en krijgen zo een irrationale vergelijking met **slechts één wortelteken**:

$$x + x - 1 + 2\sqrt{x(x-1)} = 9$$

We **isoleren** het wortelteken in het linkerlid:

$$2\sqrt{x(x-1)} = 9 - 2x + 1 \iff \sqrt{x(x-1)} = 5 - x$$

Deze vergelijking heeft als kwadrateringsvoorwaarde $5 - x \geq 0$. We **kwadrateren** beide leden en lossen de bekomen vergelijking op:

$$x(x-1) = 25 - 10x + x^2 \iff x^2 - x = 25 - 10x + x^2 \iff 9x = 25$$

De oplossing $x = \frac{25}{9}$ voldoet aan de bestaans- en kwadrateringsvoorwaarden en is bijgevolg de enige oplossing van de gegeven vergelijking.

Oefening 1. Los op naar x: $1 + \sqrt{x+1} = x$

De kwadrateringsvoorwaarde is in het leven geroepen voor het oplossen van vergelijkingen met vierkantswortels, maar bestaansvoorwaarden komen in nog veel andere situaties voor.

Opmerking 2 (Andere voorbeelden van bestaansvoorwaarden)**.**

Bestaansvoorwaarden treden ook op in andere situaties, bijvoorbeeld:

- De noemer van een breuk mag niet nul zijn.
- Het argument van de logaritme moet strikt positief zijn: de uitdrukking $\log x$ heeft enkel zin als $x > 0$.
- Het argument van de tangens mag niet van de vorm $\frac{\pi}{2} + k\pi$ zijn met $k \in \mathbb{Z}$. Dus de uitdrukking $\tan x$ is enkel zinvol voor $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Opmerking 3 (Vergelijkingen met een derdemachtswortel)**.**

Bij vergelijkingen met derdemachtswortels moet je geen **bestaansvoorwaarde** opstellen, je kan immers ook van een negatief getal de derde machtswortel nemen. Evenmin moet je het analoge van de **kwadrateringsvoorwaarde** opstellen:

Uit $a = b$ volgt $a^3 = b^3$ en uit $a^3 = b^3$ volgt $a = b$. De vergelijkingen $a = b$ en $a^3 = b^3$ zijn equivalent, ze hebben dezelfde oplossingsverzameling.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.40)