Bewijstechnieken: volledige inductie

De natuurlijke getallen hebben een opvallende gelijkenis met dominostenen. Iedereen kent recordpogingen om door één rechtopstaande dominosteen om te duwen een zo lang mogelijke keten van aansluitende dominostenen te laten omvallen. De dominostenen vallen zodra de eerste steen valt omdat de vorige dominosteen telkens de val veroorzaakt van minstens één volgende steen. In het eenvoudige geval van één lange keten zonder vertakkingen, kan het 'principe van de vallende dominostenen' als volgt worden samengevat:

Stelling 1 (Principe van de vallende dominostenen)**.**

Een rij dominostenen, opgesteld zonder vertakkingen en genummerd met getallen $k = 1, 2, 3, \ldots$ zal volledig neervallen zodra

(Startzet) de eerste steen met nummer $k = 1$ wordt omgegooid.

(Automatische vervolgzetten) de stenen zó staan dat voor elke k geldt dat als de k-de steen valt, ook de $(k+1)$-de steen omvalt.

Met natuurlijke getallen kan men een gelijkaardig spel spelen. Stel dat je wilt aantonen dat de som van de eerste n getallen gelijk is aan $n(n+1)/2$. Dan zou je dit voor iedere waarde van n moeten nagaan. We zouden hierdoor oneindig lang bezig zijn. We introduceren nu een techniek om dergelijke resultaten toch te kunnen aantonen. De verzameling getallen $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ kan je immers beschouwen als een oneindige keten natuurlijke getallen die begint bij 1 en waar elk natuurlijk getal k een unieke opvolger $k+1$ heeft. Het equivalent van het principe van de vallende dominostenen is het wiskundige principe van volledige inductie:

Stelling 2 (Het principe van volledige inductie)**.**

Een bewering $P(n)$ die afhangt van n is waar voor elk natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$ zodra

(Basisstap) de uitspraak geldt voor het eerste getal: $P(1)$ is waar

(Inductiestap) de uitspraak zodanig is dat voor elke $k \in \mathbb{N}_0$ geldt: als $P(k)$ waar is, dan is ook $P(k+1)$ waar.

Het is eenvoudig in te zien waarom het principe van volledige inductie werkt: we weten uit de basisstap dat $P(1)$ waar is. We passen dan de inductiestap toe voor $k = 1$, en vinden dat uit $P(1)$ volgt dat $P(1+1) = P(2)$ ook waar is. Maar dan is, opnieuw wegens de inductiestap ook $P(2+1) = P(3)$ waar, en dus ook $P(3+1) = P(4)$, en dus ook $P(4+1) = P(5)$ en zo verder. De uitspraak $P(n)$ is dus zeker waar voor *elk* natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}_0$.

Een formeel wiskundig *bewijs* van het principe van volledige inductie geven we hier niet.

Het belang van het principe van volledige inductie is dat het een erg krachtige manier oplevert om een aantal wiskundige formules en eigenschappen te bewijzen.

Een **bewijs met volledige inductie** valt typisch uiteen in drie delen.

- De **basisstap**: je bewijst dat $P(1)$ inderdaad waar is. In vele gevallen is dat eerder eenvoudig, maar het is erg belangrijk dat het gebeurt. Vergelijk het met het omgooien van de eerste dominosteen: het is erg eenvoudig, maar zolang het niet gedaan wordt, gebeurt er niets.
- De **inductiestap**: je bewijst dat de implicatie $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ waar is voor elke $k \in \mathbb{N}_0$. In het bewijs van de inductiestap neem je dus aan dat $P(k)$ waar is (deze aanname heet de **inductiehypothese**), en *met behulp van* die inductiehypothese $P(k)$ bewijs je dan dat ook $P(k+1)$ waar is.
- De **conclusie**: je roept het principe van volledige inductie aan om te concluderen dat $P(n)$ waar is voor elke $n \in \mathbb{N}_0$. Merk op dat deze stap in elk bewijs precies hetzelfde is, maar het is toch erg belangrijk steeds duidelijk te vermelden dat het inderdaad dankzij het principe van volledige inductie is dat je bewijs nu volledig is.

CC BY-NC-SA 4.0

Hier is een eenvoudig voorbeeld:

Voorbeeld 1. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n het getal $n^2 + n$ even is.

Bewijs

- **Basisstap**: Voor $n = 1$ is $n^2 + n = 1^2 + 1 = 2$ en dit is even.
- **Inductiestap**: Neem aan (inductiehypothese) dat voor een natuurlijk getal k geldt $k^2 + k$ even is. We bewijzen dan dat ook voor $k + 1$ geldt dat $(k + 1)^2 + (k + 1)$ even is. We berekenen

$$(k + 1)^2 + (k + 1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = (k^2 + k) + 2(k + 1).$$

  Duidelijk is dat $2(k + 1)$ even is. Wegens de inductiehypothese is ook $k^2 + k$ even, en dus is ook hun som $(k^2 + k) + 2(k + 1)$ even. Hiermee is de inductiestap bewezen.
- **Conclusie**: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, volgt met het principe van volledige inductie dat $n^2 + n$ een even getal is voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

■

Opmerking 1.

- Deze eigenschap kan natuurlijk ook op andere manieren bewezen worden zonder gebruik te maken van volledige inductie. Zo is $n^2 + n = n(n + 1)$ het product van 2 opeenvolgende getallen n en $n + 1$ en dus moet één van deze getallen even zijn. Bijgevolg is $n^2 + n$ even.
- Als de eigenschap $P(n)$ geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$, dan wordt de basisstap: $P(0)$ is waar.
  Als de eigenschap $P(n)$ enkel geldt voor alle natuurlijke getallen strikt groter dan 5, dan wordt de basisstap: $P(6)$ is waar. De inductiestap kan dan ook telkens worden beperkt tot getallen groter dan de basisstap.

CC BY-NC-SA 4.0