Ongelijkheden

Ongelijkheden

Een belangrijke eigenschap van reële getallen is dat we ze kunnen ordenen: voor twee getallen $x, y \in \mathbb{R}$ geldt altijd $x \leq y$ of $y \leq x$. We kunnen dus niet alleen vergelijkingen bestuderen en oplossen, maar ook zogenaamde on*gelijk*heden. Daarbij zoeken we niet naar de waarden van een onbekende die een *gelijkheid* oplost, maar naar de waarden van een onbekende die een *ongelijkheid* oplost.

Voorbeeld 1 (Voorbeelden van ongelijkheden)**.**

- $x^2 > 2x - 1$
- $\sin(x) \geq 0.5$

Opmerking 1.

- Ongelijkheden kunnen aan elkaar worden gekoppeld:

  $$a < b < c \iff a < b \text{ en } b < c.$$

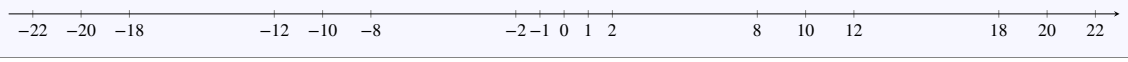
  Merk op dat uit beide uitdrukkingen telkens ook volgt dat $a < c$.
- Uitdrukkingen van de vorm $a < b > c$ worden *nooit* gebruikt: je schrijft bv. $a < b$ en $c < b$, of korter $a, c < b$

Ongelijkheden oplossen is in het algemeen *moeilijker* dan het oplossen van vergelijkingen, onder meer omwille van de extra complicatie dat twee leden van een ongelijkheid vermenigvuldigen met een *negatief* getal de ongelijkheid *omdraait*:

Eigenschap 1. Voor elke $a, b, r \in \mathbb{R}$ geldt

	$a < b$	$\iff$	$a + r < b + r$		(plus getal)
Geval $0 < r$:	$a < b$	$\iff$	$r \cdot a < r \cdot b$		(maal positief getal)
Geval $r < 0$:	$a < b$	$\iff$	$r \cdot a > r \cdot b$	(of $r \cdot b < r \cdot a$)	(maal negatief getal)

Voorbeeld 2. We hebben $10 < 20$, en dus ook $10 + 2 < 20 + 2$, $10 - 2 < 20 - 2$ en $2 \cdot 10 < 2 \cdot 20$, maar $(-2) \cdot 10 > (-2) \cdot 20$. Ook is $1 < 2$, maar $-1 > -2$. Deze ongelijkheden zie je ook op de getallenrechte:



Opmerking 2.

- De eerste eigenschap zegt dat je bij beide leden van een ongelijkheid eenzelfde getal mag optellen

  $$a < b \Rightarrow a + r < b + r$$

  of aftrekken

  $$a + r < b + r \Rightarrow a < b.$$

  Als we bij de ongelijkheid $x < y$ van beide leden y aftrekken krijgen we $x - y < 0$, wat neerkomt op de term y naar het andere lid brengen.

  $$x < y \iff x - y < 0$$

CC BY-NC-SA 4.0

- De tweede eigenschap zegt dat je beide leden van een ongelijkheid mag vermenigvuldigen

$$a < b \Rightarrow\ r \cdot a < r \cdot b$$

of delen

$$r \cdot a < r \cdot b \Rightarrow\ a < b$$

met eenzelfde strikt positief getal r. De ongelijkheid blijft hierbij behouden.
Als we bij de ongelijkheid $x < y$, met $y > 0$, beide leden delen door y krijgen we $\frac{x}{y} < 1$, wat neerkomt op de factor y naar het andere lid brengen.

$$x < y \iff \frac{x}{y} < 1 \text{ indien } y > 0$$

- De derde eigenschap zegt dat je beide leden van een ongelijkheid mag vermenigvuldigen

$$a < b \Rightarrow\ r \cdot a > r \cdot b$$

of delen

$$r \cdot a > r \cdot b \Rightarrow\ a < b$$

met eenzelfde strikt negatief getal r. De ongelijkheid draait hierbij om.

Met deze notatie en eigenschappen van de ongelijkheden kunnen we de oplossingsverzameling zoeken van ongelijkheden, namelijk de verzameling alle getallen die voldoen aan de ongelijkheid.

Ongelijkheden met veeltermen

We geven eerst een voorbeeld van het oplossen van een ongelijkheid met een eerstegraadsveelterm.

Voorbeeld 3 (Ongelijkheid eerstegraadsveelterm)**.**

1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $2x + 3 < 5$.

$$\begin{array}{rcll} 2x+3 & < & 5 & \\ & \Updownarrow & & (\ -3 \text{ optellen}) \\ 2x & < & 2 & \\ & \Updownarrow & & (\ \text{delen door } 2) \\ x & < & 1 & (x \text{ is kleiner dan } 1) \end{array}$$

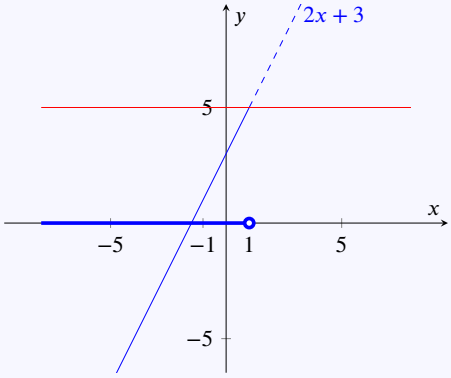
Dus is de oplossingsverzameling $V =]-\infty, 1\,[$.
Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -5 op te tellen

$$2x - 2 < 0$$

en dan het tekenverloop van de eerstegraadsfunctie $x \mapsto 2x - 2$ te gebruiken:

x	$\|\|$		1	
$2x-2$	$\|\|$	$-$	0	$+$

CC BY-NC-SA 4.0



2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $-2x + 3 < 5$.

$$\begin{array}{rcll} -2x+3 & < & 5 & \\ & \Updownarrow & & (\ -3 \text{ optellen}) \\ -2x & < & 2 & \\ & \Updownarrow & & (\ \text{delen door } -2\text{, ongelijkheid omkeren}) \\ x & > & -1 & (x \text{ is groter dan } -1) \end{array}$$

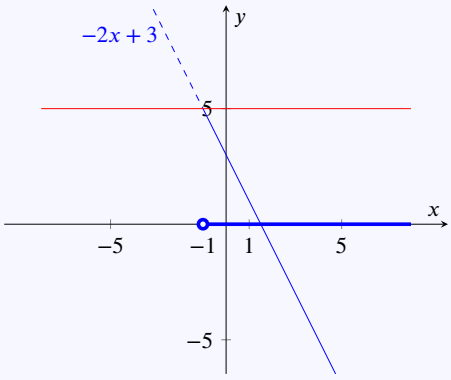
Dus is de oplossingsverzameling $V =]-1, +\infty[$.

Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -5 op te tellen

$$-2x - 2 < 0$$

en dan het tekenverloop van de eerstegraadsfunctie $x \mapsto -2x - 2$ te gebruiken:

x		-1	
$-2x-2$	$+$	0	$-$



Het oplossen van ongelijkheden met hogere graadsveeltermen kan door alle termen naar één lid te brengen en van de verkregen veelterm het tekenverloop op te stellen.

Ongelijkheden met veeltermbreuken

Net als bij rationale vergelijkingen stellen we eerst de bestaansvoorwaarde op.

Voorbeeld 4 (Oplossen van ongelijkheden)**.** Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\dfrac{x+4}{x-3} < 2$.

Ongelijkheden

We mogen *niet* zomaar linker- en rechterlid vermenigvuldigen met $x-3$, want we kennen het teken niet van $x-3$. We maken dus een *gevalsonderscheid*:

- Bestaansvoorwaarde: $x \neq 3$
- $x-3>0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$. De ongelijkheid blijft behouden omdat $x-3$ positief is.

$$\begin{array}{rcll} x+4 & < & 2x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen}) \\ 4 & < & x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen}) \\ 10 & < & x & (x \text{ is groter dan } 10) \end{array}$$

- $x-3<0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x-3$. De ongelijkheid keert om omdat $x-3$ negatief is.

$$\begin{array}{rcll} x+4 & > & 2x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ -x \text{ optellen}) \\ 4 & > & x-6 & \\ & \Updownarrow & & (\ +6 \text{ optellen}) \\ 10 & > & x & (x \text{ is kleiner dan } 10) \end{array}$$

Dus

- in het geval dat $x-3>0$ (of $x>3$), dan wordt de ongelijkheid $x>10$.
- in het geval dat $x-3<0$ (of $x<3$), dan wordt de ongelijkheid $x<10$. Dat is natuurlijk automatisch het geval: Als $x<3$ dan is ook $x<10$. Dus, als $x<3$ dan is automatisch $\dfrac{x+4}{x-3}<2$

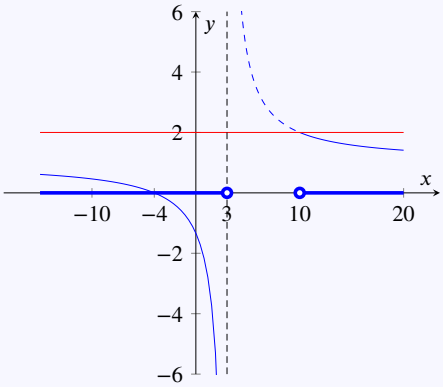
Samengevat: $\dfrac{x+4}{x-3}<2$ als $x<3$ of $x>10$.

Dus is de oplossingsverzameling is $V=]-\infty,3[\cup]10,+\infty[$.

Herinner je de notatie '$\cup$' om aan te duiden dat V de unie is van de twee halfrechten.

We kunnen dus ook zeggen: $\dfrac{x+4}{x-3}<2 \Leftrightarrow x\in]-\infty,3[\cup]10,+\infty[$.

Dit kunnen we ook zien op de grafiek van $\dfrac{x+4}{x-3}$:



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.34)

Deze ongelijkheid kan ook opgelost worden door eerst bij beide leden -2 op te tellen

$$\frac{x+4}{x-3} - 2 < 0$$

dan het linkerid op gelijke noemer te brengen

$$\frac{x+4-2(x-3)}{x-3} < 0$$

en dan het tekenverloop van de rationale functie $\frac{-x+10}{x-3}$ te onderzoeken.

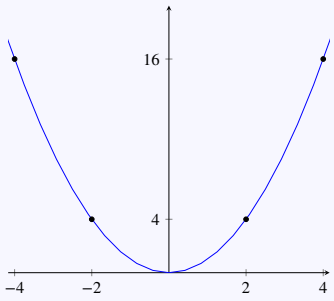
Bron: Schaum's outline series, Beginning Calculus, Second Edition, p.4

Functies toepassen op ongelijkheden

Zij $x, y \in \mathbb{R}$ en f een reële functie. We kunnen ons het volgende afvragen:

als $x < y$, kunnen we dan iets zinnigs zeggen over $f(x)$ en $f(y)$?

Voorbeeld 5. We onderzoeken bij wijze van voorbeeld het verband voor de functie $f(x) = x^2$.



Er geldt dan:

$2 < 4$	en	$2^2 < 4^2$
$-4 < -2$	en	$(-4)^2 > (-2)^2$
$-2 < 4$	en	$(-2)^2 < 4^2$
$-4 < 2$	en	$(-4)^2 > 2^2$
$-2 < 2$	en	$(-2)^2 = 2^2$

Als x en y beide positief zijn, wordt de orde behouden. Als x en y beide negatief zijn, draait de orde om. Als x en y een verschillend teken hebben, kunnen we niets zeggen over de relatie tussen x^2 en y^2: zowel $x^2 < y^2$, $x^2 > y^2$ als $x^2 = y^2$ zijn mogelijk. In dit geval mogen we dus niet kwadrateren.

We kunnen de verschillende gevallen samenvatten als:

Als $x, y \geq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$.

Als $x, y \leq 0$ dan geldt: $x < y \Leftrightarrow x^2 > y^2$.

Als $x < 0 < y$ zijn zowel $x^2 \leq y^2$ als $x^2 \geq y^2$ mogelijk.

Dit voorbeeld toont aan dat je erg moet opletten bij het al dan niet behouden blijven van ongelijkheden.

CC BY-NC-SA 4.0

Ongelijkheden

Definitie 1. Zij f een reële functie op een interval $I \subset \mathbb{R}$. Dan geldt:

$$\begin{array}{rcl} f \text{ is strikt stijgend op } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) < f(y)) \\ f \text{ is strikt dalend op } I & \iff & \text{voor alle } x, y \in I : (x < y \implies f(x) > f(y)) \end{array}$$

Dus, als je *weet* dat een bepaalde functie stijgt (omdat je de grafiek kent), dan weet je ook dat $f(x) < f(y)$ van zodra $x < y$.

Voorbeeld 6.

1. De functie $f : x \mapsto 2x + 3$ is stijgend, en dus is $f(2) < f(4)$.
2. De functie $f : x \mapsto -2x + 3$ is dalend, en dus is $f(2) > f(4)$.
3. De functie $f : x \mapsto x^2$ is stijgend op het interval $[0, 10]$, en dus is $f(2) < f(4)$.
4. De functie $f : x \mapsto x^2$ is dalend op het interval $[-10, 0]$, en dus is $f(-4) > f(-2)$.
5. De functie $f : x \mapsto \sqrt{x}$ is stijgend op het interval $[0, +\infty[$ en dus is $f(2) < f(4)$.

Oefening 1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid

1. $2 < \sqrt{x} \iff x \in$ | $]4, +\infty[$ | $]-4, +\infty[$ | $[0, +\infty[$ | $[0, 4[$ | geen oplossingen |
2. $-2 < \sqrt{x} \iff x \in$ | $]4, +\infty[$ | $]-4, +\infty[$ | $[0, +\infty[$ | $[0, 4[$ | geen oplossingen |
3. $2 < -\sqrt{x} \iff x \in$ | $]4, +\infty[$ | $]-4, +\infty[$ | $[0, +\infty[$ | $[0, 4[$ | geen oplossingen |
4. $-2 < -\sqrt{x} \iff x \in$ | $]4, +\infty[$ | $]-4, +\infty[$ | $[0, +\infty[$ | $[0, 4[$ | geen oplossingen |

Voorbeeld 7. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x-1} > 3$.

De uitdrukking onder het wortelteken moet positief zijn, anders heeft de opgave geen betekenis. Dit is de bestaansvoorwaarde:

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1\,.$$

We mogen kwadrateren omdat beide leden van de ongelijkheid positief zijn en de orde blijft bewaard. We krijgen dan $x - 1 > 9$.

Omdat $x - 1 > 9$ overeenstemt met $x > 10$, is aan de bestaansvoorwaarde $(x \geq 1)$ zeker voldaan.

De oplossingsverzameling is dus $V =]10, +\infty[$.

In volgende voorbeelden geven we enkel de methode, niet de gehele uitwerking.

Voorbeeld 8. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \leq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, geen oplossing

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 9. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\sqrt{x+2} \geq x$.

Bestaansvoorwaarde: $x \geq -2$

- geval $x \geq 0$: kwadrateren mag en orde blijft bewaard
- geval $x < 0$: kwadrateren mag niet en hoeft ook niet, ongelijkheid steeds voldaan

CC BY-NC-SA 4.0