Vectorieel product

Het *vectorieel product* van twee vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^3$ is een nieuwe vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ in $\mathbb{R}^3$ die loodrecht staat op zowel $\mathbf{u}$ als $\mathbf{v}$. Dit vectorieel product speelt een belangrijke rol in meetkundige en fysische problemen in $\mathbb{R}^3$, en kan ofwel gedefinieerd worden met een directe formule, ofwel met 2×2 determinanten:

Definitie 1 (Vectorieel product in $\mathbb{R}^3$)**.**

Het **vectorieel product** (of **vectorproduct**) van $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ en $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ in $\mathbb{R}^3$, genoteerd als

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) \qquad (\text{ of soms ook } (u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3))$$

wordt gedefinieerd door

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) &\overset{\text{def}}{=} (u_2v_3 - u_3v_2,\, u_3v_1 - u_1v_3,\, u_1v_2 - u_2v_1) \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \quad \in \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Voorbeeld 1.

$(1, 2, 3) \times (4, 5, 6) = (2 \cdot 6 - 3 \cdot 5, 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6, 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2) = (-3, 6, -3)$

$(1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ en $(0, 1, 0) \times (1, 0, 0) = (0, 0, -1)$

Het vectorieel product kan ook formeel worden geschreven als een 3×3 determinant:

$$(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

met $\mathbf{e_x} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e_y} = (0, 1, 0)$ en $\mathbf{e_z} = (0, 0, 1)$ de drie basisvectoren van $\mathbb{R}^3$, want

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} (1, 0, 0) - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} (0, 1, 0) + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} (0, 0, 1) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Door invullen vind je dat $(x, y, z) = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$ voldoet aan de vergelijkingen

$$\begin{cases} u_1x + u_2y + u_3z = 0 \\ v_1x + v_2y + v_3z = 0 \end{cases}$$

Deze vergelijkingen kunnen geïnterpreteerd worden als voorwaarde dat (x, y, z) loodrecht staat op (u_1, u_2, u_3) en op (v_1, v_2, v_3), en dus volgt dat de vector $(u_1, u_2, u_3) \times (v_1, v_2, v_3)$ loodrecht staat op (u_1, u_2, u_3) en (v_1, v_2, v_3).

We bekomen dus volgende eigenschap, die drie keer in een ander vorm precies hetzelfde beweert:

Eigenschap 1.

(a) Het vectorieel product $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ staat *loodrecht* op $\mathbf{u}$ en op $\mathbf{v}$: $\quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{u}$ en $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \perp \mathbf{v}$.

(b) Het vectorieel product $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ is een *oplossing* van het stelsel $\begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0 \end{cases}$.

(c) Het vectorieel product $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ voldoet aan de *identiteiten* $\begin{cases} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \\ \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \end{cases}$.

CC BY-NC-SA 4.0

Vectorieel product

Merk op dat (c) zegt dat $\mathbf{x} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ voldoet aan (b). Het vectorieel product heeft ook een interessante meetkundige betekenis in verband met oppervlakten en oriëntaties, maar dat aspect behandelen we hier niet.

Merk ook op dat het vectorproduct niet commutatief is, want $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$. Hieruit volgt dat $\mathbf{u} \times k\mathbf{u} = 0, k \in \mathbb{R}$.

CC BY-NC-SA 4.0