Bewijstechnieken

0.1 Verschillende types eigenschappen

Wiskundige eigenschappen en stellingen worden op allerlei verschillende manieren geformuleerd. We sommen hier enkele mogelijkheden op, telkens met een kort voorbeeld.

(a) **Een *universele* uitspraak**: $\forall a \in A : p(a)$

> **Voorbeeld 1.** 'Voor elk reëel getal x is x^2 positief. '
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$$

In een universele uitspraak $\forall a \in A : p(a)$ kan het predicaat $p(a)$ ook de vorm aannemen van een implicatie of een equivalentie.

> **Voorbeeld 2.**
>
> **1.** 'Voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n een viervoud is, dan is n even.'
>
> $$\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ is een viervoud} \Rightarrow n \text{ is even}$$
>
> **2.** 'Voor elk reëel getal x geldt dat x positief is als en slechts als x gelijk is aan zijn absolute waarde. '
>
> $$\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$$

(b) **Een *existentiële* uitspraak**: $\exists a \in A : p(a)$

> **Voorbeeld 3.** 'Er bestaan strikt positieve natuurlijke getallen zodat de som van hun kwadraten terug een kwadraat is.'
>
> $$\exists x, y, z \in \mathbb{N}_0 : x^2 + y^2 = z^2$$

(c) **De negatie van een existentiële uitspraak**: $\neg(\exists a \in A : p(a))$:

> **Voorbeeld 4.** 'Er bestaan geen gehele getallen n en m zodat $8n - 6m = 101$. '
>
> $$\neg(\exists n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m = 101)$$

(d) **De negatie van een universele uitspraak**: $\neg(\forall a \in A : p(a))$:

> **Voorbeeld 5.** 'Niet alle priemgetallen zijn oneven.'

Merk op dat deze uitspraak niet equivalent is met 'Alle priemgetallen zijn even. '

0.2 Soorten bewijzen

Een wiskundig bewijs is een logische redenering die de waarheid van een uitspraak aantoont. Een bewijs is niet uniek, uitspraken kunnen op meerdere manieren aangetoond worden. Naast de verschillende types eigenschappen, zijn er ook verschillende types bewijzen. We bespreken er enkele.

We veronderstellen dat volgende basiseigenschappen gekend zijn zodat we deze kunnen gebruiken in de voorbeeld-bewijzen:

> **Eigenschap 1** (De orde $\leq$ in $\mathbb{R}$)**.**
>
> (o1) Voor alle reële getallen a, b en c geldt
>
> $$a < b \Rightarrow (a + c < b + c)$$

CC BY-NC-SA 4.0

(o2) Voor alle reële getallen a, b en c geldt

$$(a < b \wedge c > 0) \Rightarrow ac < bc$$

$$(a < b \wedge c < 0) \Rightarrow ac > bc$$

(o3) Voor alle reële getallen a, b en c geldt

$$(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c.$$

Deze laatste eigenschap heet de **transitiviteit** van de ordening.

0.2.1 Bewijs per generiek element

Dit type bewijs wordt gebruikt om een universele uitspraak $\forall a \in A : p(a)$ te bewijzen. Om te bewijzen dat iets geldt *voor alle elementen* van een verzameling, volstaat het te bewijzen dat het geldt voor *elk willekeurig element* van die verzameling.

Om een universele uitspraak te bewijzen beginnen we het bewijs met de uitdrukking "Kies a in A *willekeurig*." en daarna volgt een redenering die $p(a)$ aantoont. Het is belangrijk dat in die redenering de beschouwde a ook willekeurig blijft, wat betekent dat we over a geen veronderstellingen maken. Als wie iets moeten bewijzen $\forall a \in \mathbb{R}$, mogen we (natuurlijk) niet aannemen dat a positief is, of $a > 1$. Je mag wel gebruikmaken van gevalsonderscheid, waarbij je het bewijs geeft voor verschillende gevallen: bijvoorbeeld eerst voor $a > 0$ en daarna voor $a \leq 0$. Als de uitspraak in beide gevallen bewezen kan worden, is de volledige uitspraak bewezen.

Voorbeeld 6. Bewijs dat $\forall a \in \mathbb{R}_0 : a^2 > 0$

Bewijs Kies $a \in \mathbb{R}_0$ willekeurig, dus $a \in \mathbb{R}$ met $a \neq 0$. Dan geldt dat ofwel $a < 0$ ofwel $a > 0$.

In het geval dat $a > 0$ volgt door beide leden van de ongelijkheid $a > 0$ met het strikt positieve getal a te vermenigvuldigen dat $a^2 > 0$ (eig (o2)).

In het geval dat $a < 0$ volgt ook door beide leden van de ongelijkheid $a < 0$ met het strikt negatieve getal a te vermenigvuldigen dat $a^2 > 0$ (eig (o2)).

In beide gevallen volgt dus dat $a^2 > 0$. Omdat $a \in \mathbb{R}_0$ willekeurig gekozen was, bewijst dit de eigenschap. ■

Opmerking 1. Wegens de equivalentie $\neg(\exists x \in X : p(x)) \iff \forall x \in X : \neg p(x)$ kan je ook voor de negatie van een existentiële uitspraak een bewijs geven per generiek element.

0.2.2 Bewijs per voorbeeld

Om een existentiële uitspraak $\exists a \in A : p(a)$ te bewijzen, moeten we een $a \in A$ geven waarvoor $p(a)$ geldt.

Als je moet bewijzen dat er zwarte zwanen bestaan, volstaat het een zwarte zwaan te vinden. Inderdaad, als je één zwarte zwaan effectief kan vinden, dan is het zeker dat er bestaan.

Voorbeeld 7.

1. Bewijs dat $\exists n \in \mathbb{Z} : n^2 = 9$.

Bewijs Merk op dat $3 \in \mathbb{Z}$ en $3^2 = 9$. Dus (minstens) voor $n = 3$ geldt dat $n^2 = 9$. ■

Het gegeven voorbeeld is niet noodzakelijk uniek. Hier kan je ook -3 kiezen natuurlijk.

CC BY-NC-SA 4.0

2. Bewijs dat $\exists x, y, z \in \mathbb{N}_0 : x^2 + y^2 = z^2$

Bewijs Neem $x = 3$ en $y = 4$, dan is $x^2 + y^2 = 9 + 16 = 25$. Als we $z = 5$ nemen geldt dus dat $x^2 + y^2 = z^2$. ■

Merk wel op dat je soms ook kan aantonen dat iets moet bestaan *zonder* het ook effectief te construeren of te vinden.

Uitweiding 1 (Voorbeeld van een niet-constructief bewijs)**.**

Voorbeeld 8. Bewijs dat er irrationale getallen a en b bestaan zodanig dat a^b rationaal is.

Bewijs We weten dat het reële getal $\sqrt{2}$ irrationaal is. Beschouw nu het getal $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Dit getal is ofwel rationaal, ofwel irrationaal.

- Als $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationaal is, kies dan $a = b = \sqrt{2}$. Dan zijn a en b irrationaal en is $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationaal.
- Als $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrationaal is, kies dan $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ en $b = \sqrt{2}$. Dan zijn a en b irrationaal en is $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$. Het getal a^b is dus rationaal.

In beide gevallen hebben we irrationale getallen a en b gevonden zodanig dat a^b rationaal is, zonder echter te weten welk van beide gevallen waar is. ■

0.2.3 Bewijs per tegenvoorbeeld

Wegens de equivalentie $\neg(\forall x \in X : p(x)) \iff \exists x \in X : \neg p(x)$, kan je voor de negatie van een universele uitspraak een bewijs geven per voorbeeld, het volstaat immers om een voorbeeld te geven waarvoor $p(x)$ niet opgaat. In dit geval wordt zo'n voorbeeld een **tegenvoorbeeld** genoemd.

Voorbeeld 9. Bewijs dat niet alle priemgetallen oneven zijn.

Bewijs We moeten dus bewijzen dat er een priemgetal bestaat dat even is. Het getal 2 is een tegenvoorbeeld, want 2 is een priemgetal en 2 is even. ■

Oefening 1. Zijn volgende uitspraken waar of onwaar? Geef een bewijs.

1. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0$.

2. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 = 0$.

3. $\neg(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 = 0)$.

4. $\exists x \in \mathbb{C} : x^2 + 4 = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

0.2.4 Bewijs uit het ongerijmde

Bij een **bewijs uit het ongerijmde** nemen we aan dat het te bewijzen *niet* waar is, en leiden daaruit een contradictie af. Een uitspraak is ofwel waar ofwel niet waar. Als de aanname dat ze niet waar is leidt tot een contradictie, dan moet de uitspraak dus noodzakelijk *waar* zijn. Een typische contradictie is $p \wedge \neg p$, namelijk dat zowel p als $\neg p$ waar zijn.

Voorbeeld 10. Bewijs dat er geen gehele getallen n en m bestaan zodat $8n - 6m = 101$.

Om $\neg(\exists n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m = 101)$ te bewijzen nemen we dus aan dat dit te bewijzen niet waar is, we nemen dus aan dat er wel gehele getallen n en m bestaan zodat $8n - 6m = 101$ en leiden daar een contradictie uit af.

Bewijs Bewijs uit het ongerijmde: Veronderstel dat n en m gehele getallen zijn waarvoor geldt dat $8n - 6m = 101$. Omdat $8n - 6m = 2(4n - 3m)$ is $8n - 6m$ een veelvoud van 2, dus even. We hebben verondersteld dat $8n - 6m = 101$ dus is 101 ook even. Maar 101 is duidelijk oneven, zodat we een tegenspraak hebben. Uit deze tegenspraak volgt dat er geen gehele getallen n en m bestaan met $8n - 6m = 101$. ■

Om deze uitspraak te bewijzen hoef je geen bewijs uit het ongerijmde te gebruiken, je kan het bewijs ook anders formuleren. We moeten hier de negatie van een existentiële uitspraak bewijzen, dus we kunnen ook een bewijs geven per generiek element. We gebruiken dat

$$\neg(\exists n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m = 101) \Leftrightarrow \forall n, m \in \mathbb{Z} : 8n - 6m \neq 101.$$

Bewijs Kies n en m twee willekeurige gehele getallen. Dan is $8n - 6m = 2(4n - 3m)$ een veelvoud van 2, dus even. Omdat 101 oneven is, kan $8n - 6m$ niet gelijk zijn aan 101. ■

0.2.5 Het bewijzen van implicaties

Om een uitspraak van de vorm $\forall a \in A : p(a) \Rightarrow q(a)$ te bewijzen beginnen we met "Kies a in A willekeurig." Daarna moeten we voor deze a de implicatie $p(a) \Rightarrow q(a)$ bewijzen. We overlopen hiervoor enkele mogelijkheden:

- **Direct bewijs**

  Om een implicatie $p \Rightarrow q$ te bewijzen vertrekken we van het gegeven p, en redeneren of rekenen we tot we bij het te bewijzen q uitkomen.

  Voorbeeld 11. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n een viervoud is, dan is n even.

  Bewijs Kies n een willekeurig natuurlijk getal en veronderstel dat n een viervoud is. Dan bestaat er een $m \in \mathbb{N}$ zodat $n = 4m$. Bijgevolg is $n = 2 \cdot 2m$. Stel $k = 2m$. Dan is $n = 2k$, wat betekent dat n even is. ■

- **Bewijs door contrapositie**

  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ is een tautologie. De implicatie $p \Rightarrow q$ is dus equivalent met haar *contrapositie* $\neg q \Rightarrow \neg p$. In plaats van $p \Rightarrow q$ te bewijzen, kunnen we dus evengoed de implicatie $\neg q \Rightarrow \neg p$ bewijzen. Soms is dat eenvoudiger.

  Voorbeeld 12. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n^2 even is, dan is n ook even.

CC BY-NC-SA 4.0

Bewijs We tonen deze eigenschap aan door middel van contrapositie. We tonen dus aan dat voor elk natuurlijk getal n geldt dat als n oneven is, dan n^2 ook oneven is. Neem een willekeurig natuurlijk getal n dat oneven is. Dan bestaat er een $m \in \mathbb{N}$ zodat $n = 2m + 1$. Bijgevolg is $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$. Stel $k = 2m^2 + 2m$, dan is $n^2 = 2k + 1$ en bijgevolg is n^2 oneven. ■

Door middel van contrapositie is dit een eenvoudig bewijs, de eigenschap bewijzen met een direct bewijs zou dit een hele uitdaging zijn.

- **Bewijs uit het ongerijmde**

  Om een uitspraak van de vorm

  $$\forall a \in A : p(a) \Rightarrow q(a)$$

  uit het ongerijmde te bewijzen nemen we aan dat de negatie hiervan, namelijk

  $$\exists a \in A : \neg(p(a) \Rightarrow q(a))$$

  waar is en leiden hieruit een contradictie af. Omdat $\neg(p(a) \Rightarrow q(a))$ equivalent is met $p(a) \wedge \neg q(a)$, nemen we in het bewijs dus aan dat er een $a \in A$ bestaat waarvoor $p(a)$ waar is en $q(a)$ niet waar is en leiden hieruit een contradictie af.

Voorbeeld 13. Bewijs dat voor alle reële getallen x, y en a geldt: als $x > y$ en $ax \leq ay$ dan is $a \leq 0$.

Merk op dat we hier iets moeten bewijzen over 3 elementen uit $\mathbb{R}$.

Bewijs Bewijs uit het ongerijmde: Veronderstel dat x, y en a reële getallen zijn waarvoor geldt dat $x > y$ en $ax \leq ay$ (p waar) en $a > 0$ (q niet waar). Dan volgt uit $x > y$ en het feit dat a strikt positief is dat $ax > ay$, hetgeen in tegenspraak is met de onderstelling dat $ax \leq ay$. We vinden dus een contradictie. ■

Als laatste voorbeeld geven we nog een voorbeeld van een direct bewijs. We schrijven het bewijs niet meteen op, maar maken het proces van het zoeken naar welke stappen gezet moeten worden in het bewijs om die daarna met een leesbare redenering op te schrijven expliciet.

Voorbeeld 14. Bewijs dat voor alle strikt positieve reële getallen a en b geldt: $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.

Uitwerking: We kiezen twee willekeurige strikt positieve getallen a en b, zodat $a < b$.

Omdat we iets willen weten over a^2 en b^2, lijkt een mogelijkheid om de gegeven ongelijkheid $a < b$ met a of b te vermenigvuldigen. Omdat a en b strikt positief zijn blijven de ongelijkheden behouden wegens eigenschap (o2) over de orde in $\mathbb{R}$ zodat

$$a < b \Rightarrow a^2 < ab \tag{1}$$

en

$$a < b \Rightarrow ab < b^2. \tag{2}$$

Omdat gegeven is dat $a < b$ volgt dus dat $a^2 < ab$ en $ab < b^2$. Deze twee ongelijkheden bevatten beide ab zodat uit eigenschap (o3) volgt

$$(a^2 < ab) \text{ en } (ab < b^2) \;\Rightarrow\; a^2 < b^2. \tag{3}$$

Op deze manier hebben we een correcte *redenering gevonden*, nu moeten we die redenering ook nog duidelijke en correct *opschrijven*. Een enigszins dubieuze poging gaat als volgt:

Bewijs

$$\begin{array}{l} a < b \\ \quad \Downarrow a > 0 \;\; b > 0 \qquad \text{eig. (o2)} \\ a^2 < ab \quad \text{en} \quad ab < b^2 \end{array}$$

CC BY-NC-SA 4.0

$$\Downarrow \text{ transitiviteit eig. (o3)}$$
$$(a^2 < ab) \wedge (ab < b^2) \;\Rightarrow\; a^2 < b^2$$

■

Dit is geen goed geschreven bewijs! Enkel voor wie het bewijs al kent, is duidelijk wat er wordt bedoeld. Deze versie is hoogstens bruikbaar als schets om het bewijs te visualiseren.

Nog dubieuzer is volgend 'bewijs':

Bewijs $a < b \Rightarrow (a^2 < ab \wedge ab < b^2) \Rightarrow a^2 < b^2$. ■

Een correct en volledig bewijs is een leesbare opeenvolging van Nederlandse zinnen, met woorden zoals 'hieruit volgt', 'dus' en 'omdat' die aangeven hoe de verschillende zinnen met elkaar samenhangen. Er mogen natuurlijk wiskundige symbolen worden gebruikt, maar het geheel is een leesbaar verhaal.

Een beter bewijs van de eigenschap ziet er bijvoorbeeld zo uit:

Bewijs Kies twee willekeurige strikt positieve reële getallen zodat $a < b$. We moeten bewijzen dat $a^2 < b^2$.

Omdat a strikt positief is, kunnen we in $a < b$ linkerlid en rechterlid vermenigvuldigen met a en geldt wegens eigenschap (o2) dat $a^2 < ab$.

Omdat b strikt positief is, kunnen we $a < b$ vermenigvuldigen met b en geldt opnieuw wegens eigenschap (o2) dat $ab < b^2$

Wegens de transitiviteit van de ordening (eigenschap (o3)) volgt uit $a^2 < ab$ en $ab < b^2$ dat inderdaad $a^2 < b^2$. ■

0.2.6 Het bewijzen van equivalenties

Omdat $p \Leftrightarrow q$ equivalent is met $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$ kunnen we een equivalentie bewijzen door beide implicaties te bewijzen.

Voorbeeld 15. Bewijs dat $\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$

Bewijs Kies $x \in \mathbb{R}$ willekeurig.

- We tonen aan dat $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$:
  Dit volgt rechtstreeks uit de definitie van absolute waarde.
- We tonen aan dat $|x| = x \Rightarrow x \geq 0$:
  We tonen deze implicatie aan door middel van contrapositie. Uit $x < 0$ volgt per definitie dat $|x| = -x$ en ook dat $-x \neq x$. Uit $x < 0$ volgt dus dat $|x|$ niet gelijk is aan x.

■

0.2.7 Het bewijzen van de gelijkheid tussen verzamelingen

Zij A en B verzamelingen. Er geldt

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ en } B \subset A$$

Een gelijkheid $A = B$ van verzamelingen bewijzen we door zowel $A \subset B$ als $B \subset A$ aan te tonen. Om bijvoorbeeld $A \subset B$ aan te tonen nemen we een willekeurig element uit A en tonen we aan dat dit element ook in B zit.

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 16. Bewijs dat voor elke verzameling A geldt $(A^c)^c = A$.

Bewijs

Kies een willekeurige verzameling A.

We bewijzen eerst dat $(A^c)^c \subset A$:

Neem een $x \in (A^c)^c$ willekeurig. Dan is $x \notin A^c$. Hieruit volgt dat $x \in A$.

We bewijzen nu dat $A \subset (A^c)^c$:

Neem een $x \in A$. Noteer $B = A^c$. Dan is $x \notin A^c$, of nog $x \notin B$. Dus is $x \in B^c = (A^c)^c$.

Uit $(A^c)^c \subset A$ en $A \subset (A^c)^c$ volgt dat $(A^c)^c = A$. ■

CC BY-NC-SA 4.0