Het schema van Horner

In principe is het eenvoudig om de getalwaarde $p(7)$ van de veelterm $p(x) = x^9 + x^5 + 1$ te berekenen door $p(7) = 7^9 + 7^5 + 1$ uit te rekenen. Je moet daarvoor wel hoge machten berekenen.

Er bestaat een algoritme dat de berekening van $p(a)$ voor willekeurige veeltermen $p(x)$ en getallen a reduceert tot eenvoudigere vermenigvuldigingen en optellingen. Het algoritme geeft ook het quotiënt van de deling van $p(x)$ door $(x - a)$. Dat algoritme is gekend onder de naam **Rekenschema van Horner**. Je kan dit gebruiken als alternatief voor de Euclidische deling. Het is sneller, maar het is minder duidelijk wat er juist gebeurt. Als je het reeds kent kan je het hier opfrissen, anders gebruik je gewoon de Euclidische deling.

We leggen de regel van Horner hier uit aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 1. Deel $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ door $x - 2$.

Het startschema ziet eruit als volgt

	2	−4	5	−7
2				

waarbij de coefficiënten van $p(x)$ in de bovenste rij staan, en het getal 2 links van het schema. We laten nu de eerste coëfficiënt (dus 2) zakken, vermenigvuldigen die met de 2 links, en schrijven het resultaat op de tweede rij, onder de tweede coëfficiënt (dus onder -4):

	2	−4	5	−7
2		4		
	2			

We tellen de -4 en 4 bij elkaar op, schrijven het resultaat $-4 + 4 = 0$ onderaan en vermenigvuldigen 0 met de linkse 2 en schrijven het resultaat 0 weer op de tweede rij, onder de 5, en tellen dan 0 op bij die 5:

	2	−4	5	−7
2		4	0	
	2	0	5	

We vermenigvuldigen opnieuw de onderste 5 met de linkse 2, schrijven het product 10 onder de -7, tellen op en krijgen rechts onderaan het getal 3:

	2	−4	5	−7
2		4	0	10
	2	0	5	3

Het schema is nu volledig, en men kan bewijzen dat het meest rechtse getal onderaan altijd de getalwaarde van de veelterm is in het punt 2, en dat de overige getallen in de onderste rij steeds de coëfficiënten zijn van het quotiënt van $p(x)$ gedeeld door $x - 2$.

Het quotiënt is dus $2x^2 + 0x + 5$ en de rest is 3, of

$$2x^3 - 4x^2 + 5x - 7 = (x - 2)(2x^2 + 5) + 3$$

Voorbeeld 2. Als voorbeeld op de Euclidische deling hebben we $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ gedeeld door $x - 3$. We kunnen deze deling ook uitvoeren met het rekenschema van Horner:

CC BY-NC-SA 4.0

Het schema van Horner

	2	1	−5	2
3		6	21	48
	2	7	16	50

Dus: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (2x^2 + 7x + 16)(x - 3) + 50$.

Merk op dat de rest 50 dus ook de getalwaarde van het deeltal voorstelt voor $x = 3$, want

$$p(3) = 2 \cdot 3^3 + 3^2 - 5 \cdot 3 + 2 = 50$$

Voorbeeld 3. Deel $p(x) = x^4 - 15x^2 - 10x + 24$ door $x - 1$.

	1	0	−15	−10	24
1		1	1	−14	−24
	1	1	−14	−24	0

en dus $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = (x - 1)(x^3 + x^2 - 14x - 24)$.

Voorbeeld 4. Ontbind $p(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ in factoren.

Omdat $p(-3) = 0$ is $x^4 - 10x^2 + 9$ deelbaar door $x - (-3) = x + 3$.

We berekenen het quotiënt met het rekenschema van Horner.

	1	0	−10	0	9
−3		−3	9	3	−9
	1	−3	−1	3	0

Het quotiënt is dus $x^3 - 3x^2 - x + 3$ en de rest is 0, dus $x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 3)(x^3 - 3x^2 - x + 3)$.

We zoeken nu verder naar nulpunten van $x^3 - 3x^2 - x + 3$, en vinden (na nog wat rekenwerk) dat $x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$.

Merk op: in dit geval kan de veelterm eenvoudiger worden ontbonden door alle nulpunten te zoeken.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.26)