Het sommatieteken $\sum$

Met het **sommatieteken** $\sum$ kunnen sommen met veel termen kort worden opgeschreven. Het sommatieteken wordt vaak gebruikt in wetenschappen zoals statistiek, fysica, economie,....

In veel problemen komen sommen voor van termen die telkens op basis van een repetitief patroon zijn opgebouwd. We noteren dergelijke sommen dikwijls met puntjes. Zo schrijven we voor de som van de eerste honderd natuurlijke getallen bijvoorbeeld

$$1+2+3+\ldots+100$$

en de som van de eerste 10 kwadraten als

$$1+4+9+16+\ldots+100.$$

Het is voor iedereen duidelijk wat hiermee wordt bedoeld, en iedereen kan uitrekenen dat $1+2+3+\ldots+100 = 5050$ en $1+4+9+16+\ldots+100 = 385$.

Maar, in sommige gevallen is er toch verwarring mogelijk over wat er precies met de puntjes wordt bedoeld. Bijvoorbeeld: hoeveel is

$$3+5+7+\ldots+19 = ?$$

Bedoelen we hier de som van de *oneven* getallen $3+5+7+9+11+13+15+17+19$ of de som van de *priemgetallen* $3+5+7+11+13+17+19$?

Wanneer het patroon duidelijk is levert het sommatieteken een handige en elegante manier om dergelijke sommen te noteren. Een zogenaamde *sommatie-index* loopt daarbij over de verschillende termen:

$$\sum_{i=1}^{100} i \overset{\text{notatie}}{=} 1+2+3+\ldots+100.$$

We lezen dat als 'de som voor i gaande van 1 tot 100 van telkens het getal i'. Dus, $\sum_{i=1}^{100} i = 5050$, want $1+2+3+\cdots+100 = 5050$.

We kunnen natuurlijk niet alleen gewoon i optellen, maar bijvoorbeeld ook de eerste tien kwadraten

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 \overset{\text{notatie}}{=} 1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2 = 385,$$

dus 'de som voor i gaande van 1 tot 10 van telkens i^2'. Ook veel ingewikkeldere uitdrukkingen komen voor

$$\sum_{i=1}^{365} \frac{\sqrt{i+5}}{i^2+1} \overset{\text{notatie}}{=} \frac{\sqrt{1+5}}{1^2+1} + \ldots + \frac{\sqrt{365+5}}{(365)^2+1} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{370}}{133226}.$$

Vooraleer een formele definitie te geven, bekijken we eerst nog enkele eenvoudige voorbeelden:

Voorbeeld 1 (Inleidende voorbeelden)**.**

1. Beschouw de som $2+4+8+16+32+64$.

Dit is een som van machten van 2. Elke term is van de vorm 2^i waarbij i loopt van 1 tot en met 6. We schrijven die som verkort als

$$2+4+8+16+32+64 = \underbrace{2^1}_{i=1} + \underbrace{2^2}_{i=2} + \underbrace{2^3}_{i=3} + \ldots + \underbrace{2^6}_{i=6} = \sum_{i=1}^{6} 2^i.$$

CC BY-NC-SA 4.0

We kunnen met deze notatie ook veel langere sommen opschrijven:

$$2+4+8+16+\ldots+4096 = 2^1+2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{11}+2^{12} = \sum_{i=1}^{12} 2^i\,.$$

2. Beschouw de som $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$.

Dit is de som van de termen $\frac{1}{i}$, waarbij i loopt van 1 tot en met 5. We kunnen die som verkort schrijven als

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i}\,.$$

3. Beschouw de som $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}$.

We kunnen de som verkort schrijven als

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i^2}\,.$$

De letter die gebruikt wordt bij het sommatieteken hoeft niet i te zijn, dat mag een willekeurige letter zijn. Andere vaak gebruikte letters zijn j en k. De sommatie hoeft ook niet bij 1 te starten:

Voorbeeld 2.

1. Beschouw de som $2+3+4+\cdots+8$.

We kunnen die som verkort schrijven als $\sum_{k=2}^{8} k = 2+3+4+5+6+7+8$.

2. Beschouw de som $9+16+25+36+49+64+81$.

We kunnen die som verkort schrijven als $\sum_{j=3}^{9} j^2 = 9+16+25+36+49+64+81$.

Een algemene definitie van de sommatie, enigszins abstract geformuleerd, gaat als volgt:

Definitie 1 (Het sommatieteken)**.**

Voor $n \in \mathbb{N}$ en $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reële getallen definiëren we :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{notatie}}{=} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Deze notatie wordt veralgemeend voor $m, n \in \mathbb{Z}$ met $m \leqslant n$ en $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n-1}, a_n$ reële getallen:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \overset{\text{notatie}}{=} a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

We lezen $\sum_{k=m}^{n} a_k$ als de som van (de) a_k voor k gaande van m tot en met n.

CC BY-NC-SA 4.0

Het sommatieteken $\sum$

Men noemt a_k de **algemene term** en k de **sommatie-index**.
Men noemt m de **ondergrens** en n de **bovengrens** van de sommatie.

Men noteert $\sum_{k=m}^{n} a_k$ soms ook als $\sum_{k=m}^{n} a_k$.

Voorbeeld 3.

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + 100$$

$$\sum_{i=-2}^{3} i^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 27$$

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=-2}^{1} (-1)^i i^3 &= (-1)^{-2} \cdot (-2)^3 + (-1)^{-1} \cdot (-1)^3 + (-1)^0 \cdot 0^3 + (-1)^1 \cdot 1^3 \\ &= (1) \cdot (-8) + (-1) \cdot (-1) + 0 + (-1) \cdot (1) \\ &= -8 + 1 + 0 - 1 = -8\end{aligned}$$

Oefening 1.

1. Bereken de som $\sum_{j=3}^{5} j^2 = \ldots\ldots$

Opmerking 1.

- De sommatie-index bestaat alleen maar *in* de sommatie. In de uitgeschreven of uitgerekende som komt de sommatie-index niet meer voor.
- De sommatie-index mag geen andere betekenis hebben in de context.
  Als $k \in \mathbb{R}$, dan is
  $$\sum_{i=1}^{4} k^i = \sum_{j=1}^{4} k^j = k + k^2 + k^3 + k^4$$
  maar
  $$\sum_{k=1}^{4} k^k = 1^1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 \neq \sum_{i=1}^{4} k^i.$$
  Je mag voor $k + k^2 + k^3 + k^4$ dus *niet* de letter k kiezen als sommatie-index.

Uit de definitie volgen volgende eigenschappen:

Eigenschap 1 (Basiseigenschappen sommatie)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

Het sommatieteken $\sum$

(a) De som $\sum_{k=1}^{n} a_k$ heeft n termen.

Vb: $\sum_{k=1}^{2} 2^k = 2^1 + 2^2$, 2 termen

(b) De som $\sum_{k=0}^{n} a_k$ heeft $n+1$ termen.

Vb: $\sum_{k=0}^{2} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2$, $2+1=3$ termen

(c) De som $\sum_{k=m}^{n} a_k$ heeft $n-m+1$ termen.

Vb: $\sum_{k=5}^{6} 2^k = 2^5 + 2^6$, $6-5+1=2$ termen

(d) $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$ als en slechts als $a_0 = 0$

Vb: $\sum_{k=0}^{3} k = \sum_{k=1}^{3} k = 0+1+2+3$

(e) $\sum_{k=n}^{n} a_k = a_n$ (sommatie over één getal)

Vb: $\sum_{k=7}^{7} 2^k = 2^7$

(f) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$ (veranderen van indexnaam)

Vb: $\sum_{k=1}^{2} 2^k = \sum_{j=1}^{2} 2^j = 2^1 + 2^2$

Om een gegeven som te schrijven met behulp van het sommatieteken $\sum$ moeten we op zoek gaan naar de gemeenschappelijke vorm van de termen. Dat moet leiden tot een formule voor een algemene term, zeg a_k, die bijna altijd afhangt van een zelfgekozen sommatie-index (hier dus k). Vervolgens zoeken we de onder- en bovengrenzen, dit zijn respectievelijk de eerste en de laatste waarde die k moet aannemen opdat a_k precies alle termen van de som doorloopt.

Voorbeeld 4. Schrijf met een sommatieteken: $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 = \sum_{i=1}^{4} a_i b_i$

Oefening 2. Schrijf volgende uitdrukkingen met een sommatieteken:

1. $\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} = \ldots\ldots$
2. $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^3 + x^4 + \frac{\sqrt{5}}{2}x^5 + \frac{\sqrt{6}}{2}x^6 + \frac{\sqrt{7}}{2}x^7 + \sqrt{2}x^8 + \frac{3}{2}x^9 = \ldots\ldots$

Als de termen van de gegeven som afwisselend positief en negatief zijn, kan je in de algemene term vermenigvuldigen met de factor $(-1)^k$ of $(-1)^{k+1}$. Voor oneven k is $(-1)^k = -1$, dus deze factor in de algemene term vermenigvuldigt alle termen met oneven sommatie-index met -1. Voor even k is $(-1)^{k+1} = -1$, dus deze factor in de algemene term vermenigvuldigt alle termen met even sommatie-index met -1.

Voorbeeld 5. Schrijf volgende uitdrukkingen met een sommatieteken:

1. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \cdots + 129 - 130$.

CC BY-NC-SA 4.0

Uitwerking: We nemen als ondergrens $k = 1$ en als bovengrens $k = 130$. De termen met een even sommatie-index k zijn negatief (de term voor $k = 2$ is -2, de term voor $k = 4$ is -4, ...). Vermits $(-1)^{k+1}$ gelijk is aan 1 voor oneven k en gelijk aan -1 voor even k, is de algemene term hier $a_k = (-1)^{k+1}k$.

Bovenstaande som kunnen we dus korter opschrijven als

$$\sum_{k=1}^{130}(-1)^{k+1}k.$$

2. $-1+2-3+4-5+6-7+8+\cdots-129+130.$

Uitwerking: We nemen als ondergrens $k = 1$ en als bovengrens $k = 130$. De termen met een oneven sommatie-index k zijn negatief (de term voor $k = 1$ is -1, de term voor $k = 3$ is -3, ...). Vermits $(-1)^k$ gelijk is aan -1 voor oneven k en gelijk aan 1 voor even k, is de algemene term hier $a_k = (-1)^k k$.

Bovenstaande som kunnen we dus korter opschrijven als

$$\sum_{k=1}^{130}(-1)^{k}k.$$

Opmerking 2.

We maken de volgende afspraken over haakjes:

$$\sum_{i=5}^{7}a_i+4 \overset{\text{afspraak}}{=} \left(\sum_{i=5}^{7}a_i\right)+4 = a_5+a_6+a_7+4$$

en

$$\sum_{i=5}^{7}(a_i+4) = (a_5+4)+(a_6+4)+(a_7+4) = a_5+a_6+a_7+12.$$

Algemeen geldt

$$\sum_{k=m}^{n}a_k+b = \left(\sum_{k=m}^{n}a_k\right)+b$$

Om verwarring te vermijden schrijf je wel best altijd de haakjes.

Bij de sommatie van een *product* is het niet nodig (maar ook niet fout) om haakjes te zetten:

$$\sum_{k=m}^{n}a_k b_k = \sum_{k=m}^{n}(a_k b_k).$$

Voorbeeld 6. Schrijf met een sommatieteken:

1. $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5 = \left(\sum_{i=1}^{4}a_i b_i\right)+a_5$

Oefening 3. Bereken de som:

1. $\sum_{i=0}^{3}\left(\frac{2^i}{3}+5\right) = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} \frac{2^i}{3} + 5 = \ldots\ldots$

Uitweiding 1 (Toepassing: gemiddelde en standaardafwijking met het sommatieteken)**.**

Laat $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ de gemeten waarden zijn voor een onbekende grootheid X. Neem bijvoorbeeld de meting van geboortegewichten van alle pasgeboren baby's in een bepaald regionaal ziekenhuis gedurende één week. Een ander voorbeeld is een experiment uit de fysica waarin de periode van een slinger herhaaldelijk wordt gemeten met behulp van een chronometer. Door het vroeg- of laattijdig afdrukken van de chronometer zal telkens een andere periode gemeten worden. In dit geval zal de reële waarde van de te meten periode het best benaderd worden door het gemiddelde te nemen van de verschillende meetresultaten. Daarbij zal het gemiddelde van 10 metingen betrouwbaarder zijn dan het gemiddelde van 3 metingen.

Het *rekenkundig gemiddelde* van al de geboortegewichten of van alle gemeten periodes is gedefinieerd als de som van alle metingen gedeeld door het aantal meetresultaten.
In de statistiek wordt dit rekenkundig gemiddelde genoteerd met

$$\bar{x} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Een maat voor de *spreiding* van de metingen (voor hoe ver de verschillende meetresultaten uit elkaar liggen) is bijvoorbeeld het rekenkundig gemiddelde van de gekwadrateerde afwijkingen van de metingen tot hun gemiddelde. Deze spreidingsmaat noemt men de *(steekproef)variantie* en wordt genoteerd met

$$s^2 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

Meestal is het intuïtiever om te rekenen met de vierkantswortel van de variantie, omdat je dan terug dezelfde eenheden hebt als die van de metingen.

We noemen de vierkantswortel uit de variantie de *standaarddeviatie*:

$$s \overset{\text{def}}{=} \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}.$$

Uitweiding 2 (Alternatieve notaties voor sommaties)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

Definitie 2 (Variaties in de notaties voor sommaties)**.** Men schrijft soms ook

$$\sum_{m\le i\le n} a_i \overset{\text{notatie}}{=} \sum_{i=m}^{n} a_i \text{ en de variaties } \sum_{m<i\le n} a_i,\ \sum_{m<i<n} a_i \text{ en } \sum_{m\le i<n} a_i$$

$\sum_{d|n} a_d$ voor de som over alle delers d van n

$\sum_{i\in I} a_i$ voor de som over elementen i van een willekeurige verzameling I

Als de sommatie-index i en de grenzen m en n zeer duidelijk zijn uit de context schrijft men zelfs

$$\sum a_i \overset{\text{notatie}}{=} \sum_{i=m}^{n} a_i$$

Voorbeeld 7.

(a) $\sum_{d|10} d^2 = 1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 = 130$

(b) $\sum_{d|10} 2^d = 2^1 + 2^2 + 2^5 + 2^{10} = 1062$

CC BY-NC-SA 4.0