Binomiaalgetallen

We definiëren een handige notatie voor getallen die in allerlei contexten opduiken:

Definitie 1 (Binomiaalgetallen)**.**

Het **binomiaalgetal** n **over** p, genoteerd $\binom{n}{p}$, van twee natuurlijke getallen n en p met $p \leq n$ is

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Opmerking 1.

(a) Men leest $\binom{n}{p}$ als 'n over p' of als 'n kies p'.
Maar, let hiermee op want ook de breuk $\frac{n}{p}$ wordt soms gelezen als n over p.

(b) Deze getallen komen voor in het Binomium van Newton, en dat verklaart de naam *binomiaal*getallen.

(c) Deze getallen komen ook voor bij de studie van telproblemen: $\binom{n}{p}$ is precies gelijk aan het aantal *deelverzamelingen* van p elementen uit een verzameling van n elementen. Dat aantal wordt ook genoteerd als C_n^p. Er geldt dus dat (let op de omwisseling van de sub- en superscripts!):

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Voorbeeld 1 (Basisvoorbeeld)**.**

(a) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{(\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1})(2 \cdot 1)} = 10 \quad (= C_5^3)$

(b) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \binom{5}{3} = 10$ (zie hierboven)

(c) $\binom{2}{2} = \frac{\cancel{2!}}{\cancel{2!}0!} = 1 \quad (= C_2^2)$ (want $0! = 1$)

(d) $\binom{4}{0} = \frac{\cancel{4!}}{0!\cancel{4!}} = 1 \quad (= C_4^0)$

(e) $\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!3!} = \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4 \quad (= C_4^1)$ (want $4! = 4 \cdot 3!$).

Volgende rekenregels kunnen eenvoudig worden afgeleid uit de definitie (behalve de laatste: daar is zelf het bewijs vinden wat uitdagender, maar niet onmogelijk).

Eigenschap 1 (Rekenregels binomiaalgetallen)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

Binomiaalgetallen

Voor natuurlijke getallen n en p met $p \leq n$ geldt:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} &= \binom{n}{n-p} \\
\binom{n}{0} &= \binom{n}{n} = 1 \\
\binom{n}{1} &= \binom{n}{n-1} = n \qquad n \geq 1 \\
\binom{n+1}{p} &= \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} \qquad p \geq 1
\end{aligned}$$

Volgende eigenschap is een veralgemening van merkwaardige producten als:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{aligned}$$

Bijvoorbeeld de laaste vergelijking kunnen we ook schrijven als

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4.$$

Deze eigenschap levert ook de verklaring voor het woord *binomiaal*, want een '*bi*noom' is een '*twee*term' (net zoal een *mo*noom een *één*term is, en een *poly*noom een *veel*term). De binomiaalgetallen $\binom{n}{p}$ zijn dus precies die coëfficiënten die opduiken bij de p-de term als je een binoom verheft tot de n-de macht. We gebruiken het sommatieteken $\sum$:

Eigenschap 2 (Binomium van Newton)**.**

Zij $a, b \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{N}$. Dan geldt

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p$$

Omdat $(a+b)^n = (b+a)^n$ geldt ook dat

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^p b^{n-p}.$$

Oefening 1. Bereken volgende uitdrukkingen.

1. $\binom{5}{1} = \ldots\ldots$
2. $\binom{20}{19} = \ldots\ldots$
3. $\binom{2019}{1302} + \binom{2019}{1301} = \binom{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$
4. $\binom{42}{20} - \binom{42}{22} = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

5. $\binom{k+1}{k} = \ldots\ldots$

Oefening 2. Juist of fout?

1. $\binom{2k}{k} = \dfrac{2}{k!}$

Juist	Fout

Uitweiding 1 (De driehoek van Pascal en het Binomium van Newton)**.**

De binomiaalgetallen $\binom{n}{p}$ kunnen worden voorgesteld in een driehoekig schema: de zogenaamde *driehoek van Pascal*.

We kunnen die (oneindige) driehoek op twee manieren weergeven, telkens met grotere n in rijen naar beneden, en grotere p in kolommen naar rechts:

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$	$p=6$	$\cdots$
$\binom{n}{p}$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\cdots$
$n=0$ $\binom{0}{p}$	1							
$n=1$ $\binom{1}{p}$	1	1						
$n=2$ $\binom{2}{p}$	1	2	1					
$n=3$ $\binom{3}{p}$	1	3	3	1				
$n=4$ $\binom{4}{p}$	1	4	6	4	1			
$n=5$ $\binom{5}{p}$	1	5	10	10	5	1		
$n=6$ $\binom{6}{p}$	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

of

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 \quad 1
\end{array}
$$

Over de driehoek van Pascal valt heel veel te vertellen.

Het schema vormt een *driehoek* omdat voor elke $n \in \mathbb{N}$ het binomiaalgetal $\binom{n}{p}$ enkel gedefinieerd is voor $p \in \mathbb{N}$ met $p \leqslant n$. Deze driehoek is *symmetrisch* omdat

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \text{voor alle } n, p \in \mathbb{N} \text{ met } p \leqslant n.$$

Elke rij begint en eindigt steeds met 1, terwijl het tweede en het voorlaatste getal van de n-de rij steeds n is. In symbolen:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N} \qquad \text{en} \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

CC BY-NC-SA 4.0

Binomiaalgetallen

Onder (of rechtsonder) twee naburige getallen staat steeds de som van die getallen. Dat is precies wat volgende formule zegt:

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p} \quad \text{voor alle } n, p \in \mathbb{N}_0 \text{ met } p \leqslant n.$$

Dit levert dus een elementaire manier op om alle binomiaalgetallen te berekenen (zonder de faculteiten uit de definitie te moeten uitrekenen): de getallen op de volgende rij kan je onmiddellijk bekomen door die uit de vorige rij twee per twee op te tellen.

Omdat de binomiaalcoefficiënten de structuur van het binomium van Newton bepalen, is het niet verwonderlijk dat we dat binomium ook terugvinden in de driehoek van Pascal.
Bekijk aandachtig volgende uitwerkingen van de opeenvolgende machten van de tweeterm of *binoom* $(a+b)$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{\mathbf{0}} &= \mathbf{1} \\
(a+b)^{\mathbf{1}} &= \mathbf{1}a + \mathbf{1}b \\
(a+b)^{\mathbf{2}} &= \mathbf{1}a^2 + \mathbf{2}ab + \mathbf{1}b^2 \\
(a+b)^{\mathbf{3}} &= \mathbf{1}a^3 + \mathbf{3}a^2b + \mathbf{3}ab^2 + \mathbf{1}b^3 \\
(a+b)^{\mathbf{4}} &= \mathbf{1}a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + \mathbf{1}b^4 \\
(a+b)^{\mathbf{5}} &= \mathbf{1}a^5 + \mathbf{5}a^4b + \mathbf{10}a^3b^2 + \mathbf{10}a^2b^3 + \mathbf{5}ab^4 + \mathbf{1}b^5 \\
(a+b)^{\mathbf{6}} &= \mathbf{1}a^6 + \mathbf{6}a^5b + \mathbf{15}a^4b^2 + \mathbf{20}a^3b^3 + \mathbf{15}a^2b^4 + \mathbf{6}ab^5 + \mathbf{1}b^6 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Als we in deze driehoek (die geldt voor elke a en b) nu $a = b = 1$ kiezen, volgt onmiddellijk dat de som van alle getallen op de n-de rij precies gelijk is aan $(1+1)^n = 2^n$.

Er zitten nog erg veel andere opmerkelijke verbanden verstopt in deze driehoek. Google helpt je zeker op weg in een fascinerende verkenning van deze onbekende wereld.

Uitweiding 2 (Historische informatie over Sir Isaac Newton (1642-1727))**.**

Sir Isaac Newton was een Brits natuurkundige, filosoof, wiskundige en alchemist. Hij werd geboren in 1642 in Lincolnshire in Engeland en stierf in 1727 in Londen. Newton was de leidende figuur in de wetenschappelijke revolutie van de 17de eeuw en wordt dan ook algemeen erkend als één der zeer groten in de wetenschap. Samen met Leibniz ligt hij ook aan de basis van de integraal- en differentiaalrekening.

Uitweiding 3 (Historische informatie over Blaise Pascal (1623-1662))**.**

De Fransman Blaise Pascal was filosoof, theoloog, wis- en natuurkundige. Hij werd geboren in 1623 in Clermont Ferrand en stierf in Parijs in 1662. Zijn belangrijkste prestaties situeren zich in het gebied van de waarschijnlijkheidsrekening, de combinatieleer, de projectieve meetkunde, de hydrostatica (de wet van Pascal voor de druk in een vloeistof) en de hydrodynamica.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.48)