Gelijkheden

Als voorbereiding op het bestuderen van ongelijkheden verdiepen we ons eerst even in het eenvoudigere geval van vergelijkingen. We onderzoeken meer bepaald een specifiek type probleem dat kan optreden bij het oplossen van sommige vergelijkingen en ongelijkheden: het introduceren van 'valse oplossingen'.

Voorbeeld 1. Beschouw de vergelijking

$$\sqrt{x+2} = x.$$

Het is niet onmiddellijk duidelijk hoe we deze vergelijking met een vierkantswortel kunnen oplossen. Een mogelijkheid is om *de vergelijking te kwadrateren*: als we beide leden van de vergelijking kwadrateren dan verdwijnt de vierkantswortel:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= x^2 \\ \Leftrightarrow\ x+2 &= x^2, \end{aligned}$$

en dit is een tweedegraadsvergelijking $x^2 - x - 2 = 0$, waarvan je kan berekenen dat de oplossingen -1 en 2 zijn. Mooi, daarmee hebben we de vergelijking opgelost. Of toch niet ?

Als we $x = 2$ invullen in $\sqrt{x+2} = x$ vinden we $\sqrt{4} = 2$, wat uiteraard klopt. Maar als we $x = -1$ invullen vinden we $\sqrt{1} = -1$. Maar $\sqrt{1}$ is helemaal niet gelijk aan -1, en $x = -1$ is dus *geen* oplossing van $\sqrt{x+2} = x$, ook al was het wel een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking.

Hoe kunnen we dit soort problemen voorkomen? Een vergelijking met een vierkantswortel zouden we graag oplossen zoals hierboven, namelijk door de vergelijking te kwadrateren. Kwadrateren introduceert echter mogelijk valse oplossingen, die we met behulp van zogenaamde *bestaansvoorwaarden* en *kwadrateringsvoorwaarden* kunnen uitsluiten. Bij het oplossen van een vergelijking met een vierkantswortel in, moeten we rekening houden met volgende voorwaarden:

- **Bestaansvoorwaarde**: wat onder de vierkantswortel staat moet positief zijn.
- **Kwadrateringsvoorwaarde**: wat gelijk is aan een vierkantswortel moet positief zijn.

Deze voorwaarden zorgen er voor dat je geen valse oplossingen krijgt.

Van waar komt die kwadrateringsvoorwaarde precies? We weten dat als $a = b$, dat dan zeker ook $a^2 = b^2$ (want de kwadraten van twee gelijke getallen zijn natuurlijk ook gelijk aan elkaar). Maar, als $a^2 = b^2$, dan volgt niet noodzakelijk dat $a = b$, want $a^2 = b^2$ geldt ook als $a = -b$. De kwadrateringsvoorwaarde sluit de extra 'valse' oplossing $a = -b$ uit.

Voorbeeld 2. Herneem vorig voorbeeld:

$$\sqrt{x+2} = x.$$

De **bestaansvoorwaarde** zegt dat wat onder de vierkantswortel staat positief moet zijn, oftewel dat $x + 2 \geq 0$. Dit kunnen we herschrijven als $x \geq -2$. Beide oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking (-1 en 2) voldoen aan deze voorwaarde.
De **kwadrateringsvoorwaarde** zegt dat wat gelijk is aan een vierkantswortel positief moet zijn. In dit geval is de vierkanstwortel gelijk aan x, en dus moet $x \geq 0$. Het getal 2 is groter dan nul, en is dan ook een oplossing van de vergelijking $\sqrt{x+2} = x$: het voldoet immers aan beide voorwaarden en is een oplossing van de gekwadrateerde vergelijking. Het getal -1 is echter niet groter dan 0, de kwadrateringsvoorwaarde is niet voldaan, en -1 is inderdaad geen oplossing van $\sqrt{x+2} = x$.

We hebben de situatie nu bekeken voor een specifiek geval. De kwadrateringsvoorwaarde is in het leven geroepen voor het oplossen van vergelijkingen met vierkantswortels, maar bestaansvoorwaarden komen in

CC BY-NC-SA 4.0

nog veel andere situaties voor, zoals bijvoorbeeld delen door iets dat nul kan worden.

Opmerking 1 (Andere voorbeelden van bestaansvoorwaarden)**.**

Bestaansvoorwaarden treden ook op in andere situaties, bijvoorbeeld:

- Het argument van de logaritme moet strikt positief zijn: de uitdrukking $\log x$ heeft enkel zin als $x > 0$.
- Het argument van de tangens mag niet van de vorm $\frac{\pi}{2} + k\pi$ zijn met $k \in \mathbb{Z}$. Dus de uitdrukking $\tan x$ is enkel zinvol voor $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

CC BY-NC-SA 4.0