Verzamelingen

Een belangrijk aspect van de wiskunde is het *ontdekken* of *introduceren* van *structuur* in allerlei dingen om vervolgens die structuur verder te bestuderen. Dat werkt zo voor hoeveelheden, groottes, vormen, configuraties, uitspraken enzovoort.

De eenvoudigste vorm van structureren is gewoon dingen samennemen, dat heet 'verzamelen'. De wiskundige studie daarvan is de 'verzamelingenleer'. Het is een hoogst merkwaardig feit dat een zodanig eenvoudig idee als het 'verzamelen van verschillende dingen in één nieuw ding dat we dan een verzameling noemen' een uiterst krachtige taal oplevert om op effectieve wijze over allerlei erg complexe dingen te kunnen spreken en denken.

Definitie 1.

- Een **verzameling** is een grondbegrip in de wiskunde. We zullen hier niet ingaan op exacte definities of axioma's. Volgens een intuïtieve definitie kan men een verzameling beschouwen als een geheel van objecten zodanig dat
  - men van *elk* object ondubbelzinnig kan zeggen of het al dan niet tot dat geheel behoort, en
  - men elk object ondubbelzinnig kan identificeren. Dit betekent dat men moet kunnen nagaan wanneer twee objecten aan elkaar gelijk zijn en dus in feite hetzelfde object zijn. Als men dat niet zou kunnen, zou immers zelfs het tellen van de elementen al een probleem zijn.

  Dit betekent dat een verzameling *enkel* en *volledig* bepaald is door de objecten die ertoe behoren.

  Meestal noteren we een verzameling met een hoofdletter, bijvoorbeeld A, B of X. Sommige verzamelingen hebben vaste namen en notaties, zoals de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ of de reële getallen $\mathbb{R}$.
- De objecten die tot een verzameling behoren, noemt men de **elementen** van die verzameling. Ze worden meestal aangeduid met kleine letters $a, b, x, y \ldots$. Als een object a tot een verzameling A behoort noteert men $a \in A$, en men zegt "a is een element van A". Als een object b niet tot A behoort, noteert men $b \notin A$. De verzameling A bestaande uit de elementen a, b en c schrijft men met accolades: $A = \{a, b, c\}$.
- Twee verzamelingen A en B zijn **gelijk**, genoteerd $A = B$, als A en B dezelfde elementen hebben. Hieruit volgt bijvoorbeeld dat de elementen van een verzameling geen 'volgorde' hebben en dat er ook geen 'dubbels' in een verzameling kunnen zitten. De verzamelingen met de elementen $\{a, a, b\}, \{a, b\}$ en $\{b, a\}$ zijn wegens bovenstaande definitie aan elkaar gelijk omdat ze dezelfde elementen hebben.
- Een **lege verzameling** is een verzameling *zonder elementen*. Omdat verzamelingen gelijk zijn als ze gelijke elementen hebben, is er maar één lege verzameling. We noteren ze als $\emptyset \stackrel{\text{def}}{=} \{\}$.
- Een verzameling A is een **deelverzameling** van een verzameling B als en slechts als elk element van A ook tot B behoort. We noteren dat als $A \subseteq B$ of ook $A \subset B$. De notatie $A \subseteq B$ benadrukt dat de verzamelingen ook gelijk mogen zijn.

  Merk op dat om historische redenen de notatie hier *verschilt* van de verwante symbolen $<$ en $\leqslant$. Het symbool $<$ betekent *strikt kleiner dan*, terwijl $\leqslant$ *kleiner dan of gelijk aan* betekent. Bij verzamelingen daarentegen heeft het symbool $\subset$ precies dezelfde betekenis als $\subseteq$, en er geldt dus *wel* dat $A \subset A$.
- We schrijven $A \not\subseteq B$ of $A \not\subset B$ om aan te duiden dat A geen deelverzameling van B is.

CC BY-NC-SA 4.0

We noteren $A \subsetneq B$ als geldt dat $A \subseteq B$ maar $A \neq B$.

Dus als $A \subsetneq B$ dan is toch $A \subseteq B$, maar als $A \not\subseteq B$ dan geldt (per definitie) dat *niet* $A \subseteq B$.

We noemen A een **echte deelverzameling** van B als $A \subsetneq B$ en $A \neq \emptyset$. Dus, elke verzameling heeft de lege verzameling en zichzelf als *onechte* deelverzamelingen. (Dat zijn dus *twee* onechte deelverzamelingen, behalve in het geval $B = \emptyset$.)

– Een verzameling A wordt **eindig** genoemd als ze slechts een eindig aantal elementen bevat. Dat aantal elementen noteert men dan met $\#A$. Dus als $A = \{1, 2, 3\}$ dan is $\#A = \#\{1, 2, 3\} = 3$. Een **singleton** is een verzameling met één element en een **paar** is een verzameling met twee elementen.

Voorbeeld 1 (Basisvoorbeelden)**.**

- Alle leerlingen van een school vormen een verzameling. Leerlingen An en Bart zijn elementen van die verzameling, leerkracht Carla niet. Leerkracht Carla is wel een element van de verzameling van de leerkrachten van die school. De verzameling leerlingen heeft erg veel deelverzamelingen: de leerlingen van Klas 1A vormen samen een deelverzameling, maar ook alle meisjes, alle leerlingen met een bril, alle leerlingen die met de fiets komen, en alle leerlingen die al een Nobelprijs Economie hebben behaald vormen telkens een deelverzameling. De laatste deelverzameling van leerling-Nobelprijswinnaars is op dit ogenblik voor alle Vlaamse scholen *leeg*: er zijn zo (nog) geen leerlingen.
- Alle natuurlijke getallen vormen een verzameling. De getallen 42 en 1302 zijn elementen van die verzameling. De even getallen, de priemgetallen en de delers van 24 vormen telkens een deelverzameling.

Er zijn verschillende manieren om een concrete verzameling te definiëren.

Definitie 2 (Notatie en definitie voor concrete verzamelingen)**.**

Een verzameling wordt in de praktijk gegeven door

(a) een **opsomming**: de elementen worden opgesomd tussen accolades.

Voorbeelden:

- De verzameling A van getallen $1, 2$ en 3 is $A = \{1, 2, 3\}$.
- De verzameling B van de arabische cijfers is $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- De verzameling C van de even natuurlijke getallen is $C = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$, waarbij de puntjes 'enzovoorts' betekenen. Er geldt dat $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$.

(b) een **omschrijving**: de elementen moeten voldoen aan een voorwaarde

Voorbeeld: de vorige verzameling C van de even natuurlijke getallen, kan ook als volgt worden geschreven:

$$C = \{x \mid x \text{ is een natuurlijk getal deelbaar door } 2\}$$

of

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ is deelbaar door } 2\}.$$

Je leest dit als
"C is de verzameling van de x *waarvoor geldt dat* x een natuurlijk getal is deelbaar door 2" of
"C is de verzameling van de natuurlijke getallen x *waarvoor geldt dat* x deelbaar is door 2".

(c) een **constructieve definitie**: elementen gegeven door een formule

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld:

$$D = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

is de verzameling van alle kwadraten van natuurlijke getallen. Je kan opmerken dat een getal dus behoort tot D als het kan geschreven worden als n^2 voor een zeker natuurlijk getal n. Dus kunnen we ook volgende omschrijvingen geven:

$$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is een kwadraat}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ er bestaat een getal } x \in \mathbb{N} \text{ zodat } x^2 = n\}.$$

De verzameling C van de even natuurlijke getallen kunnen we met deze methode dus ook schrijven als

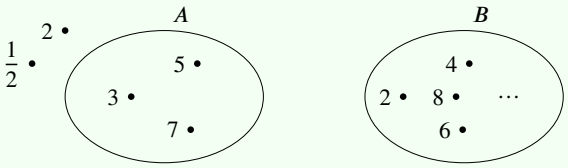
$$C = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

De naam van de variabele binnen in de accolades heeft immers geen belang.

(d) een **Venndiagram**:

Een *Venndiagram* is een gesloten kromme (de 'verzameling') waarbinnen de elementen van A door stippen worden voorgesteld. Dingen die geen elementen van A zijn krijgen een stip *buiten* de kromme. We tekenen geen stippen *op* de kromme. Niet alle elementen van A moeten worden weergegeven door een stip, maar in dat geval zetten we drie puntjes in de verzameling. De naam van de verzameling wordt meestal buiten de kromme geplaatst.

Voorbeelden: $A = \{3, 5, 7\}$ en $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$



Opmerking 1.

(a) We gebruiken dus accolades { en } om verzamelingen te noteren. We herhalen:

- De volgorde van elementen heeft geen belang: $\{a, b\} = \{b, a\}$.
- Eventuele dubbels hebben geen belang: $\{a, a\} = \{a\} = \{a, a, a\}$.
- Een rechte streep | tussen de accolades lees je als 'waarvoor geldt dat'.

(b) Sommige veel voorkomende verzamelingen krijgen een speciale notatie:

(i) De getallenverzamelingen hebben een standaardnotatie:

- $\mathbb{N}$ is de verzameling van natuurlijke getallen.
- $\mathbb{Z}$ is de verzameling van gehele getallen.
- $\mathbb{Q}$ is de verzameling van rationale getallen (breuken).
- $\mathbb{R}$ is de verzameling van reële getallen.
- $\mathbb{C}$ is de verzameling van complexe getallen.

Er geldt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

(ii) De verzameling van de natuurlijke getallen zonder 0:

$$\mathbb{N}_0 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

Er zijn analoge notaties $\mathbb{Z}_0, \mathbb{R}_0$ etc.

CC BY-NC-SA 4.0

(iii) De verzameling van de (strikt) positieve reële getallen:

$$\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} |\ x \geqslant 0\} \quad \text{en} \quad \mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} |\ x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^+ |\ x \neq 0\}.$$

Met analoge notaties voor de andere getallenverzamelingen $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}^+$ etc.

(iv) De *intervallen* van reële getallen:

- $]2,3[$: de reële getallen strikt groter dan 2 en strikt kleiner dan 3.
- $[1,7[$: de reële getallen groter of gelijk aan 1 en strikt kleiner dan 7. Dus

$$]2,3[= \{x \in \mathbb{R} |\ 2 < x < 3\} \quad \text{en} \quad [1,7[= \{x \in \mathbb{R} |\ 1 \leq x < 7\}.$$

(v) De even en de oneven getallen:

$$2\mathbb{N} = \{2n |\ n \in \mathbb{N}\} \quad \text{en} \quad 2\mathbb{N}+1 = \{2n+1 |\ n \in \mathbb{N}\}.$$

(c) De lege verzameling is een deelverzameling van elke verzameling A. (Inderdaad, de lege verzameling bevat geen elementen, we kunnen dus geen element in de lege verzameling vinden dat niet tot A behoort, dus elk element in de lege verzameling behoort tot A.)

(d) Uit de definities volgt dat

$$A = B \ \Leftrightarrow\ A \subseteq B \text{ en } B \subseteq A.$$

Dit betekent dat we de gelijkheid van twee verzamelingen A en B kunnen aantonen door $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$ te bewijzen. Deze techniek wordt erg dikwijls gebruikt om een gelijkheid van verzamelingen aan te tonen.

(e) Het is belangrijk om goed onderscheid te maken tussen de symbolen $\in$ en $\subseteq$. Ze hebben een verschillende betekenis, maar zijn wel nauw verwant want

$$x \in A \ \Leftrightarrow\ \{x\} \subseteq A.$$

Voorbeeld 2. De verzameling van de natuurlijke getallen kan geschreven worden als :

$\mathbb{N}$	$= \{0,1,2,3,\ldots\}$	opsomming	de lijst van natuurlijke getallen
	$= \{\ x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\ \}$	omschrijving	de gehele getallen waarvoor geldt dat ze positief zijn
	$= \{\ \lvert x \rvert \mid x \in \mathbb{Z}\ \}$	constructief	de verzameling van de absolute waardes van de gehele getallen
	$= \mathbb{Z}_{\geq 0}$		een alternatieve notatie voor de positieve gehele getallen

Voorbeeld 3. De verzameling van de even getallen kan als volgt worden opgeschreven:

$\{0,2,4,6,\ldots\}$	opsomming
$\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ is even }\}$	omschrijving
$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m\}$	omschrijving (in formule)
$\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$	constructief

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.32)