De faculteit $n!$

De macht a^n is een korte notatie voor het product van n keer hetzelfde getal a, namelijk $a \cdot a \cdot \cdots \cdot a = a^n$.

Analoog is $n!$ een korte notatie voor het product van alle getallen van 1 tot een bepaald getal n, namelijk $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n = n!$.

We lezen $n!$ als n-faculteit of de faculteit van n.

De faculteit komt bijvoorbeeld voor bij de binomiaalgetallen (en dus bij het binomium van Newton), bij telproblemen, kansberekeningen en statistiek, maar ook in de analyse, bijvoorbeeld bij taylorreeksen.

Definitie 1 (Faculteit)**.** De **faculteit** van een natuurlijk getal $n!$ (lees: n-faculteit) is

$$n! \overset{\text{def}}{=} n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{als } n \in \mathbb{N}_0$$

$$0! \overset{\text{def}}{=} 1.$$

We kunnen natuurlijk de volgorde van de factoren omkeren, en ook schrijven:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

Voorbeeld 1.

1. $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

2. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 4! = 120$

3. $100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

4. $\dfrac{100!}{98!} = \dfrac{100 \cdot 99 \cdot \cancel{98} \cdot \cancel{97} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{98} \cdot \cancel{97} \cdot \ldots \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 100 \cdot 99 = 9900$

5. $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 = \dfrac{50!}{46!}$

De voorbeelden illustreren volgende rekenregels voor de faculteitsoperatie:

Eigenschap 1.

$$n! = n(n-1)! \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$$(n+1)! = (n+1)n! \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{n!}{p!} = \frac{n(n-1)\ldots(p+1)\cancel{p \cdot (p-1)} \ldots \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{p \cdot (p-1)} \ldots \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = n(n-1)\ldots(p+1) \qquad p < n$$

Merk op dat de eerste twee regels precies hetzelfde zeggen namelijk dat de faculteit van een natuurlijk getal gelijk is aan het product van dat getal met de faculteit van het vorige natuurlijke getal.

Opmerking 1. Je kan geen factor buiten haakjes brengen:

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ en $6! = (2 \cdot 3)!$,

maar $6! \neq 2 \cdot 3! = 2 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)$

Uitweiding 1 (Faculteit en telproblemen)**.**

Als voorbeeld bekijken we volgend telprobleem.

Stel er wordt een renwedstrijd gehouden met twaalf paarden. Bij de *tiercé* kunnen gokkers dan voorspellen in welke volgorde de paarden over de eindstreep komen. Hoeveel mogelijke voorspellingen

CC BY-NC-SA 4.0

zijn er? Voor het winnende paard zijn er precies 12 mogelijkheden. Eens het winnende paard vastligt, blijven er nog 11 paarden over die als tweede kunnen eindigen, er zijn dus nog 11 mogelijkheden om het tweede paard te 'kiezen'. Voor het paard dat als derde over de eindmeet zal komen, blijven er dan nog 10 mogelijkheden over enzovoort... Het aantal mogelijke pronostieken voor de tiercé is bijgevolg gelijk aan $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479001600$. Veralgemenen we dit concept tot een paardenwedstrijd met n paarden ($n \in \mathbb{N}_0$), bekomen we als aantal mogelijke pronostieken

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Dit getal $n!$ komt overeen met het aantal mogelijke uitslagen van een renwedstrijd met n paarden of – in het algemeen – het aantal mogelijke manieren om n verschillende objecten te rangschikken (op een rij te zetten).

Bijvoorbeeld, op hoeveel manieren kan je 22 leerlingen van een klas achter elkaar in een rij zetten? Antwoord: op $22! = 1124000727777607680000$ manieren.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.41)