Veeltermbreuken

We bekijken nu breuken van veeltermen.

Definitie 1. Een **veeltermbreuk** in één onbekende x is een uitdrukking van de vorm $\frac{p(x)}{q(x)}$ met $p(x), q(x)$ veeltermen en $q(x)$ niet de nulveelterm.

Opmerking 1. Als we een veeltermbreuk zien als een functie $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$, dan wordt dit een rationale functie genoemd. Een rationale functie is enkel gedefinieerd voor waarden van x waarvoor de noemer $q(x)$ niet nul is. Op deze pagina zien we veeltermbreuken als formele uitdrukkingen waarmee we kunnen rekenen, we komen later terug op rationale functies en hun domein.

Voorbeeld 1.

1. $\frac{x^2+1}{x}$ is een veeltermbreuk.
2. $\frac{2}{x^3+1}$ is een veeltermbreuk.
3. $\frac{2x^3+7x}{3} = \frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{3}x$ is zowel een veeltermbreuk, als een veelterm.

Voor veeltermbreuken gelden uiteraard dezelfde rekenregels als voor breuken in het algemeen.

Voordat je begint te rekenen met veeltermbreuken is het handig om deze veeltermbreuken eerst te vereenvoudigen. Dit kan je doen door de veeltermen in teller en noemer te ontbinden in factoren en dan gemeenschappelijke factoren weg te delen.

Voorbeeld 2. Vereenvoudig.

1. $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2.$
2. $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6} = \frac{x-3}{x+2}.$

Uitwerking: De teller kunnen we ontbinden in factoren als $x^2-9 = (x-3)(x+3)$. Om de noemer te ontbinden in factoren berekenen we de discriminant: $D = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1$, dus $x_1 = \frac{-5-\sqrt{1}}{2} = -3$ en $x_2 = \frac{-5+\sqrt{1}}{2} = -2$. Dit betekent dat $x^2+5x+6 = (x+3)(x+2)$ en dus vinden we

$$\frac{x^2-9}{x^2+5x+6} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}$$

Veeltermbreuken met gelijke noemer kan je optellen door de tellers op te tellen.

Voorbeeld 3. Schrijf als één breuk door de breuken op te tellen.

1. $\frac{x^2}{x+1} + \frac{-x+2}{x+1} = \frac{x^2-x+2}{x+1}.$

Bij het optellen van veeltermbreuken met verschillende noemer kan je het volgende stappenplan volgen.

(a) Vereenvoudig elke breuk afzonderlijk.

(b) Bepaal het kleinste gemene veelvoud van de noemers.

CC BY-NC-SA 4.0

(c) Breng alle breuken op gelijke noemer.

(d) Tel de breuken met gelijke noemers op.

Voorbeeld 4. Schrijf als één breuk door de breuken op te tellen.

1. $\frac{2}{x} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{3x^2-2}{x(x^2-1)}$

Uitwerking: We kunnen de breuken niet vereenvoudigen. Het kleinste gemene veelvoud van de noemers is $x(x^2-1)$. We brengen eerst de breuken op gelijke noemer en tellen daarna op.

$$\frac{2}{x} + \frac{x}{x^2-1} = \frac{2(x^2-1)+x^2}{x(x^2-1)} = \frac{3x^2-2}{x(x^2-1)}$$

2. $\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} = \frac{5x+2}{x(x+1)}$

Uitwerking: We kunnen de breuken niet vereenvoudigen. Het kleinste gemene veelvoud van de noemers is $x(x+1)$. We brengen eerst de breuken op gelijke noemer en tellen daarna op.

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} = \frac{2(x+1)+3x}{x(x+1)} = \frac{5x+2}{x(x+1)}$$

3. $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^3+x^2+2x}{(x-1)(x+1)}$

Uitwerking: We kunnen de breuken niet vereenvoudigen. Het kleinste gemene veelvoud van de noemers is $(x-1)(x+1)$. We brengen eerst de breuken op gelijke noemer en tellen daarna op.

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{x^2}{x-1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{x^2}{x-1} = \frac{2x+x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^3+x^2+2x}{(x-1)(x+1)}$$

4. $\frac{x^2+4x+4}{x+2} + \frac{3}{x-1} = \frac{x^2+x+1}{x-1}$

Uitwerking: We kunnen de eerste breuk vereenvoudigen, immers $x^2+4x+4 = (x+2)^2$, dus

$$\frac{x^2+4x+4}{x+2} + \frac{3}{x-1} = \frac{(x+2)^2}{x+2} + \frac{3}{x-1} = (x+2) + \frac{3}{x-1} = \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} = \frac{x^2+x-2+3}{x-1} = \frac{x^2+x+1}{x-1}$$

5. $\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x^2(x+1)}$

Uitwerking: Het kleinste gemene veelvoud van de noemers is $x^2(x+1)$. We brengen eerst de breuken op gelijke noemer en tellen daarna op. Dit geeft

$$\begin{aligned}\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x(x+1)} &= \frac{A(x+1)}{x^2(x+1)} + \frac{Bx}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{A(x+1)+Bx}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{(A+B)x+A}{x^2(x+1)}\end{aligned}$$

Oefening 1. Schrijf als één breuk door de breuken op te tellen.

1. $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x^2-1} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2. $\dfrac{x+1}{x+3} - \dfrac{2}{x^2+6x+9} = \ldots\ldots$
3. $\dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x(x-3)} - \dfrac{x}{2(x+3)} = \ldots\ldots$
4. $\dfrac{A}{4(x-2)} + \dfrac{B}{2(x-2)^2} + \dfrac{C}{2(x+2)} = \ldots\ldots$

Ook vermenigvuldigen en delen van veeltermbreuken gebeurt volgens de rekenregels van breuken.

Voorbeeld 5. Bereken en vereenvoudig indien mogelijk.

1. $\dfrac{x+2}{3} \cdot \dfrac{x^3}{x^3+2x^2+x+2} = \dfrac{(x+2)x^3}{3(x^3+2x^2+x+2)} = \dfrac{(x+2)x^3}{3(x^2+1)(x+2)} = \dfrac{x^3}{3(x^2+1)}$
2. $\dfrac{\frac{x+2}{3}}{\frac{x^3}{x^2+1}} = \dfrac{x+2}{3} \cdot \dfrac{x^2+1}{x^3} = \dfrac{(x+2)(x^2+1)}{3x^3}.$

Omdat we in de meeste toepassingen de veeltermbreuken ontbonden in factoren nodig hebben, hebben we het in het resultaat de haakjes niet uitgewerkt.

CC BY-NC-SA 4.0