Ontbinden in factoren

Om veeltermen te ontbinden in factoren bestuderen we eerst het delen van een veelterm door een veelterm van de *eerste graad*, dus een deler van de vorm $x-a$, met $a \in \mathbb{R}$.

Eigenschap 1 (Rest bij deling door $x-a$)**.**

Bij deling van een veelterm $p(x)$ door $x-a$ is de rest gelijk aan de getalwaarde $p(a)$ van $p(x)$ in a.

Bewijs. Uit de formule van de Euclidische deling volgt dat $p(x) = (x-a)q(x)+r(x)$ met $q(x)$ het quotiënt en $r(x)$ de rest met $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(x-a) = 1$. De rest $r(x)$ is dus een veelterm van graad nul, een getal. Noteer de rest dus als $r \in \mathbb{R}$, en bereken de getalwaarde van $p(x)$ in a: $p(a) = (a-a)q(a)+r = 0+r = r$, en dus $p(a) = r$. De rest is dus inderdaad gelijk aan de getalwaarde van $p(x)$ in a.

Voorbeeld 1.

De rest bij de deling van $p(x) = 2x^3 - 8$ door $x+2$ is $p(-2) = 2\cdot(-2)^3 - 8 = -16-8 = -24$.

Eigenschap 2 (Deelbaarheidscriterium)**.**

Een veelterm $p(x)$ is deelbaar door $x-a$ als en slechts als $p(a) = 0$.

Bewijs. $p(x)$ is deelbaar door $x-a$ als de rest van de deling van $p(x)$ door $x-a$ gelijk is aan nul. Uit vorige eigenschap volgt dat de rest van de deling van $p(x)$ door $x-a$ gelijk is aan $p(a)$. Dus de rest is nul als en slechts als $p(a) = 0$, en dat is precies het te bewijzen.

Opmerking 1. Als we een nulpunt a kennen van een veelterm $p(x)$ (met $\text{gr}(p(x)) > 1$), dan weten we wegens vorige eigenschap dat $p(x)$ deelbaar is door $x-a$. Dit wil zeggen dat er een unieke veelterm $q(x)$ bestaat zodat $p(x) = q(x)(x-a)$. We kunnen $q(x)$ vinden als quotiënt van de deling van $p(x)$ door $x-a$. Als we $p(x)$ schrijven als $p(x) = q(x)(x-a)$ hebben we $p(x)$ ontbonden in de factoren $q(x)$ en $x-a$. Als $\text{gr}(q(x)) > 1$ en $q(x)$ heeft minstens 1 nulpunt, dan kan $q(x)$ nog verder ontbonden worden in factoren. Om veeltermen te ontbinden in factoren moeten we dus zoeken naar nulpunten.

Voorbeeld 2.

Voor de veelterm $p(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2$, kunnen we berekenen dat $p(2) = 0$.

We kunnen $p(x)$ dus schrijven als $p(x) = q(x)(x-2)$, waarbij we $q(x)$ kunnen vinden als quotiënt van de deling van $p(x)$ door $x-2$. Na het uitvoeren van de Euclidische deling vinden we dat $q(x) = 2x^3+x+1$.

Hoe vind je een nulpunt van een veelterm? In het algemeen zal je hier een benaderingmethode voor moeten gebruiken. Voor het speciale maar toch veel voorkomend geval van veeltermen met *gehele* coefficiënten bestaat er wel een procedure:

Eigenschap 3.

Als een veelterm $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$, *met gehele coëfficiënten* a_i, deelbaar is door $x-a$, met a een *geheel getal*, **dan** is a *een gehele deler van de constante term* a_0 van deze veelterm $p(x)$.

Bewijs. Omdat $p(x)$ deelbaar is door $x-a$ volgt dat $p(a) = 0$. Welnu, a invullen in $p(x) = 0$ en de constante term naar het rechterlid brengen levert dan

$$a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots a_1 a = -a_0$$

waarbij in het linkerlid een factor a kan worden afgezonderd. Dat betekent precies dat a een deler is van

CC BY-NC-SA 4.0

$-a_0$, en dus ook van a_0.

Opmerking 2.

- We kunnen bovenstaande eigenschap ook formuleren als:

  Als a een geheel nulpunt is van een veelterm $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$, *met gehele coëfficiënten* a_i, **dan** is a *een gehele deler van de constante term* a_0 van deze veelterm $p(x)$.

- De eigenschap zegt **niet** dat elke gehele deler van de constante term a_0 van een veelterm een nulpunt is van deze veelterm, maar **wel** dat *alle mogelijke gehele nulpunten* te vinden zijn in de (eindige) verzameling van gehele delers van de constante term a_0.

Voorbeeld 3. Bepaal alle gehele a zodat $p(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ deelbaar is door $x - a$.

We moeten dus alle gehele nulpunten van $p(x)$ bepalen. Uit vorige eigenschap volgt dat enkel gehele delers van de constante term in aanmerking komen, dus $\pm 1, \pm 3, \pm 9$:

$$\begin{array}{llll}
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x-1) & \text{omdat} \quad p(\ 1) = 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x+1) & \text{omdat} \quad p(-1) = 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x-3) & \text{omdat} \quad p(\ 3) = 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x+3) & \text{omdat} \quad p(-3) = 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x-9) & \text{omdat} \quad p(\ 9) \neq 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x+9) & \text{omdat} \quad p(-9) \neq 0.
\end{array}$$

Voorbeeld 4. Bepaal alle gehele a zodat $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ deelbaar is door $x - a$.

We moeten dus alle gehele nulpunten van $p(x)$ bepalen. Uit vorige eigenschap volgt dat enkel delers van de constante term in aanmerking komen, dus ± 1 en ± 2:

$$\begin{array}{llll}
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x-1) & \text{omdat} \quad p(\ 1) \neq 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x+1) & \text{omdat} \quad p(-1) \neq 0 \\
p(x) & \text{is deelbaar door} & (x-2) & \text{omdat} \quad p(\ 2) = 0 \\
p(x) & \text{is niet deelbaar door} & (x+2) & \text{omdat} \quad p(-2) \neq 0.
\end{array}$$

We vinden enkel dat $p(x)$ deelbaar is door $x - 2$. Het quotiënt van de deling van $x^3 - 2x^2 + x - 2$ door $x - 2$ kunnen we bepalen met het algoritme van de Euclidische deling.

Algoritme 1 (Delen door $x - a$ met a een geheel getal)**.**

Voor een veelterm $p(x)$ met *gehele* coëfficiënten kan je alle a (met $a \in \mathbb{Z}$) waarvoor $p(x)$ deelbaar is door $x - a$ en de bijhorende quotiënten als volgt bepalen:

(a) Bepaal *de delers van de constante term* van de veelterm.

(b) Bepaal *de getalwaarde van de veelterm* voor deze delers.

(c) Als voor een deler a deze getalwaarde 0 is, dan is $p(x)$ deelbaar door $x - a$.

(d) Bepaal het quotiënt via de Euclidische deling of via het rekenschema van Horner.

Merk op: deze eigenschap geldt ENKEL voor *gehele* getallen a en veeltermen met *gehele* coëfficiënten.

Stel dat een veelterm $p(x)$ deelbaar is door $x - a$. Dan bestaat er een unieke veelterm $q(x)$ zodat $p(x) =$

CC BY-NC-SA 4.0

$q(x)(x-a)$. De veelterm $p(x)$ is dan ontbonden in de factoren $q(x)$ en $x-a$. Als de veelterm $q(x)$ minstens één nulpunt heeft, kan $q(x)$ verder ontbonden worden in factoren. Wanneer $q(x)$ bijvoorbeeld een tweedegraadsveelterm is met negatieve discriminant, dan kan $q(x)$ niet verder ontbonden worden in factoren. We illustreren het ontbinden in factoren met een voorbeeld van een derdegraadsveelterm:

Voorbeeld 5. Ontbind de veelterm $p(x) = x^3 - 7x - 6$ in factoren van zo laag mogelijke graad.

Uitwerking: We zoeken eerst een nulpunt van de gegeven veelterm. We gaan na of $p(x)$ een geheel nulpunt a heeft. Hiervoor moet a een deler zijn van de constante term. De mogelijkheden zijn dus $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

We berekenen $p(1) = 1 - 7 - 6 \neq 0, p(2) = 8 - 14 - 6 \neq 0$, maar $p(3) = 27 - 21 - 6 = 0$.

Er bestaat dus zeker een veelterm $q(x)$ zodat $x^3 - 7x - 6 = (x-3)q(x)$.

Deze veelterm $q(x)$ kan je berekenen met de Euclidische Deling:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 1x^3 & + & 0x^2 & - & 7x & - & 6 & x-3 \\
- & 1x^3 & - & 3x^2 & & & & & \hline
 & & & 3x^2 & - & 7x & - & 6 & x^2+3x+2 \\
 & & - & 3x^2 & - & 9x & & & \\
 & & & & & 2x & - & 6 & \\
 & & & & - & 2x & - & 6 & \\
 & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Hieruit volgt dat $x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x^2+3x+2)$. Nu gaan we na of de factor x^2+3x+2 nog verder kan worden ontbonden. De discriminant in positief, en de nulpunten zijn: $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = -2, -1$.

We vinden de ontbinding $x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x+1)(x+2)$.

Merk op: in dit geval had je ook voor de overige delers van de constante term 6 de getalwaarde van $p(x)$ kunnen berekenen, en vinden dat $p(-1) = -1 + 7 - 6 = 0$ en ook $p(-2) = -8 + 14 - 6 = 0$. De drie nulpunten van $p(x)$ zijn dus $3, -1$ en -2, en daaruit volgt ook dadelijk de ontbinding $x^3 - 7x - 6 = (x-3)(x+1)(x+2)$. Dat werkt hier omdat *alle* nulpunten geheel zijn, de methode met de discriminant werkt ook voor niet-gehele nulpunten.

Opmerking 3.

Een veelterm van graad 3 heeft altijd minstens één reëel nulpunt. Als dit nulpunt geen geheel getal is, dan kunnen we dit niet vinden met de technieken hierboven. Als dit nulpunt wel een geheel nulpunt is, dan kunnen we dit vinden onder de gehele delers van de constante term. In dat geval kunnen we de veelterm ontbinden in ofwel 3 factoren van de eerste graad, ofwel in een factor van de eerste graad en een factor van de tweede graad met negatieve discriminant.

CC BY-NC-SA 4.0