Euclidisch deling van veeltermen

We bekijken eerst de deling met rest voor natuurlijke getallen.

Uitweiding 1 (Overzicht van de deling bij de natuurlijke getallen)**.**

Laat ons eerst de welbekende deling van de natuurlijke getallen van naderbij bekijken.

Vraag: Hoeveel is 13 gedeeld door 4?

Antwoord: Dat hangt af van de context.

Inderdaad, als het gaat om het (ver)delen van 13 *koekjes* onder 4 *hongerige kinderen*, is het meest zinvolle antwoord dat elk kind eerst 3 koekjes krijgt, en dat het overblijvende koekje netjes in vier stukjes wordt verdeeld, waarna elk kind nog een stukje krijgt.
Resultaat in wiskundige symbolen: $13 : 4 = 3 + \frac{1}{4} = 3,25$.

Opmerking: soms schrijft men ook $13 : 4 = 3\frac{1}{4}$, maar in de wiskunde vermijden we dat want het kan verwarring veroorzaken met $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ als we het punt voor vermenigvuldiging weglaten. In de wiskunde vermijden we trouwens meestal ook het symbool ':' voor gedeeld door, want we gebruiken in plaats van $3 : 4$ liever een breuk $\frac{3}{4}$, een schuine streep $3/4$ of zelfs een negatieve macht $3 \cdot 4^{-1}$.

Maar, als het gaat over het (ver)delen van 13 *knikkers* onder 4 *zeurende kinderen*, voldoet die oplossing niet. Dan is het meest zinvolle antwoord dat elke kind zeker drie knikkers krijgt, en dat het in de praktijk allicht niet zinvol is om de overblijvende knikker in vier te kappen. De wiskundige oplossing is dat $13 : 4$ in dit geval gelijk is aan 3 met rest 1. We kunnen dat schrijven als $13 = 3 \cdot 4 + 1$. Merk op dat een korte, correcte notatie voor deling met rest niet voor de hand ligt, want er geldt bijvoorbeeld ook dat $13 = 2 \cdot 4 + 5$, terwijl 5 toch niet de rest is van de deling van 13 door 4.

Een gelijkaardig probleem kan gesteld worden in de context van veeltermen. Net zoals men getallen kan delen door elkaar, kan men ook proberen twee veeltermen te delen door elkaar.

Voorbeeld 1 (Delen-met-rest voor natuurlijke getallen.)**.**

Zeggen dat de deling van 13 door 4 gelijk is aan 3 met rest 1, betekent dat

$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

omdat 4 hoogstens 3 keer in 13 kan, en er blijft dan nog 1 over.

Op dezelfde manier betekent 20 delen door 3 dat

$$20 = 6 \cdot 3 + 2$$

of met symbolen: als we *deeltal* D delen door *deler* d, krijgen we *quotiënt* q en *rest* r als volgende formule geldt:

$$D = q \cdot d + r \text{ met } r < d.$$

Daarbij is het erg belangrijk dat $r < d$. Als dat niet het geval is, heb je nog niet ver genoeg gedeeld, want je kan dan de rest r nog verder delen door d.

Men kan ook voor veeltermen volgende eigenschap bewijzen:

Eigenschap 1 (Euclidische deling)**.**

Als $p(x)$ en $d(x)$ twee willekeurige veeltermen zijn,

dan bestaan er unieke veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ zodat volgende gelijkheid geldt

$$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x) \quad \text{met } \mathrm{gr}(r(x)) < \mathrm{gr}(d(x))$$

CC BY-NC-SA 4.0

Euclidisch deling van veeltermen

Opmerking 1.

Let op de strikte ongelijkheid $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x))$. Dus $\text{gr}(r(x))$ mag niet gelijk zijn aan $\text{gr}(d(x))$.

Voorbeeld 2 (Voorbeelden deling van veeltermen)**.**

$p(x) = x^2 + 2x$	en	$d(x) = x + 2$,	dan is $q(x) = x$ en $r(x) = 0$
$p(x) = x^2 + x$	en	$d(x) = x^2$,	dan is $q(x) = 1$ en $r(x) = x$
$p(x) = x + 1$	en	$d(x) = x$,	dan is $q(x) = 1$ en $r(x) = 1$
$p(x) = x$	en	$d(x) = x^2$,	dan is $q(x) = 0$ en $r(x) = x$

Definitie 1 (Euclidische deling van veeltermen)**.**

Als $p(x)$ en $d(x)$ twee willekeurige veeltermen zijn, en $q(x)$ en $r(x)$ zijn de bijhorende unieke veeltermen zodat $p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x)$, waarbij $\text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x))$,

dan noemen we $p(x)$ het **deeltal**, $d(x)$ de **deler**, $q(x)$ het **quotiënt** en $r(x)$ de **rest**.

Als $r(x) = 0$ zegt men dat de veelterm $p(x)$ **deelbaar is door** de veelterm $d(x)$.

Opmerking 2.

Als de veelterm $p(x)$ **deelbaar is door** de veelterm $d(x)$ wil dit dus zeggen dat er een unieke veelterm $q(x)$ bestaat zodat $p(x) = q(x) \cdot d(x)$.

Voorbeeld 3 (Deelbaarheid van veeltermen)**.**

$2x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2$ is deelbaar door $2x^3 + x + 1$ want $2x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2 = (x - 2)(2x^3 + x + 1)$. (Reken na door de haakjes van het rechterlid uit te werken.) We kunnen eveneens zeggen dat $2x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2$ deelbaar is door $x - 2$.

We bestuderen nu het algoritme dat voor een gegeven veelterm $p(x)$ en een gegeven deler $d(x)$ het quotiënt en de rest berekent. Het algoritme levert dus twee veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ op zodat

$$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x) \quad \text{met} \quad \text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x))$$

net zoals de bekende staartdeling voor een gegeven natuurlijk getal D en een deler d twee nieuwe getallen q en r oplevert zodat

$$D = q \cdot d + r \quad \text{met } r < d.$$

Voorbeeld 4 (Algoritme Euclidische deling stap per stap uitgelegd)**.**

Bereken het quotiënt en de rest van de deling van de veelterm $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ door de veelterm $x - 3$.

Volgens de definitie hierboven moeten we dus op zoek naar de veeltermen $q(x)$ en $r(x)$ die horen bij $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ (het deeltal) en $d(x) = x - 3$ (de deler).

We gebruiken een aangepaste vorm van de staartdeling van natuurlijke getallen. Bestudeer het schema samen met de uitleg.

CC BY-NC-SA 4.0

Euclidisch deling van veeltermen

$$
\begin{array}{rrcrcrcl|l}
 & 2x^3 & + & x^2 & - & 5x & + & 2 & x-3 \\
(b)- & 2x^3 & - & 6x^2 & & & & & \hline \\
 & & & 7x^2 & - & 5x & + & 2 & 2x^2+7x+16 \\
 & & (d)- & 7x^2 & - & 21x & & & (a)\quad (c)\quad (e) \\
 & & & & & 16x & + & 2 & \\
 & & & & (f)- & 16x & - & 48 & \\
 & & & & & & & 50 & \\
 & & & & & & & (g) &
\end{array}
$$

(a) Deel de hoogstegraadsterm van $p(x)$ door de hoogstegraadsterm van $d(x)$. Dus deel $2x^3$ door x. Schrijf dit 'voorlopig quotiënt' $2x^3/x = 2x^2$ in de rechterkolom.

(b) Vermenigvuldig de deler $x-3$ met het 'voorlopig quotiënt' $2x^2$ en schrijf dit product $(x-3)\cdot 2x^2 = 2x^3 - 6x^2$ onder het deeltal. Trek dit product $2x^3 - 6x^2$ af van het deeltal $2x^3 + x^2 - 5x + 2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen tegen elkaar weg. De 'voorlopige rest' is $2x^3 + x^2 - 5x + 2 - (2x^3 - 6x^2) = 7x^2 - 5x + 2$. Die 'voorlopige rest' is nog te groot, want de graad 2 van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad 1 van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

(c) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de 'voorlopige rest' (dus $7x^2$) door de hoogstegraadsterm van de deler $x-3$, dus door x. Voeg deze component $7x^2/x = 7x$ toe aan het 'voorlopig quotiënt' in de rechterkolom.

(d) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x-3$ met deze nieuwe component $7x$ en schrijf het product $7x \cdot (x-3)$ onder de 'voorlopige rest' $7x^2 - 5x + 2$. Trek het product $7x^2 - 21x$ af van de 'voorlopige rest' $7x^2 - 5x + 2$. Per constructie vallen de hoogste-graadstermen weer tegen elkaar weg. De nieuwe 'voorlopige rest' is $7x^2 - 5x + 2 - (7x^2 - 21x) = 16x + 2$. Deze 'voorlopige rest' $16x + 2$ is nog te groot, want de graad van de 'voorlopige rest' is niet strikt kleiner dan de graad van de deler. We gaan dus verder met de procedure.

(e) Deel opnieuw de hoogstegraadsterm van de nieuwe 'voorlopige rest' $(16x)$ door x. Voeg 16 toe als nieuwe component van het 'voorlopig quotiënt'.

(f) Vermenigvuldig opnieuw de deler $x-3$ met die nieuwe component 16 en trek het product $16(x-3)$ af van de huidige 'voorlopige rest' $16x + 2$. Dit geeft de nieuwe 'voorlopige rest' 50.

(g) Omdat de graad van deze 'voorlopige rest' strikt kleiner is dan de graad van de deler, is het onmogelijk dat we de rest nog kunnen schrijven als een product van de deler met nog iets. Dit beëindigt dus de procedure. 50 is de uiteindelijke rest, en $2x^2 + 7x + 16$ is het uiteindelijke quotiënt.

Besluit: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (2x^2 + 7x + 16)(x-3) + 50$

De algemene procedure is als volgt:

Eigenschap 2 (Algoritme Euclidische deling)**.**

Om een veelterm $p(x)$ te delen door een veelterm $d(x)$ ga je als volgt te werk:

(a) Plaats deeltal $p(x)$ en deler $d(x)$ in een *deelschema*, door ze te rangschikken volgens dalende machten van x en de ontbrekende machten in het deeltal aan te vullen met coëfficiënten nul (of open plaatsen).

(b) Deel de term met de hoogste macht van het deeltal door de term met de hoogste macht van

CC BY-NC-SA 4.0

de deler.

Zo bekom je een *voorlopig quotiënt*.

(c) Vermenigvuldig deze eerste term van het quotiënt met de deler, en trek dit product af van het deeltal.

Zo bekom je een *voorlopige rest*.

(d) Deel de term met de hoogste macht van de voorlopige rest door de term met de hoogste macht van de deler, en voeg het resultaat als nieuwe component toe aan de het voorlopige quotiënt.

Dit geeft een nieuw *voorlopig quotiënt*.

(e) Vermenigvuldig de nieuwe component met de deler, en trek dit product af van het deeltal.

Zo bekom je een nieuwe *voorlopige rest*.

(f) Herhaal de vorige twee stappen tot de graad van de voorlopige rest strikt kleiner is dan de graad van de deler.

We geven nog enkele voorbeelden.

Voorbeeld 5. Deel $2x^3 - 8$ door $x + 2$.

Uitwerking:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 2x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & - & 8 & x+2 \\
\cline{9-9}
- & 2x^3 & + & 4x^2 & & & & & 2x^2-4x+8 \\
\cline{2-4}
 & & - & 4x^2 & + & 0x & - & 8 & \\
 & & - & 4x^2 & - & 8x & & & \\
\cline{3-6}
 & & & & & 8x & - & 8 & \\
 & & & & & 8x & + & 16 & \\
\cline{5-8}
 & & & & & & - & 24 &
\end{array}
$$

Besluit: $2x^3 - 8 = (2x^2 - 4x + 8)(x + 2) - 24$

Voorbeeld 6. Deel $-x^3 + 9x + 2$ door $x + 4$.

Uitwerking:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
- & x^3 & + & 0x^2 & + & 9x & + & 2 & x+4 \\
\cline{9-9}
- & x^3 & - & 4x^2 & & & & & -x^2+4x-7 \\
\cline{2-4}
 & & & 4x^2 & + & 9x & + & 2 & \\
 & & & 4x^2 & + & 16x & & & \\
\cline{4-5}
 & & & & - & 7x & + & 2 & \\
 & & & & - & 7x & - & 28 & \\
\cline{4-8}
 & & & & & & & 30 &
\end{array}
$$

Besluit: $-x^3 + 9x + 2 = (-x^2 + 4x - 7)(x + 4) + 30$

CC BY-NC-SA 4.0

Euclidisch deling van veeltermen

Voorbeeld 7. Deel $4x^4 + x^3 + 2x + 1$ door $2x^2 + 1$.

Uitwerking:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
 & 4x^4 & + & x^3 & + & 0x^2 & + & 2x & + & 1 & 2x^2+1 \\
\cline{11-11}
- & 4x^4 & & & + & 2x^2 & & & & & 2x^2+\tfrac{1}{2}x-1 \\
\cline{1-6}
 & & & x^3 & - & 2x^2 & + & 2x & + & 1 & \\
 & & - & x^3 & & & + & \tfrac{1}{2}x & & & \\
\cline{3-8}
 & & & & - & 2x^2 & + & \tfrac{3}{2}x & + & 1 & \\
 & & & & - & 2x^2 & & & - & 1 & \\
\cline{5-10}
 & & & & & & & \tfrac{3}{2}x & + & 2 &
\end{array}
$$

Besluit: $4x^4 + x^3 + 2x + 1 = \left(2x^2 + \frac{1}{2}x - 1\right)(2x^2 + 1) + \left(\frac{3}{2}x + 2\right)$

CC BY-NC-SA 4.0