Haakjes en ontbinden in factoren

Optellen $(2+3)$ en vermenigvuldigen $(2\cdot 3)$ zijn de twee basisoperaties met getallen. Bij combinaties zoals $2+3\cdot 5$ wordt om historische redenen eerst vermenigvuldigd en dan opgeteld, dus $2+3\cdot 5 = 2+(3\cdot 5) = 2+15 = 17$. Als je de andere volgorde wil *moet* je haakjes zetten: $(2+3)\cdot 5 = 5\cdot 5 = 25$.

Zeker zodra er ook met letters wordt gerekend, wordt het belangrijk om van sommen producten te kunnen maken, of omgekeerd van producten sommen te kunnen maken:

$2\cdot(a+3) = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2a+6$	product van 2 en $a+3$ wordt som van $2a$ en 6
$2\cdot a+6 = 2\cdot a + 2\cdot 3 = 2\cdot(a+3)$	som van $2a$ en 6 wordt product van 2 en $a+3$

Uitwerken van haakjes betekent *producten* herschrijven als *sommen*, zoals $2(a+b) = 2a+2b$.
Ontbinden in factoren betekent een *som* (of getal) herschrijven als een *product*, zoals $2a^2+6a = 2a(a+3)$.

Uitweiding 1 (Producten en sommen, termen en factoren)**.**

De	**optelling**	van de	**termen**	a en b geeft	**de som**	$a+b$	
De	**aftrekking**	van de	**termen**	a en b geeft	**het verschil**	$a-b$	
De	**vermenigvuldiging**	van de	**factoren**	a en b geeft	**het product**	$a\cdot b$	(ook $ab, a\times b$)
De	**deling**	van de	**factoren**	a en b geeft	**het quotiënt**	$\frac{a}{b}$	(ook a/b, $a : b$, $b\neq 0$)

Elk verschil is ook de som met het **tegengestelde**: $a-b = a+(-b)$.
Elk quotiënt is ook het product met het **inverse** (ook **omgekeerde**): $\frac{a}{b} = a\cdot\frac{1}{b} = a\cdot b^{-1}$.

Optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen zijn dus *acties*,
en som, verschil, product en quotiënt zijn het *resultaat* van die acties.

Uitweiding 2 (Motivering uitwerken en ontbinden)**.** De beide operaties 'uitwerken' en 'ontbinden' zijn in zekere zin elkaars omgekeerde. Men kan zich afvragen wat precies het nut is van dergelijke bezigheden.

Welnu, sommige dingen zijn makkelijk voor optellingen, maar moeilijk of moeilijker voor vermenigvuldigingen. Dan kan het handig zijn om een product te schrijven als een som. Dat geldt bijvoorbeeld voor afgeleiden en integralen, want voor sommen zijn die in principe zeer eenvoudig: de afgeleide van een som is gewoon de som van de afgeleiden. Hetzelfde geldt voor integralen. Voor producten zijn de zaken complexer. Als we dan een product (van factoren) zouden kunnen schrijven als een som van termen, kunnen we bijvoorbeeld afleiden of integreren vereenvoudigen.

Andere dingen zijn dan weer eenvoudiger voor producten, zoals het zoeken van nulpunten. Inderdaad, voor een product volstaat het de nulpunten te zoeken van de factoren. Nulpunten van $(x^2-1)\cdot e^{x^2-1}$ zijn dus ofwel nulpunten van x^2-1 (namelijk $x=\pm 1$), ofwel nulpunten van e^{x^2-1}, maar de exponentiële functie heeft geen nulpunten. De nulpunten vinden van een som als $(x^2-1)+e^{x^2-1}$ is niet evident. Als we er zouden in slagen die uitdrukking als een product te schrijven, zou het eenvoudiger zijn om toch nulpunten te vinden. (In dit voorbeeld is ontbinden echter niet mogelijk.)

Voor 'haakjes uitwerken' en 'ontbinden' gelden dezelfde regels, maar ze moeten telkens in de andere richting worden gelezen. Van links naar rechts zeggen ze hoe je een product (of een macht, dat is ook een product) schrijft als een som, maar van rechts naar links gelezen zeggen ze hoe je een som schrijft als een product.

Eigenschap 1. Zij $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

CC BY-NC-SA 4.0

Haakjes en ontbinden in factoren

$$
\begin{aligned}
(a+b)c &= ac+bc && \text{(distributiviteit van } \cdot \text{ t.o.v. } +) \\
a(c+d) &= ac+ad && \text{(idem, maar met som rechts)} \\
(a+b)(c+d) &= ac+ad+bc+bd && \text{(want gelijk aan } (a+b)c+(a+b)d) \\
-(a+b) &= -a-b && \text{(want } (-1)(a+b)=(-1)a+(-1)b) \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 && \text{(kwadraat van een tweeterm)} \\
(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2 && \text{(kwadraat van tweeterm via } (a+(-b))^2) \\
(a+b)(a-b) &= a^2-b^2 && \text{(verschil van twee kwadraten)}
\end{aligned}
$$

Voor hogere machten gelden volgende formules:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad \text{(derdemacht van een tweeterm)}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \qquad \text{(Binomium van Newton)}$$

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad \text{(som van derdemachten)}$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad \text{(verschil van derdemachten)}$$

$$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+ba^{n-2}+b^2a^{n-3}+\cdots+b^{n-2}a+b^{n-1}) \qquad \text{(verschil van } n^{\text{de}} \text{ machten)}$$

$$a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1}-ba^{n-2}+b^2a^{n-3}-\cdots-b^{n-2}a+b^{n-1}) \qquad \text{(som } n^{\text{de}} \text{ machten, } n \textbf{ oneven})$$

Opmerking 1.

Het Binomium van Newton staat hier enkel als referentie, het wordt verder nog uitgelegd.

Voorbeeld 1. Vereenvoudig door de haakjes uit te werken. $(x, y, p, q \in \mathbb{R})$

1. $1-(x-y-1) = -x+y+2$

Uitwerking: $1-(x-y-1) = 1-x+y+1 = -x+y+2$

2. $1-(p-q)+p = q+1$

Uitwerking: $1-(p-q)+p = 1-p+q+p = q+1$

Voorbeeld 2. Werk de haakjes uit: $(x, y \in \mathbb{R})$

1. $(x+y)(x+3y)^2 = x^3+7x^2y+15xy^2+9y^3$

Uitwerking: $(x+y)(x+3y)^2 = (x+y)(x^2+6xy+9y^2) = x^3+6x^2y+9xy^2+yx^2+6xy^2+9y^3 = x^3+7x^2y+15xy^2+9y^3$

Voorbeeld 3. Vul aan door de voorgestelde factor buiten de haakjes te brengen, en vereenvoudig zo ver mogelijk. $(p, r, s, x \in \mathbb{R})$

1. $\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + (p+1)^3 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \cdot \left(4p+5\right)$

CC BY-NC-SA 4.0

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\left(\frac{p+1}{2}\right)^2+(p+1)^3 &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2+(p+1)^2\cdot(p+1)\\ &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2\cdot 1+\left(\frac{p+1}{2}\right)^2\cdot 2^2\cdot(p+1)\\ &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2(1+4(p+1))\\ &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2(1+4p+4)\\ &= \left(\frac{p+1}{2}\right)^2(4p+5)\,.\end{aligned}$$

2. $(3p+2)\frac{4r}{3}-4r(p-1)=\frac{4r}{3}\cdot(5)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}(3p+2)\frac{4r}{3}-4r(p-1) &= \frac{4r}{3}\cdot(3p+2)-\frac{4r}{3}\cdot 3\cdot(p-1)\\ &= \frac{4r}{3}(3p+2-3\cdot(p-1))\\ &= \frac{4r}{3}(3p+2-3p+3)\\ &= \frac{4r}{3}\cdot 5.\end{aligned}$$

3. $\frac{xs}{8}+\frac{xs^2}{4}+3x^3s^3=\frac{xs}{8}(1+2s+24x^2s^2)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\frac{xs}{8}+\frac{xs^2}{4}+3x^3s^3 &= \frac{xs}{8}\cdot 1+\frac{xs}{8}\cdot 2s+\frac{xs}{8}\cdot 24x^2s^2\\ &= \frac{xs}{8}(1+2s+24x^2s^2).\end{aligned}$$

Voorbeeld 4. Ontbind in factoren. $(x,y,r\in\mathbb{R})$

1. $81x^2y^2-25=(9xy+5)(9xy-5)$

Uitwerking: $81x^2y^2-25=(9xy)^2-5^2=(9xy+5)(9xy-5)$ (verschil van twee kwadraten)

CC BY-NC-SA 4.0