Absolute waarde en ongelijkheden

Voor de absolute waarde worden volgende eigenschappen afgelezen op de reële rechte:

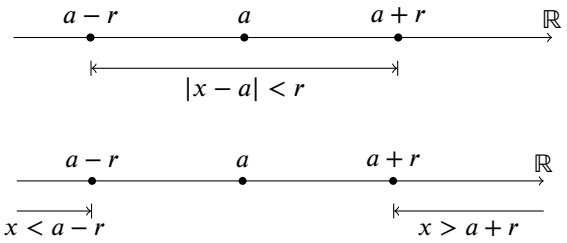
Eigenschap 1 (Basiseigenschappen absolute waarde)**.** Als $x, a \in \mathbb{R}$ en $r \in \mathbb{R}_0^+$, dan is

1) $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r \Leftrightarrow x \in]-r, r[$
   $\Leftrightarrow$ x ligt dichter bij 0 dan r

2) $|x| > r \Leftrightarrow x < -r$ **of** $r < x \Leftrightarrow x \notin [-r, r]$
   $\Leftrightarrow$ x ligt verder van 0 dan r

3) $|x-a| < r \Leftrightarrow -r < x-a < r \Leftrightarrow x \in]a-r, a+r[$
   $\Leftrightarrow a-r < x < a+r \Leftrightarrow$ x ligt dichter bij a dan r

4) $|x-a| > r \Leftrightarrow x-a < -r$ **of** $r < x-a \Leftrightarrow x \notin [a-r, a+r]$
   $\Leftrightarrow x < a-r$ **of** $a+r < x \Leftrightarrow$ x ligt verder van a dan r



Opmerking 1.

- Met deze eigenschappen kan je dus één ongelijkheid *met* een absolute waarde omzetten in een *dubbele* ongelijkheid *zonder* absolute waarde.
- Deze eigenschappen kunnen ook met $\leq$ geformuleerd worden, bijvoorbeeld

$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r \Leftrightarrow x \in [-r, r]$$

Voorbeeld 1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $\left|\frac{2x}{3}\right| < 1$.

Oplossingsverzameling: $V = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$

Uitwerking:

$$\begin{array}{rcll} \left|\frac{2x}{3}\right| & < & 1 & \\ & \Updownarrow & & \textit{(absolute waarde doorschuiven)} \\ \frac{|2||x|}{|3|} & < & 1 & \\ & \Updownarrow & & (|2| = 2, |3| = 3) \\ \frac{2|x|}{3} & < & 1 & \\ & \Updownarrow & & \textit{maal } \frac{3}{2} > 0 \\ |x| & < & \frac{3}{2} & \\ & \Updownarrow & & \\ -\frac{3}{2} < & x & < \frac{3}{2} & \end{array}$$

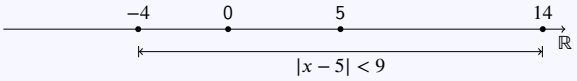
CC BY-NC-SA 4.0

De oplossingsverzameling is dus $V = \left]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right[$.

Voorbeeld 2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x-5| < 9$.

$$
\begin{array}{rcll}
|x-5| & < & 9 & \text{(de afstand tussen } x \text{ en } 5 \text{ is kleiner dan } 9) \\
 & \Updownarrow & & (|x-a| < r \iff -r < x-a < r) \\
-9 < & x-5 & < 9 & (x-5 \text{ ligt tussen } -9 \text{ en } 9) \\
 & \Updownarrow & & (+5 \text{ optellen}) \\
-4 < & x & < 14 & (x \text{ ligt tussen } -4 \text{ en } 14)
\end{array}
$$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-4, 14[$.



Oefening 1.

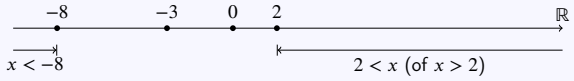
1. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|2x-5| < 9$. Oplossingsverzameling: ... ...

2. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|3-2x| < 1$. Oplossingsverzameling: ... ...

Voorbeeld 3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x+3| > 5$

$$
\begin{array}{rcll}
|x+3| & > & 5 & \text{(de afstand tussen } x \text{ en } -3 \text{ is groter dan } 5) \\
 & \Updownarrow & & (|x-a| > r \iff x-a < -r \text{ of } r < x-a) \\
x+3 < -5 & \text{of} & 5 < x+3 & \\
 & \Updownarrow & & (-3 \text{ optellen}) \\
x < -8 & \text{of} & 2 < x &
\end{array}
$$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-\infty, -8[\cup]2, +\infty[$.



Voorbeeld 4. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan $|x^2-3| < 9$.

Oplossingsverzameling: $V = \left]-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right[$

CC BY-NC-SA 4.0

Uitwerking:

$$
\begin{array}{rcll}
|x^2-3| & < & 9 & \text{de afstand tussen } x^2 \text{ en } 3 \text{ is kleiner dan } 9 \\
 & \Updownarrow & & (|x-a|<r \iff -r<x-a<r) \\
-9< & x^2-3 & <9 & \\
 & \Updownarrow & & (\ +3 \text{ optellen}) \\
-6< & x^2 & <12 & \\
 & \Updownarrow & & -6<x^2 \text{ is automatisch voldaan en is dus geen voorwaarde} \\
x^2 & < & 12 & \\
 & \Updownarrow & & \text{beide leden pos., worteltrekken mag} \\
\sqrt{x^2} & < & \sqrt{12} & (\sqrt{12}=2\sqrt{3}) \\
 & \Updownarrow & & (\sqrt{x^2}=|x|) \\
|x| & < & 2\sqrt{3} & \\
 & \Updownarrow & & (|x|<r \iff -r<x<r) \\
-2\sqrt{3}< & x & <2\sqrt{3}. &
\end{array}
$$

De oplossingsverzameling is dus $V = \left]-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right[$.

Ter referentie vermelden we hier nog enkele ongelijkheden met absolute waardes die behoren tot de vlakke meetkunde:

Eigenschap 2. Als $x, y, z \in \mathbb{R}$, dan is

(a) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (**eerste driehoeksongelijkheid**)

(b) $|x-y| \leqslant |x-z| + |z-y|$ (**eerste driehoeksongelijkheid; *equivalente vorm***)

(c) $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leqslant |x-y|$ (**tweede driehoeksongelijkheid)**

Opmerking 2.

Uit (a) volgt ook onmiddellijk dat $|x-y| \leq |x| + |y|$ (want $x - y = x + (-y)$ en $|y| = |-y|$), maar natuurlijk geldt NIET dat ~~$|x-y| \leq |x| - |y|$~~.

CC BY-NC-SA 4.0