Veeltermen

Veronderstelde voorkennis: eenvoudige stelsels oplossen

Naar analogie met eerste- en tweedegraadsveeltermen definiëren we nu n-de graadsveeltermen.

Definitie 1 (Veelterm)**.** Zij $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ met $a_n \neq 0$.

- Een n-**de graadsveelterm in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

  De $a_i x^i$ zijn **termen** van de veelterm, de a_i zijn **coëfficiënten**, en n is de **graad**.
  Men noteert de graad van $p(x)$ met $\text{gr}(p(x)) \overset{\text{def}}{=} n$.

- Aan dergelijke veelterm $p(x)$ is volgende **veeltermfunctie** p geassocieerd:

$$p : x \mapsto p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

- Een n-**de graadsvergelijking in één onbekende** x is een uitdrukking van de vorm

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

- De **getalwaarde** van $p(x)$ in $\alpha \in \mathbb{R}$ is het getal $p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0$.

Voorbeeld 1.

- $2x + 3$ is een eerstegraadsveelterm. De getalwaarde van $2x + 3$ in 3 is 9.
- $5x^2 + 7x + 1$ is een tweedegraadsveelterm.
- $x^{2026} - 1$ is een veelterm van graad 2026.
- 7 is een veelterm van graad 0.
- $ax + b$ met $a \neq 0$ kan gezien worden als een eerstegraadsveelterm, met 'parameters' of 'constanten' a en b in plaats van concrete getallen.
- $\sqrt{\pi} x^5 - e^y + \alpha^2$ kan gezien worden als een veelterm in x van de vijfde graad, met parameters y en α.
- $x^2 - e^x$ is *geen* veelterm in x wegens de exponentiële functie.
- Je kan ook veeltermen in andere letters tegenkomen: $5t^2 + 3t$ en $t + \cos\alpha$ zijn veeltermen in t, en $e^{2x} u^2 - 1$ is een veelterm in u (maar niet in x).

Opmerking 1.

- Volgens deze definitie is een veelterm dus een formele *uitdrukking* (of een *formule*: een reeks letters, cijfers en enkele symbolen zoals + en −). We *rekenen* met dergelijke uitdrukkingen volgens voor de hand liggende rekenregels zoals:

$$2x + 3x = 5x$$

$$2 \cdot (5x) = 10x$$

$$(2x) \cdot (5x) = 10x^2$$

CC BY-NC-SA 4.0

Veeltermen

- Veeltermen zijn de functies die met enkel de elementaire bewerkingen optellen en vermenigvuldigen kunnen worden berekend. Je zal later zien dat veel functies goed kunnen worden *benaderd* door veeltermen.
- Een veelterm met één term noemen we een *term*, *éénterm* of *monoom*. Een veelterm met twee termen is een *tweeterm* of *binoom*. En één met *veel termen* is dus een *veel*term of *polynoom*.
- De getalwaarde van een veelterm in 0 is precies de constante term a_0 van de veelterm:

$$p(0) = a_n 0^n + a_{n-1} 0^{n-1} + \ldots + a_2 0^2 + a_1 0 + a_0 = a_0$$

- Met het sommatieteken kunnen we een veelterm ook schrijven als

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Oefening 1. Voor een veelterm $p(x)$ van graad 2 geldt: de hoogstegraadscoëfficiënt is 2, $p(1) = 3$ en $p(-1) = -3$. Wat is de constante term van $p(x)$? ... ...

Definitie 2 (Nulpunten van veeltermen)**.**

Een **nulpunt** (ook **nulwaarde** of **wortel**) van een veelterm $p(x)$ is een reëel getal a waarvoor $p(a) = 0$.

Oefening 2. Voor een veelterm $p(x)$ van graad 2 geldt: de constante term is 2, $x = 1$ is een nulpunt en $p(-1) = 6$. Wat is $p(2)$?

$p(2) = \ldots \ldots$

Het zoeken van nulpunten is precies hetzelfde als het oplossen van vergelijkingen:

Eigenschap 1 (Verband tussen nulpunten van veeltermen en oplossingen van vergelijkingen)**.**

De *nulpunten* van een veelterm $p(x)$ zijn de *oplossingen* van de *vergelijking* $p(x) = 0$.

Voorbeeld 2 (Nulpunten van eenvoudige veeltermen)**.**

1. Het getal 3 is een nulpunt van $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ omdat $p(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$.
2. Het getal 3 is een oplossing van de vergelijking $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.
3. De veelterm $x - 5$ heeft 5 als nulpunt(en).
4. De veelterm $x^2 - 4$ heeft -2 en 2 als nulpunt(en).
5. De veelterm $x^2 + 4$ heeft geen enkel reëel getal als nulpunt(en).

Er zijn relatief eenvoudige procedures om nulpunten te vinden van eerstegraadsveeltermen en tweedegraadsveeltermen. Er bestaan ook (ingewikkeldere) algoritmes voor het vinden van de nulpunten van veeltermen van de derde en vierde graad. Evariste Galois heeft in het begin van de negentiende eeuw aangetoond dat er voor vijfdegraadsveeltermen *geen* algemene procedure *kan* bestaan die alleen gebruik maakt van zogenaamde algebraïsche bewerkingen: optellen/aftrekken, vermenigvuldigen/delen en machtsverheffen/worteltrekken.

Een veelterm $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ is per definitie een *som* van termen (vandaar de naam *veel-term*). Het is dikwijls handig om dergelijke som van termen ook te kunnen schrijven als een *product* van factoren. De

CC BY-NC-SA 4.0

uitdrukking 'ontbinden in factoren' betekent precies het schrijven van dergelijke som als een product:

Definitie 3 (Ontbinden in factoren)**.**

Een veelterm $d(x)$ is een **factor** van een veelterm $p(x)$ als we $p(x)$ kunnen schrijven als een product van $d(x)$ met een andere veelterm.

Dus: $d(x)$ is een *factor* van $p(x)$ als $p(x) = d(x) \cdot q(x)$ voor een zekere veelterm $q(x)$.

Een factor van de nulde graad (dus een getal) is een **triviale factor**. We beschouwen die niet als 'echte' factor.

Een veelterm $p(x)$ **ontbinden in factoren** betekent hem schrijven als een product van zo veel mogelijk niet-triviale factoren.

Voorbeeld 3 (Ontbinden in factoren)**.**

1. $x + 1$ is een factor van $x^2 - 1$ want $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$.

2. De veelterm $x^2 - 1$ kan ontbonden worden in de factoren $x+1$ en $x-1$ want $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Tot slot definiëren we nog wanneer twee veeltermen van dezelfde graad gelijk zijn aan elkaar. Veeltermen die niet dezelfde graad hebben kunnen niet gelijk zijn aan elkaar.

Definitie 4 (Gelijkheid van veeltermen)**.**

Twee veeltermen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

en

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

van dezelfde graad n zijn **gelijk** als de overeenkomstige coëfficiënten gelijk zijn:

$$a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

CC BY-NC-SA 4.0