Absolute waarde

Definitie 1 (Absolute waarde)**.**

Voor een reëel getal $a \in \mathbb{R}$ definiëren we de *absolute waarde* van a, genoteerd $|a|$, als

$$|a| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} a & \text{als} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{als} \quad a < 0. \end{cases}$$

Als a positief is, dan is $|a|$ gewoon a, maar als a negatief is, dan is $|a|$ het overeenkomende *positieve* getal $-a$. Dus, $|a|$ is altijd positief.

Voorbeeld 1 (Eenvoudige voorbeelden van absolute waarden)**.**

(a) $|5| = 5$ en $|-5| = 5$

(b) $|2 + (-1)| \neq |2| + |-1|$ (want $1 \neq 3$)

(c) $|(-3)^2| = |3^2| = 9 \quad (= |-3^2| = |-9|)$

(d) $|a^2 + 1| = a^2 + 1$, met $a \in \mathbb{R}$

(e) $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$

(f) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

(g) $|2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$

(h) $|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$

Oefening 1. Bereken (zonder rekenmachine) volgende absolute waarden.

1. $|2 - 9| = \ldots\ldots$

2. $|-2 - (-6)| = \ldots\ldots$

3. $\left|\frac{11}{10} - \frac{51}{10}\right| = \ldots\ldots$

4. $|\pi - 3\pi| = \ldots\ldots$

Volgende eigenschappen volgen eenvoudig uit de definitie:

Eigenschap 1. Als $x, y, z \in \mathbb{R}$, dan is

(a) $|x| \geq 0$

(b) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

(c) $|-x| = |x|$

(d) $|x|^2 = x^2 = |x^2|$ $\qquad (= |-x^2| = |(-x)^2|)$

(e) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ (absolute waarde van product is product van absolute waarden)

(f) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ met $y \neq 0$ (absolute waarde van quotiënt is quotiënt van absolute waarden)

Waarschuwing 1 (Veelgemaakte fouten)**.**

(a) $|-a| = |a|$, maar ZEER ZEKER NIET ~~$|-a| = a$~~
$|-a| = a$ is FOUT als $a < 0$: als $a = -7$, dan is $|-a| = |-(-7)| \neq -7 = a$

(b) De absolute waarde van een som is niet steeds de som van de absolute waardes:

~~$|x + y| = |x| + |y|$~~

$$|2 + 3| = |2| + |3| = 2 + 3 = 5$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU LEUVEN (2026/09/28H.57)

maar

$$|2+(-3)| = |-1| = 1 \quad \text{terwijl} \quad |2|+|-3| = 2+3 = 5$$

(c) De wortel van het kwadraat van een reëel getal is niet steeds gelijk aan dat reëel getal.

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 \quad \text{maar} \quad \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$$

Algemeen geldt

- voor $a \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt{a^2} = a$
- voor $a \in \mathbb{R}^-$: $\sqrt{a^2} = -a$

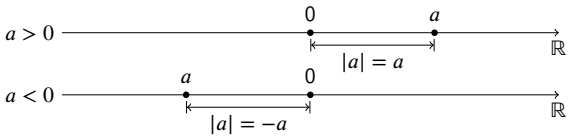
Dit kunnen we samenvatten als $\sqrt{a^2} = |a|$ voor elke reële a.

Oefening 2. Schrijf met een absolute waarde

1. $\sqrt{(x-4)^2} = \ldots\ldots$

2. $\sqrt{(-2x)^2} = \ldots\ldots$

Bij de voorstelling van a op de reële rechte $\mathbb{R}$ is $|a|$ gelijk aan de afstand van het punt a tot de oorsprong:

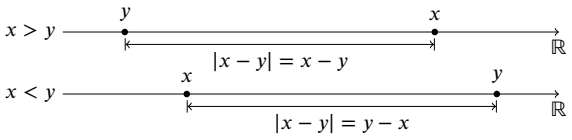


Deze eenvoudige opmerking leidt onmiddellijk tot volgend belangrijk inzicht:

Eigenschap 2. Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Dan geldt (op de reële rechte $\mathbb{R}$)

$|x-y|$ is de afstand tussen x en y.

In het bijzonder is $|x|$ de afstand van x tot de oorsprong.



Opmerking 1.

Uit $|x+y| = |x-(-y)|$ volgt dat $|x+y|$ gelijk is aan de afstand tussen x en $-y$.

Oefening 3.

1. De afstand van x tot 7 is $|x-7|$

2. De afstand van x tot -3 is $|x+3|$

CC BY-NC-SA 4.0