Tekenverloop

Veronderstelde voorkennis: Het tekenverloop van eerstegraadsveeltermen en tweedegraadsveeltermen, Verzamelingen, Bewerkingen met verzamelingen en Veeltermfuncties en Rationale functies

We bespreken hier het tekenverloop van veeltermfuncties en rationale functies. Het tekenverloop beschrijft voor welke waarden uit het domein de functie positief, negatief of nul is. Met behulp van het tekenverloop van een functie f kan je ongelijkheden van de vorm $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) > 0$ en $f(x) \geq 0$ oplossen.

Je kan het tekenverloop van een **veeltermfunctie** bepalen door de veelterm eerst te ontbinden in eerste- en tweedegraadsveeltermen, en daarna de tekenverlopen van die factoren te combineren. We illustreren dit met een voorbeeld.

Voorbeeld 1 (Tekenverloop van een veeltermfunctie)**.**

Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $(1-x)(3x^2-3)(-x^2+x+2) > 0$.

Uitwerking: We maken voor elk van de factoren een apart tekenverloop en brengen dit samen in één tabel.

- $(1-x)$ heeft één nulpunt: 1.
- $(3x^2-3)$ heeft twee nulpunten: -1 en 1.
- $(-x^2+x+2)$ heeft twee nulpunten: -1 en 2.

Dit geeft volgende samenvattende tabel (met de nulpunten steeds geordend van klein naar groot):

x		-1		1		2	
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$3x^2-3$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-x^2+x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(1-x)(3x^2-3)(-x^2+x+2)$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

We bekomen de onderste rij door de tekens van de eerste- en tweedegraadsfactoren te vermenigvuldigen. Zo bepalen we het teken van de getallen in de kolom die staat voor $x \in]-\infty, -1[$ als volgt: twee plustekens (dus positieve factoren) vermenigvuldigen geeft iets positief, en dat vermenigvuldigen met iets negatief geeft iets negatief, wat ons het minteken in de onderste rij geeft. Als één van de factoren nul wordt, dan wordt de veeltermfunctie ook nul. In de onderste rij lezen we af dat $(1-x)(3x^2-3)(-x^2+x+2) > 0$ voor $x \in]2, \infty[$.

De oplossingsverzameling van de ongelijkheid is dus $V =]2, \infty[$.

Ook van **rationale functies** kan je het tekenverloop bepalen door eerst teller en noemer te ontbinden in eerste- en tweedegraadsveeltermen, en daarna de tekenverlopen van die factoren te combineren. We illustreren de werkwijze met een voorbeeld.

Voorbeeld 2 (Tekenverloop van een rationale functie)**.**

Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $\dfrac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4} \leqslant 0$.

Uitwerking: We maken voor elk van de factoren van teller en noemer een apart tekenverloop en brengen dit samen in één tabel.

- $(4-x^2)$ heeft twee nulpunten: 2 en -2.
- $(3x^2-9x+6)$ heeft twee nulpunten: 1 en 2.
- $(2x+4)$ heeft één nulpunt: -2.

CC BY-NC-SA 4.0

Tekenverloop

Dit geeft volgende samenvattende tabel (met de nulpunten steeds geordend van klein naar groot):

x		-2		1		2	
$4-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$3x^2-9x+6$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$2x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4}$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$-$

De verticale streep bij het nulpunt van de noemer duidt aan dat de breuk er niet gedefinieerd is. Met behulp van deze verticale streep wordt dus eigenlijk de bestaansvoorwaarde genoteerd.
We bekomen de onderste rij door de tekens van de eerste- en tweedegraadsfactoren te vermenigvuldigen. Zo bepalen we het teken van de getallen in de kolom die staat voor $x \in]-\infty, 2[$ als volgt: twee mintekens (dus negatieve factoren) vermenigvuldigen geeft iets positief, en dat vermenigvuldigen met de derde positieve factor geeft dan iets positief, wat ons het plusteken in de onderste rij geeft. Als we een nul tegenkomen moeten we opletten:

- Zijn er enkel factoren in de teller die nul worden, dan wordt de rationale functie ook nul.
- Is er een factor in de noemer nul, dan is de rationale functie niet gedefinieerd in dat punt, en zetten we een $\vert$.

In de onderste rij lezen we af dat $\dfrac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4} \leqslant 0$ voor $x \in [1, +\infty[$.

De oplossingsverzameling van de ongelijkheid is dus $V = [1, +\infty[$.

Uitweiding 1 (kortere schrijfwijze)**.** Je kan de tabel ook sneller opstellen zonder het apart tekenverloop van de verschillende factoren uit teller en noemer op te schrijven. Dat gaat als volgt:

- Maak een schema met bovenaan alle nulpunten van zowel teller als noemer, geordend van klein naar groot.
- Vermeld bij elk nulpunt de *multipliciteit* m van dit nulpunt, dit is het aantal keer dat dit punt nulpunt is van één van de factoren van de rationale functie. Twee samenvallende nulpunten moet je dus tweemaal tellen.
- Zet in de onderste lijn van het schema een verticale streep $\vert$ bij de *nulpunten van de noemer*.
- Zet een 0 bij de resterende nulpunten.
- Zet *onderaan rechts* het teken van het product van de alle hoogstegraadscoëfficiënten van alle lineaire en tweedegraadsfactoren.
- Vul vervolgens de tekens aan van rechts naar links: telkens je springt over een nulpunt met **oneven** multipliciteit verander je het teken. Bij een nulpunt met **even** multipliciteit verandert het teken niet.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.40)

Tekenverloop

Voorbeeld 3 (Tekenverloop van een rationale functie (alternatieve werkwijze))**.**

Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $\dfrac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4} \leqslant 0$.

Uitwerking: We berekenen voor elk van de factoren van teller en noemer de nulpunten:

- $(4-x^2)$ heeft twee nulpunten: 2 en -2.
- $(3x^2-9x+6)$ heeft twee nulpunten: 1 en 2.
- $(2x+4)$ heeft één nulpunt: -2.

We berekenen voor elk nulpunt de globale multipliciteit:

- de multipliciteit van nulpunt -2 is 2 omdat -2 nulpunt is van $2x+4$ en $4-x^2$,
- de multipliciteit van nulpunt 1 is 1 omdat 1 enkel een enkelvoudig nulpunt is van $3x^2-9x+6$,
- de multipliciteit van nulpunt 2 is 2 omdat 2 nulpunt is van $4-x^2$ en $3x^2-9x+6$.

x		$-2\ (m=2)$		$1\ (m=1)$		$2\ (m=2)$	
$\dfrac{(4-x^2)(3x^2-9x+6)}{2x+4}$	$+$	$\mid$	$+$	0	$-$	0	$-$

Het teken onderaan rechts in een tekentabel is het teken van het product van alle hoogstegraadscoëfficiënten, hier dus van $((-1)\cdot 3\cdot 2)$ en dus $-$. Dan vullen we de tabel verder aan naar links, en we veranderen het teken telkens we een nulpunt met oneven multipliciteit tegenkomen.

Voorbeeld 4. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $\dfrac{(2x-3)(x^2-5x+4)}{x^2(-x^2+2x-1)} \leqslant 0$.

Uitwerking: We berekenen de nulpunten:

- $(2x-3)$ heeft één nulpunt: $3/2$,
- (x^2-5x+4) heeft twee nulpunten: 1 en 4,
- x^2 heeft 0 tweemaal als nulpunt,
- $(-x^2+2x-1)$ heeft 1 tweemaal als nulpunt.

Dus is voor 0 de multipliciteit $m=2$, voor 1 is $m=3$ en voor $3/2$ en 4 is de multipliciteit $m=1$.

Op de laatste lijn komt bij nulpunten van factoren uit de noemer een $\mid$ bij de andere een 0.

Onderaan rechts van de tabel beginnen we met een $-$, dit is het teken van $(2\cdot 1\cdot 1\cdot(-1))$.

Dit geeft volgende tabel:

x		$0\ (m=2)$		$1\ (m=3)$		$3/2\ (m=1)$		$4\ (m=1)$	
$\dfrac{(2x-3)(x^2-5x+4)}{x^2(-x^2+2x-1)}$	$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$-$	0	$+$	0	$-$

De oplossingsverzameling is dus $V =]1, 3/2\,] \cup [4, +\infty[$.

CC BY-NC-SA 4.0