Kwantoren

De betekenis van sommige beweringen hangt af van de context: de betekenis van de zin "hij is president van Amerika"wordt bepaald door welke 'hij' precies wordt bedoeld. In de wiskunde hangt de waarheidswaarde van een bewering als 'n is even' af van welke n precies wordt bedoeld.

Een **predicaat** is een zinvolle mededelende zin met **vrije variabelen**. Deze vrije variabelen worden voorgesteld met letters (n, x, ...). Kwantoren gaan de vrije variabelen binden, de vrije variabelen worden zo **gebonden variabelen**.

Voor de predicaten

(a) $n^2 = 4$ (b) $n^2 = -4$ (c) $n^2 \geq 0$

is (a) $n^2 = 4$ enkel waar als $n = 2$ of $n = -2$, terwijl (b) $n^2 = -4$ voor geen enkel natuurlijk getal n waar is (maar wel voor de complexe getallen $\pm 2i$), en (c) $n^2 \geq 0$ is waar voor alle natuurlijke getallen n (maar niet voor bijvoorbeeld het complexe getal i, want $i^2 = -1 < 0$).

Er zijn essentieel drie verschillende manieren om een dergelijke 'vrije variabele n' te 'binden', dus vast te leggen. We kunnen bedoelen dat een predicaat al dan niet moet gelden voor

- één *concrete* waarde: $n = 2$, of $n = 6$
- *alle* mogelijke waarden van n (eventueel enkel van een bepaald type)
- *minstens één* waarde van n (eventueel van een bepaald type)

De predicaten worden pas waar of onwaar van zodra de vrije variabele niet meer vrij zijn, maar gebonden worden door kwantoren. De twee laatste gevallen kunnen we uitdrukken met "voor alle" en "er bestaat". Dit geeft aan *voor hoeveel* waarden (dus voor welke *kwantiteit* van waarden) het predicaat zou moeten gelden: voor allemaal of voor minstens één. Men noemt ze in de logica daarom **kwantoren** en men voert volgende notaties in:

Definitie 1.

Als $p(a)$ een predicaat is dat afhangt van een variabele a, en A een verzameling, dan betekent

$\forall a \in A : p(a)$ *voor elk* element a van A geldt $p(a)$

$\exists a \in A : p(a)$ *er bestaat (minstens) een* element a van A waarvoor $p(a)$ geldt

Hierbij noemen we

$\forall$ de **universele kwantor** of **alkwantor**
$\exists$ de **existentiële kwantor** of **bestaanskwantor**

Opmerking 1.

- We schrijven de kwantor in echte formules altijd vóór het predicaat, en dus niet ~~$p(a), \forall a \in A$~~. Maar, in een meer informele context schrijven we soms toch uitdrukkingen als

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

- In sommige handboeken schrijft men *altijd* haakjes rond een kwantor $(\forall x) : p(x)$, en dan laat men de dubbele punt soms weg $(\forall x)p(x)$. Sommigen gebruiken een komma: $\forall x, p(x)$
- De uitspraken $\forall a \in A : p(a)$ en $\forall x \in A : p(x)$ betekenen precies hetzelfde, dus de *naam* (letterkeuze) van de variabele heeft geen belang.

Met deze notaties kunnen we nu compact schrijven

CC BY-NC-SA 4.0

- $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 4$ voor 'er bestaat een natuurlijk getal waarvan het kwadraat gelijk is aan 4'. (waar)
- $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 = 4$ voor 'alle natuurlijke getallen hebben als kwadraat 4'. (niet waar)
- $\forall n \in \mathbb{Z} : n^2 \geq 0$ voor 'alle gehele getallen hebben een positief kwadraat'. (waar)

Het is belangrijk dat je deze uitdrukkingen met kwantoren spontaan leert lezen als volwaardige zinnen.

0.1 Negatie van kwantoren

Er is een interessante wisselwerking tussen kwantoren en ontkenningen: beweren dat *niet iedereen* geslaagd is, betekent dat er *iemand is* die niet geslaagd is. En beweren dat *iedereen* iets *niet* heeft komt op hetzelfde neer als beweren dat *niemand* dat iets *wel* heeft.

Voorbeeld 1.

Als X de verzameling is van alle studenten die in deze cursus hebben gelezen en $p(x)$ is het predicaat "student x heeft blond haar", dan lezen we de uitspraak

$$\forall x \in X : p(x)$$

als "alle studenten die in deze cursus hebben gelezen zijn blond".

Deze uitspraak kan in de praktijk zowel waar als niet waar zijn, maar ze is uiteraard *niet waar* van zodra er minstens één student is die niet blond is. In symbolen uitgedrukt betekent dit

$$\neg(\forall x \in X : p(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in X : \neg p(x).$$

Op gelijkaardige manier betekent 'niemand is geslaagd' hetzelfde als 'iedereen is gebuisd'. In formules, met $q(x)$ het predicaat "x is geslaagd", wordt dit:

$$\neg(\exists x \in X : q(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X : \neg q(x).$$

en 'niemand is gebuisd' betekent hetzelfde als 'iedereen is geslaagd':

$$\neg(\exists x \in X : \neg q(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X : q(x).$$

Samengevat:

Eigenschap 1 (Negatie van kwantoren)**.** Voor elk predicaat $p(x)$ geldt:

(1) $\neg(\forall x \in X : p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in X : \neg p(x)$ of $\neg(\forall x)p(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\neg p(x))$

(2) $\neg(\exists x \in X : p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in X : \neg p(x)$ of $\neg(\exists x)p(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\neg p(x))$

In woorden: 'niet voor alle' is hetzelfde als 'er bestaat waarvoor niet',

en ook: 'niet er bestaat' is hetzelfde als 'voor alle geldt niet'.

0.2 Volgorde van kwantoren

Als in een wiskundige formule meerdere kwantoren voorkomen, dan is de *volgorde* soms erg belangrijk.

Oefening 1. Zij P een verzameling potjes van allemaal onderling *verschillende* formaten en D de verzameling van de bijhorende deksels. Zij $p(x, y)$ met $x \in D$ en $y \in P$ het predicaat 'x past op y'.

Kies voor elk van volgende formules de overeenkomstige Nederlandse zin, en zeg of de uitspraak waar of onwaar is.

A Op elk potje past een dekseltje

CC BY-NC-SA 4.0

B Er is een potje waar elk dekseltje op past
C Er is een potje waarop geen dekseltje past
D Er is een dekseltje dat op geen enkel potje past
E Er is een dekseltje dat op elk potje past
F Er is een dekseltje dat op een potje past
G Elk dekseltje past op elk potje
H Elk dekseltje past op een potje

1. $\forall x \in D : \forall y \in P : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
2. $\forall y \in P : \forall x \in D : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
3. $\exists x \in D : \exists y \in P : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
4. $\exists y \in P : \exists x \in D : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
5. $\exists x \in D : \forall y \in P : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
6. $\forall y \in P : \exists x \in D : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
7. $\forall x \in D : \exists y \in P : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
8. $\exists y \in P : \forall x \in D : p(x,y)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
9. $\exists a \in P : \forall b \in D : p(b,a)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout
10. $\exists x \in P : \forall y \in D : p(y,x)$	A	B	C	D	E	F	G	H	Juist	Fout

Deze oefening kan worden veralgemeend in volgende eigenschappen:

Eigenschap 2 (Verwisselen van kwantoren)**.** Voor elk predicaat $p(x,y)$ geldt:

(1)	$\forall x \in X : \forall y \in Y : p(x,y)$	$\Leftrightarrow$	$\forall y \in Y : \forall x \in X : p(x,y)$
(2)	$\exists x \in X : \exists y \in Y : p(x,y)$	$\Leftrightarrow$	$\exists y \in Y : \exists x \in X : p(x,y)$
(3)	$\exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y)$	$\Rightarrow$	$\forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y)$
(4)	$\forall y \in Y : \exists x \in X : p(x,y)$	$\not\Rightarrow$	$\exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y)$

Dit betekent:

- Gelijksoortige kwantoren mogen altijd van plaats worden verwisseld: de uitspraak verandert niet van betekenis. Daarom mogen we ook schrijven $\forall x, y \in X$ of $\exists x \in X, y \in Y$.
- Een bestaanskwantor mag achter een alkwantor worden geschoven: de uitspraak blijft waar, maar wordt zwakker.
- Een alkwantor **mag niet** achter een bestaanskwantor worden geschoven: de uitspraak wordt dan mogelijk onwaar.

  Bij $\forall y \in Y : \exists x \in X$ kan de x afhangen van y, maar bij $\exists x \in X : \forall y \in Y$ kan dat *niet*.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.45)

Opmerking 2.

- Onthoud: **als op elk potje een dekseltje past, dan betekent dat *niet* dat er een dekseltje is dat op elke potje past**. Maar, als er omgekeerd toch een dekseltje zou zijn dat op elk potje past, dan is er natuurlijk automatisch ook voor elke potje een passend dekseltje: namelijk dat 'universeel passend' dekseltje.
- Bij een uitspraak van de vorm $\forall x \in X : \exists y \in Y : p(x,y)$ volstaat het dat voor elke x een mogelijk *andere* y gevonden wordt: de y is dus mogelijk afhankelijk van x. Je zou met functie-notatie ook $y(x)$ kunnen schrijven, of met een subscript y_x:

  $$\forall x \in X : \exists y_x \in Y : p(x, y_x)$$

  Bij een uitspraak van de vorm $\exists y \in Y : \forall x \in X : p(x,y)$ moet er één vaste y bestaan die *niet* afhangt van x, maar voor alle x tegelijk werkt. Dat is een veel strengere eis.
- In deze eigenschap wordt steeds de kwantor-met-de-variabele van plaats verwisseld. De eigenschap geldt *niet* als je *enkel de kwantor* verplaatst. In dat geval krijg je een nieuwe uitspraak die in het algemeen geen logisch verband heeft met de oorspronkelijke uitspraak:

  $$\exists x \in X : \forall y \in Y : p(x,y) \quad \text{vs} \quad \forall x \in X : \exists y \in Y : p(x,y)$$

Oefening 2. Vergelijk de betekenis van volgende twee uitspraken en geef voor elke uitspraak aan of ze waar of onwaar is:

1. $\forall m \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} : n > m$

2. $\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : n > m.$

Oefening 3. Onderzoek of volgende uitspraken al dan niet waar zijn. Geef ook telkens een vlotte, korte equivalente Nederlandse zin.

1. Juist | Fout $\forall n \in \mathbb{N}_0, \exists m \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

2. Juist | Fout $\exists m \in \mathbb{N}_0, \forall n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

3. Juist | Fout $\forall m \in \mathbb{N}_0, \exists n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

4. Juist | Fout $\exists n \in \mathbb{N}_0, \forall m \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

5. Juist | Fout $\forall m, n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

6. Juist | Fout $\exists m, n \in \mathbb{N}_0 : m$ is een deler van n

7. Juist | Fout $\exists n \in \mathbb{N} : \left(n > 1 \wedge \forall m_1, m_2 \in \mathbb{N} : \left(m_1 > 1 \wedge m_2 > 1\right) \Rightarrow m_1 \cdot m_2 \neq n\right)$

Oefening 4.

Onderzoek of volgende uitspraken waar of onwaar zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

(a) | Juist | Fout | $\forall m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(b) | Juist | Fout | $\exists m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(c) | Juist | Fout | $\forall m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(d) | Juist | Fout | $\exists m \in \mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(e) | Juist | Fout | $\forall n \in \mathbb{Z} : \exists m \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

(f) | Juist | Fout | $\exists n \in \mathbb{Z} : \forall m \in \mathbb{Z} : m \leqslant n$

Oefening 5.

Geef telkens een wiskundige formule met dezelfde betekenis als de zin. Zijn de uitspraken waar of onwaar? (Er zijn soms andere formuleringen dan de gegeven oplossing mogelijk.)

1. Er bestaan twee gehele getallen zodat het eerste groter is dan het tweede.

2. Er bestaan twee gehele getallen zodat beide positief zijn.

3. Voor elk geheel getal bestaat er een groter geheel getal.

4. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een groter natuurlijk getal.

5. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een groter geheel getal.

6. Voor elk geheel getal bestaat er een groter natuurlijk getal.

7. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een kleiner natuurlijk getal.

8. Voor elk natuurlijk getal bestaat er een kleiner geheel getal.

9. Er bestaat een natuurlijk getal dat groter is dan elk ander natuurlijk getal.

10. Er bestaat een geheel getal dat groter is dan elk geheel getal.

11. Er bestaat een geheel getal dat kleiner is dan elk natuurlijk getal.

12. Er bestaat een positief reëel getal dat kleiner is dan elk strikt positief natuurlijk getal.

13. Voor elke twee natuurlijke getallen geldt dat het eerste groter is dan het tweede of het tweede groter dan het eerste.

14. Voor elke twee verschillende natuurlijke getallen geldt dat het eerste groter is dan het tweede of het tweede groter dan het eerste.

CC BY-NC-SA 4.0