# Breuken

**Definitie 1** (Definitie breuken).

Een **breuk** is een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $b \neq 0$.
We noemen $a$ de **teller**, $b$ de **noemer** en de streep tussen beide getallen de **breukstreep**.
Voor reële getallen $a, b, c, d$ met $b \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

We noemen $-\frac{a}{b}$ de **tegengestelde breuk** van $\frac{a}{b}$.

Als $a \neq 0$ en $b \neq 0$ noemen we $\frac{b}{a}$ de **omgekeerde breuk** van $\frac{a}{b}$.

Een *breuk* is dus per definitie een uitdrukking van de vorm $\frac{a}{b}$ met $a, b \in \mathbb{R}$, met $b \neq 0$. Wanneer $a$ en $b$ concrete getallen zijn, bijvoorbeeld de breuk $\frac{3}{4}$, dan kunnen we de breuk omzetten naar een kommagetal: $\frac{3}{4} = 0.75$. We zullen hier echter voornamelijk werken met breuken met letters, zoals $\frac{a-b}{x}, \frac{x^2y}{y^3}, \ldots$, met $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ en $x \neq 0,\ y \neq 0$.

Bij de notatie van de tegengestelde breuk van $\frac{a}{b}$ mag je kiezen of je het minteken in de teller, de noemer of voor de gehele breuk plaatst.

**Eigenschap 1** (Mintekens).

Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

**Voorbeeld 1** (Mintekens).

1. $-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{-3}$
2. Voor $b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 1$ geldt: $-\frac{b+1}{1-b} = \frac{-(b+1)}{1-b} = \frac{-b-1}{1-b} = \frac{b+1}{b-1}$

**Waarschuwing 1** (Veelgemaakte fouten).

Gebruik **haakjes** om een minteken voor een teller of een noemer te plaatsen. Bijvoorbeeld ($a \in \mathbb{R}$):

$$-\frac{a+5}{7} = \frac{-(a+5)}{7} = \frac{-a-5}{7} = \frac{a+5}{-7}.$$

Een vaak gemaakte fout is het minteken enkel voor één term te plaatsen $-\frac{a+5}{7} \neq \frac{-a+5}{7}$.

Omgekeerd geldt ook dat als er één term in de teller een minteken heeft, je dat minteken niet zonder meer voor de hele breuk mag plaatsen ($b \in \mathbb{R}$): $\frac{-2+b}{4} \neq -\frac{2+b}{4}$. Wel geldt dat

$$\frac{-2+b}{4} = \frac{-(2-b)}{4} = -\frac{2-b}{4}$$

Deze opmerkingen gelden evenzeer voor mintekens in de noemer.

CC BY-NC-SA 4.0

## Breuken

**Oefening 1.** Voor $x \in \mathbb{R}$ met $x \neq 1$ geldt: $-\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{x-1}$

**Eigenschap 2.** Voor $a, b, k \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt

$$k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{b} \qquad \text{(getal maal breuk)}$$

$$\frac{k \cdot a}{b} = k \cdot \frac{a}{b} \qquad \text{(factor uit teller halen)}$$

**Voorbeeld 2** (Getal maal breuk). $(a, b \in \mathbb{R})$

1. $7 \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3}$
2. $3 \cdot \dfrac{a+5}{7} = \dfrac{3(a+5)}{7} = \dfrac{3a+15}{7}$
3. $\dfrac{-10+5b}{4} = \dfrac{5(-2+b)}{4} = 5 \cdot \dfrac{-2+b}{4}$

Je kan breuken soms **vereenvoudigen** door de teller en de noemer beide te delen door eenzelfde factor, op voorwaarde dat deze factor verschillend is van nul. Meestal wordt in een oefening verwacht dat je een breuk zo eenvoudig mogelijk noteert. Je mag teller en noemer van een breuk ook vermenigvuldigen met eenzelfde factor verschillend van nul. Dit is nuttig om twee breuken op dezelfde noemer zetten.

**Eigenschap 3.** Voor $a, b, k \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ en $k \neq 0$ geldt

$$\frac{k \cdot a}{k \cdot b} = \frac{\cancel{k} \cdot a}{\cancel{k} \cdot b} = \frac{a}{b} \qquad \text{(gemeenschappelijke factor } k \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{k \cdot b} \qquad \text{(met factor } k \text{ vermenigvuldigen)}$$

**Voorbeeld 3** (Vereenvoudigen).

1. $\dfrac{10}{15} = \dfrac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \dfrac{2}{3}$
2. $\dfrac{2x}{4} = \dfrac{2 \cdot x}{2 \cdot 2} = \dfrac{x}{2}$
3. Voor $x, y \in \mathbb{R}$ met $y \neq 0$ geldt: $\dfrac{x^2 y}{y^3} = \dfrac{y \cdot x^2}{y \cdot y^2} = \dfrac{x^2}{y^2}$
4. Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$, $d \neq 0$ geldt: $\dfrac{ab+ac}{ad} = \dfrac{a(b+c)}{ad} = \dfrac{b+c}{d}$
5. Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq b$ geldt: $\dfrac{a^2-b^2}{3a-3b} = \dfrac{(a-b)\cdot(a+b)}{(a-b)\cdot 3} = \dfrac{a+b}{3}$

**Waarschuwing 2** (Veelgemaakte fouten).

Voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -1$ kunnen we $\dfrac{a+3}{a+1}$ niet vereenvoudigen, wegens geen gemeen-

CC BY-NC-SA 4.0

schappelijke factor in teller en noemer.

$$\frac{a+3}{a+1} \neq \frac{0+3}{0+1}$$
$$\frac{a+3}{a+1} \neq \frac{1+3}{1+1}$$

De eerste gelijkheid geldt wel voor $a = 0$ en de tweede voor $a = 1$, maar de gelijkheden gelden niet voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -1$.

Voor willekeurige $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq -\frac{1}{2}$ kunnen we $\frac{2a}{2a+1}$ niet vereenvoudigen:

$$\frac{2a}{2a+1} \neq \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}a+1} = \frac{a}{a+1}.$$

Indien we toch de factor 2 willen weg delen in teller en noemer gebruiken we haakjes:

$$\frac{2a}{2a+1} = \frac{2a}{2\left(a+\frac{1}{2}\right)} = \frac{a}{a+\frac{1}{2}}.$$

**Oefening 2.** Vereenvoudig ($p, q \in \mathbb{R}, p \neq q$).

**1.** $\frac{p^2-q^2}{p-q} = \ldots\ldots$

Breuken met gelijke noemer kan je **optellen** door de tellers op te tellen. Breuken optellen is dus een som van breuken schrijven als één breuk. Omgekeerd, als de teller van een breuk een som is, kan je de breuk splitsen, wat wil zeggen dat je deze schrijft als een som van 2 breuken.

**Definitie 2** (Som van breuken met gelijke noemer en splitsen van breuken)**.**

Voor $a, b, c \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ geldt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \text{(breuken optellen, gelijke noemers)}$$
$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \qquad \text{(som in teller splitsen)}$$

**Voorbeeld 4** (Som van breuken met gelijke noemer, splitsen van breuken)**.**

**1.** $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$

**2.** Voor $x, y \in \mathbb{R}$ met $y \neq 0$ geldt: $\frac{x-y}{y^2} + \frac{3x+y}{y^2} = \frac{x-y+3x+y}{y^2} = \frac{4x}{y^2}$

**3.** Voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a \neq b$ geldt: $\frac{3a+b^2}{a} = \frac{3a}{a} + \frac{b^2}{a} = 3 + \frac{b^2}{a}$

**Waarschuwing 3** (Veelgemaakte fouten)**.**

Als de noemer van een breuk een som is kan je niet meteen de breuk splitsen. Voor een willekeurige $b \in \mathbb{R}$ met $b \neq -3$ kunnen we niet als volgt splitsen:

$$\frac{2}{b+3} \neq \frac{2}{b} + \frac{2}{3}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

## Breuken

Breuken met verschillende noemer kan je optellen of aftrekken door deze eerst op gelijke noemer te brengen. Je kan als gemeenschappelijke noemer het product van beide noemers nemen.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \quad = \quad \frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd} \quad = \quad \frac{ad+bc}{bd}.$$

**Voorbeeld 5** (Som van breuken met verschillende noemer). $(x, y, a, b \in \mathbb{R}_0)$

**1.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$

**2.** $\frac{1}{3x}+\frac{2}{y}=\frac{y}{3x\cdot y}+\frac{3x\cdot 2}{3x\cdot y}=\frac{6x+y}{3xy}$

**3.** $\frac{a+b}{2a}+\frac{a-b}{3b}=\frac{(a+b)3b}{2a\cdot 3b}+\frac{2a(a-b)}{2a\cdot 3b}=\frac{3ab+3b^2}{6ab}+\frac{2a^2-2ab}{6ab}=\frac{2a^2+ab+3b^2}{6ab}$

**Oefening 3.**

**1.** Schrijf $a-\frac{a}{b}$ als één breuk. $(a, b \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0)$

Als gemeenschappelijke noemer het product van beide gegeven noemers nemen is altijd een correcte werkwijze, maar vaak niet de meest efficiënte. Ontbind eerst de noemers zo ver mogelijk in factoren. Bij gehele getallen bedoelen we met ontbinden in factoren het geheel getal schrijven als een product van priemfactoren. Als nieuwe noemer kies je dan het kleinste gemene veelvoud van de noemers. Dit kleinste gemene veelvoud vind je door van elke factor die voorkomt in één van de noemers de hoogste macht te nemen die voorkomt en deze te vermenigvuldigen met elkaar.

**Voorbeeld 6** (Som van breuken met verschillende noemer).

Met behulp van het kleinste gemene veelvoud kan de optelling sneller:

**1.**

$$\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5}{2^2\cdot 3}+\frac{7}{2\cdot 3^2}=\frac{5\cdot 3}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7\cdot 2}{2^2\cdot 3^2}=\frac{15}{36}+\frac{14}{36}=\frac{29}{36} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{5\cdot 18}{12\cdot 18}+\frac{7\cdot 12}{18\cdot 12}=\frac{174}{216}$$

**2.** Voor $a, b, k, l, m \in \mathbb{R}$ met $k \neq 0$, $l \neq 0$ en $m \neq 0$:

$$\frac{a}{k\cdot l}+\frac{b}{m\cdot l}=\frac{a\cdot m}{k\cdot l\cdot m}+\frac{b\cdot k}{k\cdot l\cdot m}=\frac{a\cdot m+b\cdot k}{k\cdot l\cdot m} \quad \text{i.p.v.} \quad \frac{a}{k\cdot l}+\frac{b}{m\cdot l}=\frac{a\cdot m\cdot l+b\cdot k\cdot l}{k\cdot l\cdot m\cdot l}=\ldots$$

**3.** Voor $a, b, k, l \in \mathbb{R}$ met $k \neq 0$ en $l \neq 0$:

$$\frac{a}{k^2\cdot l^2}+\frac{b}{k\cdot l^3}=\frac{a\cdot l}{k^2\cdot l^3}+\frac{b\cdot k}{k^2\cdot l^3}=\frac{a\cdot l+b\cdot k}{k^2\cdot l^3}$$

Breuken **vermenigvuldigen of delen** is eenvoudiger dan optellen of aftrekken. Hiervoor hoef je ze niet eerst op gelijke noemer te brengen.

**Definitie 3.**

Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$, $c \neq 0$ en $d \neq 0$ geldt

CC BY-NC-SA 4.0

## Breuken

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \overset{\text{def}}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \text{(vermenigvuldiging)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \overset{\text{def}}{=} \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad \text{(deling)}$$

**Voorbeeld 7** (Breuken vermenigvuldigen en delen). $(x, y \in \mathbb{R}_0)$

1. $\frac{2x}{3} \cdot \frac{2}{x} = \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$
2. $\frac{\frac{x}{2}}{\frac{3}{y}} = \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{3} = \frac{xy}{6}$

**Opmerking 1** (Breuken van breuken).

In de definitie van deling van breuken gebruiken we breuken van breuken. Voor breuken van breuken is de *grootte* van de verschillende breukstrepen en de precieze *plaats* van de symbolen erg belangrijk. Beide breukstrepen mogen niet even groot zijn want dan is de uitdrukking niet ondubbelzinnig. We schrijven voor de leesbaarheid de grootste breukstreep altijd in het midden van de relevante formule. Dus

$$x = \frac{\frac{1+a}{2} + 3}{4 + \frac{\frac{1}{5}+a}{6}} \quad \text{maar nooit} \quad x = \frac{\frac{1+a}{2} + 3}{4 + \frac{\frac{1}{5}+a}{6}}.$$

**Oefening 4.** Schrijf als één breuk en vereenvoudig zo ver mogelijk $(p, q \in \mathbb{R}_0)$.

1. $\frac{\frac{p+qp}{pq^2}}{\frac{p^2}{q}} = \ldots\ldots$

**Eigenschap 4** (Eenvoudige maar belangrijke gevolgen).

Voor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, met $b \neq 0$, $c \neq 0$ geldt

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \qquad \text{(gelijke noemer } \frac{1}{b} \text{ wegdelen)}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c} \qquad \text{(breuk gedeeld door getal is maal in noemer)}$$

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} = a \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{c} \qquad \text{(getal gedeeld door breuk is maal omgekeerde)}$$

CC BY-NC-SA 4.0

**Voorbeeld 8.** Vereenvoudig door met slechts één breukstreep te schrijven.$(x, y \in \mathbb{R}_0)$

1. $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \dfrac{x}{y}$

**Uitwerking:** $\dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{y}{2}} = \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{2}{y} = \dfrac{x}{y}$

2. $\dfrac{x+y}{\frac{x}{y}} = \dfrac{(x+y)y}{x}$

**Uitwerking:** $\dfrac{x+y}{\frac{x}{y}} = (x+y) \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{(x+y)y}{x}$

3. $\dfrac{\frac{x+y}{x}}{y} = \dfrac{x+y}{xy}$

**Uitwerking:** $\dfrac{\frac{x+y}{x}}{y} = \dfrac{x+y}{x} \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{x+y}{xy}$

Tot slot nog enkele trucjes die in sommige contexten nuttig kunnen zijn.

**Eigenschap 5** (trucjes)**.** $(a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $b \neq 0$ en $d \neq 0)$

$$
\begin{aligned}
a + c &= d \cdot \left(\frac{a}{d} + \frac{c}{d}\right) && \text{(niet bestaande factor buiten haakjes brengen)} \\
a &= \frac{a}{1} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken)} \\
b &= \frac{1}{1/b} && \text{(van 'geen breuk' toch 'breuk' maken (variant))} \\
a \cdot b &= \frac{a}{1/b} && \text{(van een product een breuk maken)} \\
\frac{a}{b} &= a \cdot \frac{1}{b} && \text{(van een breuk een product maken)}
\end{aligned}
$$

CC BY-NC-SA 4.0