Machten

0.1 Machten met gehele exponent

Net zoals *vermenigvuldigen* 'herhaald optellen' is: $3 \times 2 \overset{\text{def}}{=} 2+2+2$ en $n \times a = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n \text{ termen}}$,

is *machtsverheffen* 'herhaald vermenigvuldigen': $2^3 \overset{\text{def}}{=} 2 \cdot 2 \cdot 2$ en $a^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}}$.

Definitie 1 (Machtsverheffing met reëel grondtal en gehele exponent)**.**

De n-**de macht** van een reëel getal a, met $n \in \mathbb{N}$, genoteerd a^n, is

$$\begin{array}{rcll} a^0 & \overset{\text{def}}{=} & 1 & \text{als } a \neq 0 \\ a^n & \overset{\text{def}}{=} & \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factoren}} & \text{als } n \in \mathbb{N}_0 \end{array}$$

We noemen a het **grondtal** en n de **exponent**.

Als a niet nul is, dan definiëren we ook machten met *negatieve* gehele exponenten:

$$a^{-n} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{a^n}.$$

De uitdrukkingen 0^0 en 0^{-n} zijn *onbepaald* en hebben dus *geen betekenis*.

Oefening 1. Onmiddellijke gevolgen van de definities:

1. $a^1 = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.
2. $a^0 = 1$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.
3. $0^n = \ldots\ldots$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$, 0^{-n} is niet gedefinieerd voor $n \in \mathbb{N}$.
4. $a^{-1} = \frac{1}{a}$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0$.

Omdat $a^2 = a \cdot a$ en $a^3 = a \cdot a \cdot a$ volgt ook direct dat

$$\begin{array}{rcl} a^2 \cdot a^3 & = & (a \cdot a)(a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{2+3} = a^5 \\ (a^2)^3 & = & (a \cdot a)^3 = (a \cdot a)(a \cdot a)(a \cdot a) = a^{2 \cdot 3} = a^6 \\ a^3 \cdot b^3 & = & (a \cdot a \cdot a)(b \cdot b \cdot b) = (a \cdot b)(a \cdot b)(a \cdot b) = (a \cdot b)^3 \end{array}$$

maar een uitdrukking als $a^2 \cdot b^3$ kan je niet schrijven als één macht, wel bijvoorbeeld als $(a \cdot b)^2 \cdot b$:

$$a^2 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot b = (a \cdot b)^2 \cdot b$$

In het algemeen gelden volgende rekenregels:

Eigenschap 1 (Rekenregels machten)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

Machten

Voor alle $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\begin{aligned}
xa^r + ya^r &= (x+y)a^r && \text{(som van } \textit{gelijke} \text{ machten)}\\
a^m a^n &= a^{m+n} && \text{(product van machten met zelfde grondtal)}\\
(ab)^n &= a^n b^n && \text{(macht van product)}\\
(a^m)^n &= a^{mn} && \text{(macht van een macht)}
\end{aligned}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \text{als } a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \text{als } b \neq 0$$

Dezelfde regels gelden voor *gehele* $m, n \in \mathbb{Z}$ zolang het grondtal niet nul is bij negatieve exponenten.

Uitweiding 1 (Een bewijs van de rekenregels)**.**

De eerste rekenregel is gewoon het uitwerken van haakjes. Voor de overige rekenregels geven we het bewijs voor $x, y \in \mathbb{R}$ en $m, n \in \mathbb{N}$. Dit bestaat telkens uit een eenvoudige toepassing van de definitie en de rekenregels voor producten:

$$x^m x^n = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{n \text{ factoren}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{m \text{ factoren}} = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{n+m \text{ factoren}} = x^{m+n}$$

$$(xy)^n = \underbrace{(xy) \cdot (xy) \cdot \ldots \cdot (xy)}_{n \text{ factoren}} = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{n \text{ factoren}} \cdot \underbrace{(y \cdot y \cdot \ldots \cdot y)}_{n \text{ factoren}} = x^n y^n$$

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m \cdot x^m \cdot \ldots \cdot x^m}_{n \text{ factoren}} = \underbrace{\underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{m \text{ factoren}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{m \text{ factoren}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{m \text{ factoren}}}_{n \text{ factoren}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \cdot m \text{ factoren}} = x^{mn}$$

Men kan bovenstaande uitdrukkingen ook bewijzen voor $m, n \in \mathbb{Z}$ en dan volgt ook dat

$$\frac{x^m}{x^n} \underset{\text{(def. } x^{-n})}{=} x^m \cdot x^{-n} \underset{\text{(zie boven)}}{=} x^{m-n}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = (x \cdot y^{-1})^n = x^n \cdot y^{-n} = \frac{x^n}{y^n}$$

Voorbeeld 1. Bereken volgende machten.

1. $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = 2^6 = 64$

2. $\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{4} \cdot 9 = \frac{9}{4}$

0.2 Machten met rationale exponent

Als we ons beperken tot positieve grondtallen, kunnen we de machtsverheffing eenvoudig verder veralgemenen: we definiëren eerst $a^{\frac{1}{n}}$, dan $a^{\frac{m}{n}} = a^q$, met $q \in \mathbb{Q}$, en tenslotte vermelden we ook a^r, met $r \in \mathbb{R}$.

CC BY-NC-SA 4.0

Definitie 2 (n-de machtswortel)**.**

Zij $a \in \mathbb{R}^+$ en $n \in \mathbb{N}_0$.

De macht $a^{\frac{1}{n}}$ met grondtal a en exponent $\frac{1}{n}$ wordt gedefinieerd als het uniek positief reëel getal b ($b \in \mathbb{R}^+$) waarvan de n-de macht gelijk is aan a. In symbolen:

$$b = a^{\frac{1}{n}} \iff b^n = a \,.$$

We noemen $a^{\frac{1}{n}}$ de n-**de machtswortel** uit a en noteren ook

$$\sqrt[n]{a} \overset{\text{def}}{=} a^{\frac{1}{n}} \,.$$

Voor $n = 2$ noteren we $a^{\frac{1}{2}}$ als $\sqrt{a}$ in plaats van $\sqrt[2]{a}$.

We definiëren voor $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$ ook

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \,.$$

Per definitie is $a^{\frac{m}{n}}$ dus de m-de macht van de n-de machtswortel uit a.

De definitie van $a^{\frac{1}{n}}$ is enkel zinvol als een dergelijk positief reëel getal b *bestaat* en *uniek* is. Precies om dat te garanderen moet de definitie voor **even** n beperkt worden tot *positieve* a en b. Inderdaad, voor negatieve a *bestaat* er immers niet altijd een geschikte b: neem bijvoorbeeld $a = -2$, dan bestaat er geen $b \in \mathbb{R}$ zodat $b^2 = -2$. Als het getal b niet beperkt wordt tot de *positieve* getallen, dan is dergelijke b niet *uniek*: neem bijvoorbeeld $a = 4$, dan voldoen zowel $b = 2$ als $b = -2$ aan $b^2 = 4$.
Voor **oneven** machtswortels stelt dit probleem zich niet: $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$ en $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$. Dus als n oneven is definieert de formule $b = a^{\frac{1}{n}} \iff b^n = a$ ook n-de machtswortels van *negatieve* getallen.

Definitie 3 (Uitbreiding definitie n-de machtswortel)**.**

Zij $a \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}_0$ en n **oneven**.

De macht $a^{\frac{1}{n}}$ met grondtal a en exponent $\frac{1}{n}$ wordt gedefinieerd als het uniek reëel getal b waarvan de n-de macht gelijk is aan a. In symbolen:

$$b = a^{\frac{1}{n}} \iff b^n = a \,.$$

Ook voor machten met rationale exponenten blijven bovenstaande rekenregels gelden. Zo gelden bijvoorbeeld volgende rekenregels voor vierkantswortels, met $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}_0^+$.

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \qquad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}, \qquad a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a+b)\sqrt{x}$$

Opmerking 1.

Onmiddellijke gevolgen van de definities en rekenregels:

CC BY-NC-SA 4.0

- $a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = (\sqrt[n]{a})^{-1}$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0^+$ en alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ voor alle $a \in \mathbb{R}_0^+$, alle $m \in \mathbb{Z}$ en alle $n \in \mathbb{N}_0$
- $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a^1 = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}^+$ en alle $n \in \mathbb{N}_0$

Waarschuwing 1 (Veelgemaakte fouten)**.**

- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
  want bijvoorbeeld $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ en $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
- $a^{-2} \neq a^{\frac{1}{2}}$
  want bijvoorbeeld $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$ en $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
- $\sqrt{(-3)^2} \neq -3$
  want $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$. Voor $a \in \mathbb{R}^+$ geldt wel dat $\sqrt{a^2} = a$.

Voorbeeld 2. Vereenvoudig volgende machten met rationale exponent (met $x \in \mathbb{R}_0^+$).

1. $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt{64} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{8^2} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot 8 = 8^{\frac{1}{3}+1} = 8^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$
2. $\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{x} = x^{\frac{3}{4}-1} = x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$
3. $\left(x^3 \cdot \sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 = x^6 \cdot \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 = x^6 \cdot x^{\frac{2}{4}} = x^{6+\frac{1}{2}} = x^{\frac{13}{2}} = \sqrt{x^{13}}$

Oefening 2. Vereenvoudig (met $x, y \in \mathbb{R}_0^+$):

1. $\dfrac{4}{\sqrt{8}} = \ldots\ldots$
2. $y^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{x^2 y}}{xy}\right)^4 = \ldots\ldots$
3. $\sqrt{48x^9y^4} = \ldots\ldots$

0.3 Machten reële exponent

Men kan ook a^r definiëren met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$ (dus uitdrukkingen zoals $2^{\sqrt{3}}$, $\pi^{\sqrt{5}}$ en $\sqrt{7}^{\sqrt{\pi}}$). We geven de definitie hier niet in detail. We zullen later reële exponenten nodig hebben bij het bestuderen van zogenaamde exponentiële functies zoals $x \mapsto 2^x$.

Ook voor machten met reële exponenten blijven de gebruikelijke rekenregels gelden.

CC BY-NC-SA 4.0

Uitweiding 2 (Definitie machten met niet-rationale exponenten)**.** Details vind je in wat meer gevorderde cursussen wiskunde, maar hier schetsen we kort één mogelijke manier om een precieze betekenis te geven aan de uitdrukking a^r met $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$.

Neem dus $a \in \mathbb{R}_0^+$ en $r \in \mathbb{R}$. We weten reeds dat a^q goed gedefinieerd is voor elk rationaal getal q. Elk reëel getal r kan je 'oneindig goed' benaderen d.m.v. rationale getallen. Concreet wil dit zeggen dat gegeven een reëel getal r er een oneindige rij $q_1, q_2, q_3, \ldots$ bestaat van rationale getallen die r met steeds hogere nauwkeurigheid benaderen, zodat uiteindelijk elke gewenste nauwkeurigheid vanaf een bepaald getal in de rij bereikt wordt. Men zegt in dit geval dat de rij $q_1, q_2, q_3, \ldots$ naar r *convergeert* en men noteert dit met '$q_n \to r$ als $n \to \infty$' of met $\lim_{n\to\infty} q_n = r$.

Stel nu dat $q_1, q_2, q_3, \ldots$ zo'n rij is die naar r convergeert. We kunnen dan voor elke q_n in die rij de macht a^{q_n} beschouwen. Op die manier bekomen we een nieuwe rij $a^{q_1}, a^{q_2}, a^{q_3}, \ldots$ Men kan bewijzen dat ook deze rij steeds zal convergeren naar een zeker reëel getal s en dat deze limiet niet afhangt van de keuze van de rij $q_1, q_2, q_3, \ldots$ die we gebruikt hebben om r te benaderen. Dit laat ons dan toe om de macht a^r te definiëren als dat getal s dat je op die manier bekomt en dat enkel afhangt van a en r.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.40)