Verzamelingen

Een belangrijk aspect van de wiskunde is het *ontdekken* of *introduceren* van *structuur* in allerlei dingen. Dat werkt zo voor hoeveelheden, groottes, vormen, configuraties, uitspraken enzovoort. De eenvoudigste vorm van structureren is gewoon dingen samennemen, dat heet 'verzamelen'.

Definitie 1.

- Een **verzameling** is een grondbegrip in de wiskunde. Een verzameling wordt *enkel* en *volledig* bepaald door de objecten die ertoe behoren. We geven hier geen exacte definities of axioma's.

  Meestal noteren we een verzameling met een hoofdletter zoals A, B of X. Soms krijgen verzamelingen standaard notaties, zoals de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ of de reële getallen $\mathbb{R}$.

- De **elementen** van een verzameling zijn de objecten waaruit die verzameling bestaat. Elementen worden meestal aangeduid met kleine letters $a, b, x, y \ldots$.
  Notatie: $a \in A$ betekent "a behoort tot A" of "a is een element van A".
  Notatie: $a \notin A$ betekent "a behoort *niet* tot A" of "a is *geen* element van A".
  Notatie: $A = \{a, b, c\}$ betekent "verzameling A bestaat uit de elementen a, b en c".

- Twee verzamelingen A en B zijn **gelijk**, genoteerd $A = B$, als A en B dezelfde elementen bevatten. Hieruit volgt bijvoorbeeld dat de elementen van een verzameling geen 'volgorde' hebben en dat er ook geen 'dubbels' in een verzameling kunnen zitten. De verzamelingen $\{a, b\}$ en $\{b, a\}$ zijn dus aan elkaar gelijk want ze bestaan beide uit de elementen a en b. Ook de verzamelingen $\{a, b\}$ en $\{a, a, b\}$ zijn aan elkaar gelijk.

- Een **lege verzameling** is een verzameling *zonder elementen*. We noteren ze als $\emptyset \overset{\text{def}}{=} \{\}$.

- Een verzameling A is een **deelverzameling** van een verzameling B als en slechts als elk element van A ook tot B behoort. Zo zijn $\{a\}$ en $\{a, b\}$ deelverzamelingen van $\{a, b, c\}$, maar a en $\{a, d\}$ niet.
  Notatie: $A \subseteq B$, of ook $A \subset B$, betekent "A is een deelverzameling van B".

  Merk op dat $A \subseteq B$ benadrukt dat de verzamelingen ook gelijk mogen zijn. In deze cursus heeft het symbool $\subset$ precies dezelfde betekenis als $\subseteq$. Voor elke verzameling A geldt dus dat $A \subseteq A$, maar *ook* $A \subset A$.
  Om historische redenen verschilt deze afspraak bij de verwante symbolen $<$ en $\leqslant$. Het symbool $<$ betekent *strikt kleiner dan*, terwijl $\leqslant$ *kleiner dan of gelijk aan* betekent.

- Een **eindige verzameling** is een verzameling die slechts een eindig aantal elementen bevat.
  Notatie: $\#A$ betekent "het aantal elementen van A".
  Dus als $A = \{1, 2\}$ dan is $\#A = \#\{1, 2\} = 2$.
  Een **singleton** is een verzameling met *één* element en een **paar** is een verzameling met *twee* elementen.

Voorbeeld 1.

Alle natuurlijke getallen vormen een verzameling. De getallen 42 en 1302 zijn elementen van die verzameling. De even getallen, de priemgetallen en de delers van 24 vormen telkens een deelverzameling.

Opmerking 1. Het is belangrijk om goed onderscheid te maken tussen de symbolen $\in$ en $\subseteq$. Ze hebben een verschillende betekenis, maar zijn wel nauw verwant want

$$x \in A \;\Leftrightarrow\; \{x\} \subseteq A.$$

Definitie 2 (Notatie en definitie voor concrete verzamelingen)**.**

Een verzameling wordt in de praktijk gegeven door één van volgende mogelijkheden:

CC BY-NC-SA 4.0

(a) een **opsomming**, waarbij de elementen worden *opgesomd* tussen accolades:

- $A = \{1, 2, 3\}$, de verzameling met de getallen $1, 2$ en 3.
- $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, de verzameling van de cijfers 0 t.e.m 9.
- $C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$, de (oneindige) verzameling van de even natuurlijke getallen.

Er geldt dat $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$.

(b) een **omschrijving**, waarbij de elementen aan een *voorwaarde* moeten voldoen:

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is deelbaar door } 2\}$ is dezelfde verzameling C van de even natuurlijke getallen als hierboven. Je leest dit als: 'C is de verzameling natuurlijke getallen x *waarvoor geldt dat* x deelbaar is door 2'.

Een rechte streep | tussen accolades lees je als 'waarvoor geldt dat'.

(c) een **constructieve definitie**, waarbij elementen worden gegeven door een *formule*:

$D = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, de verzameling van alle kwadraten van natuurlijke getallen.

Uitweiding 1 (Opmerking)**.** Je kan opmerken dat een getal dus behoort tot D als het kan geschreven worden als n^2 voor een zeker natuurlijk getal n. Dus kunnen we ook volgende omschrijvingen geven:

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is een kwadraat}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ er bestaat een getal } x \in \mathbb{N} \text{ zodat } x^2 = n\}.$$

De verzameling C van de even natuurlijke getallen kunnen we met deze methode dus ook schrijven als

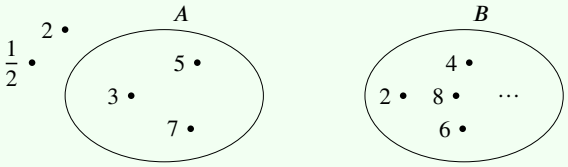
$$C = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

De naam van de variabele binnen in de accolades heeft immers geen belang.

(d) een **Venndiagram**:

Een *Venndiagram* is een gesloten kromme (de 'verzameling') waarbinnen de elementen van A door stippen worden voorgesteld. Dingen die geen elementen van A zijn krijgen een stip *buiten* de kromme. We tekenen geen stippen *op* de kromme. Niet alle elementen van A moeten worden weergegeven door een stip, maar in dat geval zetten we drie puntjes in de verzameling. De naam van de verzameling wordt meestal buiten de kromme geplaatst.

Voorbeelden: $A = \{3, 5, 7\}$ en $B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$



Sommige veel voorkomende verzamelingen krijgen een speciale notatie:

Definitie 3.

(a) Volgende getallenverzamelingen hebben een standaardnotatie:

- $\mathbb{N}$ is de verzameling van natuurlijke getallen $0, 1, 2, 3, \ldots$.
- $\mathbb{Z}$ is de verzameling van gehele getallen $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$.

CC BY-NC-SA 4.0

- $\mathbb{Q}$ is de verzameling van rationale getallen (breuken).
- $\mathbb{R}$ is de verzameling van reële getallen (kommagetallen).
- $\mathbb{C}$ is de verzameling van complexe getallen.

Er geldt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

(b) De verzameling van de natuurlijke getallen zonder 0 wordt genoteerd als:

$$\mathbb{N}_0 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}_0, \mathbb{Q}_0$ en $\mathbb{R}_0$ gedefinieerd.

(c) De verzameling van de (strikt) positieve reële getallen wordt genoteerd als:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | \ x \geqslant 0\} \quad \text{en} \quad \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} | \ x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^+ | \ x \neq 0\}.$$

Op dezelfde manier worden $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$ gedefinieerd.

Pas op: Engelstalige handboeken en websites hebben dikwijls een *omgekeerde afspraak*: $\mathbb{N}$ zijn dan de natuurlijke getallen *zonder nul*, en $\mathbb{N}_0$ zijn de natuurlijke getallen *inclusief nul*.
Sommige handboeken gebruiken notaties als $\mathbb{N}_{>0}, \mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{\leq 0}$, met de voor zich sprekende betekenis.

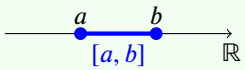
Andere belangrijke voorbeelden van verzamelingen zijn de intervallen:

Definitie 4 (Intervallen)**.** Voor reële getallen a en b, met $a < b$, definiëren we

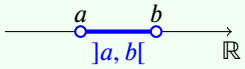
het	**gesloten interval**	$[a, b]$: de getallen tussen a en b met a en b inbegrepen.
het	**open interval**	$]a, b[$: de getallen tussen a en b, met a en b *niet* inbegrepen.
het	**half-open interval**	$[a, b[$: de getallen tussen a en b, met a inbegrepen en b *niet*.
het	**half-open interval**	$]a, b]$: de getallen tussen a en b, met a *niet* inbegrepen en b wel.

In formules wordt dat:

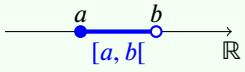
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ het gesloten interval $[a, b]$



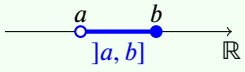
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ het open interval $]a, b[$



$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ het half-open interval $[a, b[$

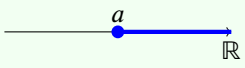


$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ het half-open interval $]a, b]$

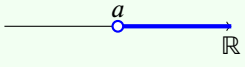


We breiden de notatie ook uit voor halfrechten of 'oneindige intervallen':

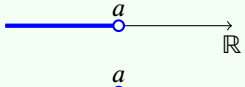
$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$



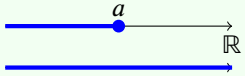
$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$



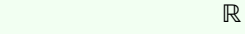
$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



$]-\infty, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$



CC BY-NC-SA 4.0

Merk op dat $+\infty$ en $-\infty$ zelf nooit tot het interval behoren, want $+\infty$ en $-\infty$ zijn geen reële getallen.

In Engelstalige handboeken wordt voor het 'open teken' soms een rond haakje gebruikt. De notatie (a, b) komt dan overeen met $]a, b[$.

Opmerking 2. Let op het verschil in notatie:

- De verzameling $\{2, 3\}$ bevat enkel de twee getallen 2 en 3.
- De verzameling $[2, 3]$ is een gesloten interval en bevat oneindig veel getallen, namelijk alle reële getallen tussen 2 en 3, 2 en 3 inbegrepen.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.53)