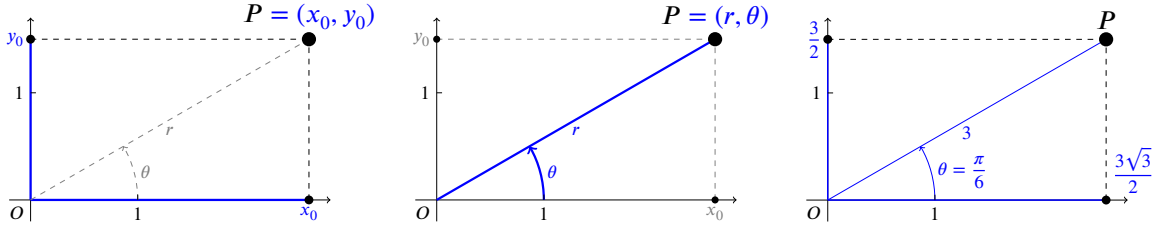
Poolcoördinaten

Gewoonlijk gebruiken we in het vlak een koppel *cartesische coördinaten* (x_0, y_0) om het punt aan te duiden dat in een gegeven assenstelsel x_0 *eenheden naar rechts* ligt van de oorsprong en y_0 *eenheden naar boven*. Er zijn echter ook alternatieve manieren om een punt in het vlak te bepalen, en in sommige toepassingen zijn die alternatieven veel handiger. De zogenaamde *poolcoördinaten* leggen een punt vast via een *hoek* en een *afstand*.



Op de eerste tekening zien we de cartesische coördinaten (x_0, y_0) van een punt P. De getallen x_0 en y_0 zijn de lengtes (met een teken) van de loodrechte projecties op respectievelijk de horizontale x-as en de verticale y-as.

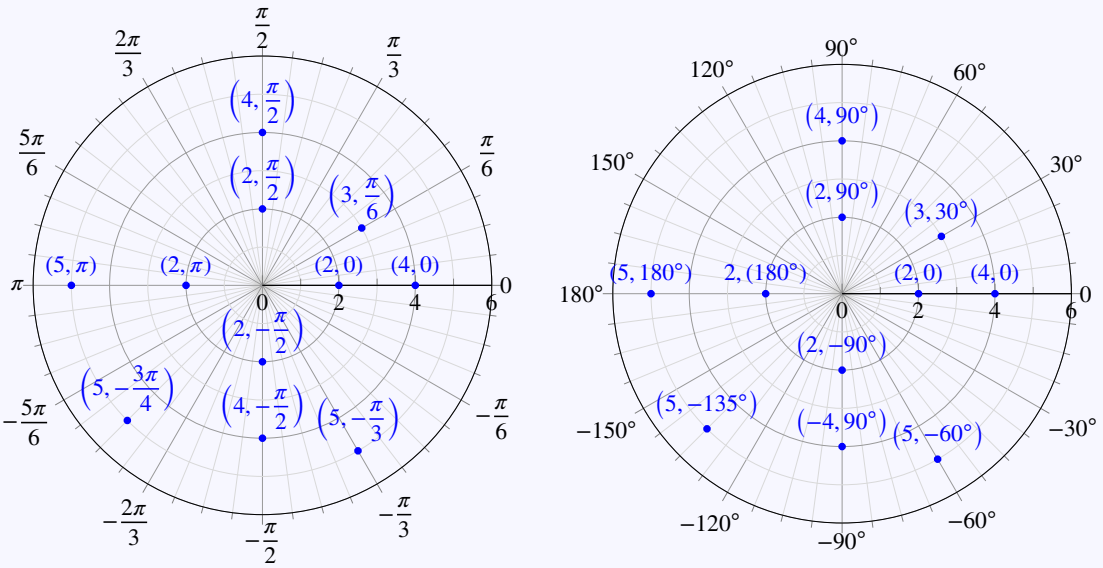
Op de tweede tekening zien we hoe je hetzelfde punt P ook kan vastleggen door de afstand r tot de oorsprong en de hoek θ met de positieve x-as. We noemen (r, θ) *pool*coördinaten van P:

Definitie 1. Poolcoördinaten van een punt P zijn elk koppel reële getallen (r, θ) waarvoor

- r de afstand is van de oorsprong O tot P (en dus $r \geq 0$)
- θ de grootte is in radialen van de (georiënteerde) hoek tussen de positieve x-as en het lijnstuk OP.

Voor een gegeven punt P ligt de afstand r vast, maar θ is slechts bepaald op een veelvoud van 2π na.

Voorbeeld 1 (Poolcoördinaten)**.**



Merk op dat de hoek θ steeds moet uitgedrukt zijn in radialen. De rechtse figuur is dus enkel bedoeld als hulp voor wie (nog) niet voldoende vertrouwd is met hoeken uitgedrukt in radialen.

CC BY-NC-SA 4.0

Poolcoördinaten

Oefening 1. Bij welk punt op de figuur onderaan horen volgende poolcoördinaten?

1. $(1, \frac{\pi}{6}) = \ldots\ldots$

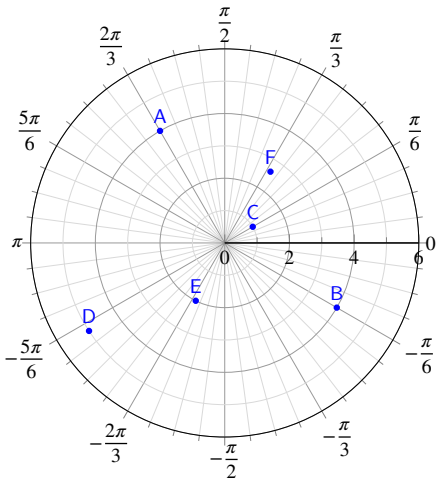
2. $(4, \frac{2\pi}{3}) = \ldots\ldots$

3. $(4, \frac{-\pi}{6}) = \ldots\ldots$

4. $(2, \frac{4\pi}{3}) = \ldots\ldots$

5. $(5, 10) = \ldots\ldots$

6. $(\frac{5\pi}{6}, 1) = \ldots\ldots$



Opmerking 1.

- Poolcoördinaten van een punt zijn *niet uniek bepaald*: als (r, θ) poolcoördinaten zijn van een punt P, dan zijn alle $(r, \theta + 2k\pi)$ met $k \in \mathbb{Z}$ ook poolcoördinaten van P. Soms spreekt men toch van *de* poolcoördinaten door te eisen dat bv. $\theta \in [0, 2\pi[$.
- De oorsprong heeft nog veel meer poolcoördinaten, namelijk alle koppels $(0, \theta)$ met $\theta \in \mathbb{R}$.
- De *notatie* van poolcoördinaten als een koppel (r, θ) is enigszins dubieus: de uitdrukking 'het punt $(1, \pi)$' is namelijk dubbelzinnig. Inderdaad, afhankelijk of $(1, \pi)$ de cartesische dan wel de poolcoördinaten zijn gaat het om een *ander* punt. Tenzij de precieze betekenis erg duidelijk blijkt uit de context, is het dus aangewezen om steeds te vermelden om *welke soort* coördinaten het gaat: het punt met *cartesische* coördinaten (a, b) of het punt met *pool*coördinaten (a, b).

Uitweiding 1 (Coordinatenstelsels)**.**

Cartesische coördinaten zijn steeds bepaald ten opzichte van een *orthonormaal assenstelsel*: We kiezen in het vlak een *oorsprong* en *twee loodrechte genormeerde rechten* door die oorsprong die we de x-**as en** y-**as** noemen. Per conventie kiezen we de x-as horizontaal naar rechts, en de y-as verticaal naar boven.

Voor poolcoördinaten hebben we een zogenaamd **poolstelsel** nodig: We kiezen in het vlak een *oorsprong* en *één genormeerde halfrechte* vanaf die oorsprong die we de **poolas** noemen. Per conventie kiezen we de poolas horizontaal naar rechts.

Als een cartesisch assenstelsel gegeven is kunnen we hieraan een poolstelsel associëren met dezelfde oorsprong door de positieve x-as als poolas te nemen.

Omgekeerd, als een poolstelsel gegeven is associëren we hiermee een cartesisch assenstelsel met dezelfde oorsprong door de poolas te verlengen tot de x-as, en de rechte door de oorsprong en het punt met poolcoördinaten $(1, \frac{\pi}{2})$ als y-as.

CC BY-NC-SA 4.0

Poolcoördinaten

Ten opzichte van een poolstelsel ligt een punt P vast door het geven van een koppel getallen (r, θ), waarbij

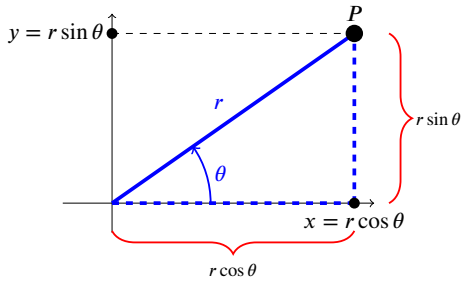
- het getal r de afstand is tussen de oorsprong O en het punt P. Dus is r steeds een positief reëel getal.
- het getal θ de georiënteerde hoek voorstelt tussen de poolas en het lijnstuk OP. We spreken af dat θ het maatgetal van deze hoek is uitgedrukt in radialen. Eenvoudigheidshalve zullen we vaak gewoon over de hoek θ spreken, terwijl we eigenlijk het maatgetal bedoelen.

Het nut van poolcoördinaten is onder andere dat sommige vergelijkingen eenvoudiger worden in poolcoördinaten dan in cartesische coördinaten. Een duidelijk voorbeeld hiervan is een cirkel met centrum in de oorsprong en straal 2. Dit is een tweedegraadsvergelijking in cartesische coördinaten (x, y), namelijk $x^2 + y^2 = 4$, en een eerstegraadsvergelijking in poolcoördinaten (r, θ), namelijk $r = 2$. Omgekeerd zijn er ook vergelijkingen die eenvoudiger zijn in cartesische coördinaten, bv. de rechte $x = 2$ (die niet door de oorsprong gaat) heeft een merkwaardige vergelijking in poolcoördinaten (zie verder).

Als een punt zowel cartesische coördinaten heeft als poolcoördinaten, ligt het voor de hand zich af te vragen of (en hoe) we de ene kunnen omrekenen naar de andere.

- Omrekenen van poolcoördinaten (r, θ) naar cartesische coördinaten (x, y) is eenvoudig want uit de *formules* van de sinus en de cosinus in de rechthoekige driehoek met hoekpunten $(0, 0), (x, 0)$ en (x, y) volgt onmiddellijk dat

$$x = r\cos\theta \text{ en } y = r\sin\theta.$$



- Omgekeerd, stel dat cartesische coördinaten (x, y) gegeven zijn, en we willen de poolcoördinaten (r, θ) bepalen. Omdat $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$, vinden we dat $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$, en dus $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Als we $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ invullen in $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ krijgen we

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

  Dit stelsel bepaalt ondubbelzinning de hoek θ.

Volgende eigenschap vat dat samen:

Eigenschap 1 (Transformatieformules cartesische coördinaten en poolcoördinaten)**.**

Een punt P met poolcoördinaten (r, θ) heeft als cartesische coördinaten (x, y):

$$x = r\cos\theta$$

CC BY-NC-SA 4.0

Poolcoördinaten

$$y = r\sin\theta$$

Een punt P met cartesische coördinaten (x, y) heeft poolcoördinaten (r, θ) die voldoen aan:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Voorbeeld 2. Omrekenen van poolcoördinaten naar cartesische coördinaten of omgekeerd:

1. Bepaal de cartesische coördinaten van het punt met poolcoördinaten $(2, \frac{17\pi}{6})$.

Uitwerking: Uit de formule $x = r\cos\theta$ volgt dat $x = 2\cos\frac{17\pi}{6} = 2\cos\frac{5\pi}{6} = -2\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$, en uit de formule $y = r\sin\theta$ volgt dat $y = 2\sin\frac{17\pi}{6} = 2\sin\frac{5\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$.

De cartesische coördinaten zijn dus $(-\sqrt{3}, 1)$.

2. Bepaal de poolcoördinaten van het punt met cartesische coördinaten $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$ (neem $\theta \in [0, 2\pi[$).

Uitwerking: Uit de formule voor r volgt dat $r = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
Uit die voor $\cos\theta$ volgt dat $\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$, dus is $\theta = \frac{2\pi}{3}$ of $\theta = \frac{4\pi}{3}$.
Uit die voor $\sin\theta$ volgt dat $\sin\theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dus is $\theta = \frac{\pi}{3}$ of $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

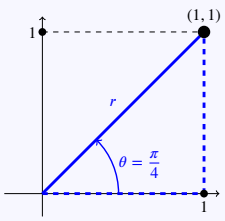
De gezochte poolcoördinaten zijn dus $(2\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3})$.

De poolcoördinaten van sommige punten kunnen sneller bepaald worden op een tekening.

Voorbeeld 3. Bepaal grafisch de poolcoördinaten van het punt met cartesische coördinaten $(1, 1)$ (neem $\theta \in [0, 2\pi[$).

Uitwerking: Op de tekening blijkt dat $\theta = \frac{\pi}{4}$.

De afstand tot de oorsprong berekenen we: $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.



CC BY-NC-SA 4.0

Opmerking 2. Omrekenen tussen cartesische coördinaten en poolcoördinaten

Omrekenen van (r,θ) naar (x,y) is eenvoudig via $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$.
Omrekenen van (x,y) naar (r,θ) is ook eenvoudig voor r, want $r = \sqrt{x^2+y^2}$, maar wat moeilijker voor θ.
Het stelsel

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

bepaalt ondubbelzinnig de hoek θ. Inderdaad, als we zowel de cosinus als de sinus van een hoek kennen, ligt die hoek volledig vast. Hoeken waarvan we de cosinus en de sinus kennen, zoals bijvoorbeeld $\frac{\pi}{3}$ kunnen we met dit stelsel gemakkelijk vinden.
Om dit stelsel in het algemeen op te lossen (voor een punt verschillend van de oorsprong) hebben we echter de cyclometrische functies boogsinus, boogcosinus of boogtangens nodig.

Als $x \neq 0$ kunnen we de tweede vergelijking delen door de eerste (waardoor de vierkantswortel wegvalt) en krijgen we

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{als } x \neq 0$$

Als $x > 0$ dan is θ een hoek in het 1ste of het 4de kwadrant en is dus per definitie van de boogtangens

$$\theta = \operatorname{bgtan}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{als } x > 0$$

Als $x < 0$ dan is θ een hoek in het 2de of het 3de kwadrant en dan geldt

$$\theta = \operatorname{bgtan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \quad \text{als } x < 0$$

Als $x = 0$, dan ligt het punt (x,y) dus op de y-as en geldt

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{als } x = 0, y > 0$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2} \quad \text{als } x = 0, y < 0$$

Samengevat geeft dit voor θ:

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{bgtan}\dfrac{y}{x} & \text{als } x > 0 \\ \pi + \operatorname{bgtan}\dfrac{y}{x} & \text{als } x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{als } x = 0, y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{als } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

We hernemen een vorig voorbeeld:

Voorbeeld 4. Bepaal de poolcoördinaten van het punt met cartesische coördinaten $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$ (neem $\theta \in [0, 2\pi[$).

Uitwerking: $r = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
$x < 0$ dus $\theta = \pi + \operatorname{bgtan}\frac{y}{x} = \pi + \operatorname{bgtan}\frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{2}} = \pi + \operatorname{bgtan}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

CC BY-NC-SA 4.0

Poolcoördinaten

De gezochte poolcoördinaten zijn dus $(2\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3})$.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.30)