Lineaire stelsels: oplossingen

Een lineair stelsel van m vergelijkingen en n onbekenden $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *oplossen* betekent *alle* n-tallen reële getallen $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ vinden die we voor de letters $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ kunnen invullen zodat $\mathbf{Ap} = \mathbf{b}$. Formeel wordt dit:

Definitie 1 (Oplossingen van stelsels en gelijkwaardige stelsels)**.**

Een **oplossing** van een lineair stelsel van m vergelijkingen en n onbekenden $S : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ is een vector $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ die voldoet aan alle vergelijkingen, dus zodat

$$\mathbf{Ap} = \mathbf{b} \quad \text{of} \quad \begin{cases} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + \cdots + a_{1n}p_n & = b_1 \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{2n}p_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}p_1 + a_{m2}p_2 + \cdots + a_{mn}p_n & = b_m \end{cases}$$

De **oplossingsverzameling** $\mathrm{Opl}(S)$ van een lineair stelsel S is de verzameling van *alle oplossingen*.

Twee stelsels S_1 en S_2 zijn **gelijkwaardig** als ze *dezelfde* oplossingsverzameling hebben, dus als

$$\mathrm{Opl}(S_1) = \mathrm{Opl}(S_2)$$

Een stelsel dat *geen* oplossingen heeft, dus met $\mathrm{Opl}(S) = \emptyset$, noemen we **strijdig** of **ontaard**.

Opmerking 1. Ook een *vergelijking* die geen oplossingen heeft noemen we **strijdig** of **ontaard**. Een typische *ontaarde vergelijking* is $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 1$ of dus $0 = 1$.

We geven eerst enkele eenvoudige voorbeelden van het oplossen van stelsels:

Voorbeeld 1. Los volgende stelsels op:

1. $S_1 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Door de twee vergelijkingen bij elkaar op te tellen, vinden we dat $(x + y) + (x - y) = 5 + 1$ moet zijn, en dus $2x = 6$, of $x = 3$. Door $x = 3$ in te vullen in één van de twee oorspronkelijke vergelijkingen vinden we dan dat $3 + y = 5$, en dus $y = 2$.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_1) = \{(3, 2)\}$, of $x = 3$ en $y = 2$ is de enige oplossing van het stelsel S_1

2. $S_2 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x + y & = 1 \end{cases}$

Uitwerking: Het is onmiddellijk duidelijk dat het onmogelijk is dat $x + y$ zowel gelijk is aan 1 als aan 5. Er zijn dus *geen oplossingen*.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_2) = \emptyset$

3. $S_3 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 12 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x, y) = (3, 2)$. En $(3, 2)$ voldoet ook aan de derde vergelijking (want $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$), en is dus een oplossing van het hele stelsel.

Resultaat: $\mathrm{Opl}(S_3) = \{(3, 2)\}$

CC BY-NC-SA 4.0

4. $S_4 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ x - y & = 1 \\ 2x + 3y & = 13 \end{cases}$

Uitwerking: De eerste twee vergelijkingen hebben als unieke oplossing $(x, y) = (3, 2)$. En $(3, 2)$ voldoet niet aan de derde vergelijking (want $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \neq 13$), en er kan dus geen oplossing bestaan voor het hele stelsel.

Resultaat: $\text{Opl}(S_4) = \emptyset$

5. $S_5 = \begin{cases} x + y & = 5 \\ 2x + 2y & = 10 \end{cases}$

Uitwerking: De tweede vergelijking is eigenlijk dezelfde als de eerste, want als $x+y = 5$, dan is automatisch ook $2x + 2y = 2(x + y) = 2 \cdot 5 = 10$. Dus zodra $y = 5 - x$ (of ook: zodra $x = 5 - y$), hebben we een oplossing. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 5 - x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(5 - y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn natuurlijk twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels. Voorbeelden van oplossingen zijn dus de koppels $(0, 5), (1, 4), (2, 3), (5, 0), (\pi, 5 - \pi), (\pi + 5, -\pi), (5 - \pi, \pi), \ldots$

Resultaat: $\text{Opl}(S_5) = \{(t, 5 - t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(5 - s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -x + 5$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel S_5 is dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -x + 5$.

6. $S_6 = \{ \; 2x + y \; = 6$ (een 'stelsel' met één vergelijking)

Uitwerking: Er is maar één vergelijking, en die zegt dat $x = 3 - \frac{1}{2}y$, of ook dat $y = 6 - 2x$. Dus, voor elke x vinden we een bijhorende y (en omgekeerd: voor elke y vinden we een x).
Er zijn dus oneindig veel oplossingen, namelijk alle koppels $(x, 6-2x)$ (met $x \in \mathbb{R}$). Ook alle koppels $(3-\frac{1}{2}y, y)$ met $y \in \mathbb{R}$ zijn oplossingen. Maar, dat zijn twee keer precies dezelfde verzamelingen koppels.

Resultaat: $\text{Opl}(S_6) = \{(t, 6 - 2t) | t \in \mathbb{R}\} = \{(3 - \frac{1}{2}s, s) | s \in \mathbb{R}\}$

Merk op dat $y = -2x+6$ de vergelijking is van een *rechte*. De *oplossingsverzameling* van het stelsel $\{2x+y = 6$ is dus precies gelijk aan de rechte met vergelijking $y = -2x + 6$.

Een algemene strategie om lineaire stelsels op te lossen is:

Bereken een *gelijkwaardig* stelsel waarvoor de oplossingsverzameling direct af te lezen is.

Bij stelsels waarvan de coëfficiëntenmatrix een diagonaalmatrix is kunnen we de oplossingen gewoon aflezen:

Voorbeeld 2.

Los volgende stelsels op, en schrijf elk stelsel ook in matrixvorm:

1. $S_1 = \begin{cases} 1x & & & = & 2 \\ & 1y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 6 \end{cases}$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_1) = \{ \; (2, 4, 6) \; \}$ via gewoon aflezen.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

CC BY-NC-SA 4.0

2. $S_2 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 1 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_2) = \{\ (2,2,1)\ \}$ via aflezen met een kleine berekening: $4/2 = 2$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $S_3 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 1z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_3) = \{\ (2,2,0)\ \}$ via gewoon aflezen, waarbij we $z = 0$ krijgen, maar dat is niets speciaal.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $S_4 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 2y & & = & 4 \\ & & 0z & = & 1 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_4) = \emptyset$ via gewoon aflezen, want de laatste vergelijking is duidelijk strijdig: voor geen enkel getal z kan $0z = 1$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $S_5 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 1y & & = & 4 \\ & & 0z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_5) = \{\ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$, waarbij de laatste vergelijking $0z = 0$ voor alle getallen z voldaan is . Er zijn dus oneindig veel oplossingen, die we naar keuze kunnen schrijven als $\{\ (2,4,t) \mid t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,4,z) \mid z \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,4,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\ \} = \ldots$

We kunnen deze oplossingsverzameling ook noteren als $\text{Opl}(S_5) = \{\ (2,4,0) + t(0,0,1) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$, want $(2,4,0) + t(0,0,1) = (2,4,t)$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. $S_6 = \left\{ \begin{array}{rcrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 0y & & = & 0 \\ & & 0z & = & 0 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_6) = \{\ (2,s,t) \mid s,t \in \mathbb{R}\ \} = \{\ (2,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\ \}$. Enkel de eerste vergelijking is een echte vergelijking. Als $x = 2$, mogen y en z willekeurig zijn. Er zijn dus 'twee keer oneindig' veel oplossingen omdat er twee parameters nodig zijn om *alle* oplossingen te bekomen.

CC BY-NC-SA 4.0

We kunnen deze oplossingsverzameling ook noteren als $\text{Opl}(S_6) = \{\ (2,0,0) + s(0,1,0) + t(0,0,1) \mid s,t \in \mathbb{R}\ \}$

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$

7. $S_7 = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 0y & & = & 0 \\ & & 2z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_7) = \{\ (2,t,3) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$.

We kunnen deze oplossingsverzameling ook noteren als $\text{Opl}(S_7) = \{\ (2,0,3) + t(0,1,0) \mid t \in \mathbb{R}\ \}$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\6\end{bmatrix}$

Stelsels waarvan de coëfficiëntenmatrix een bovendriehoeksmatrix is kunnen we oplossen met **achterwaartse substitutie**:

Voorbeeld 3 (Achterwaartse substitutie)**.** Los volgende stelsels op, en schrijf elk stelsel ook in matrixvorm:

1. $S_{21} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 1x & & & = & 2 \\ & 1y+ & 1z & = & 4 \\ & & 1z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{21}) = \{\ (2,-2,6)\ \}$

We beginnen met de laatste vergelijking: $z = 6$. We vullen die waarde voor z in in de tweede vergelijking, en bekomen $y+6 = 4$, dus $y = -2$. De eerste vergelijking zegt dat $x = 2$. Dus, de oplossing is $(x,y,z) = (2,-2,6)$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$

2. $S_{22} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 2 \\ & +y & +z & = & 4 \\ & & +z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{22}) = \{\ (-2,-2,6)\ \}$

Opnieuw van beneden naar boven invullen (achterwaarts, vandaar *achterwaartse substitutie*). $z = 6$, dus $y+6 = 4$ en dus $y = -2$. Tenslotte is $x + (-2) + 6 = 2$, of $x = -2$.

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$

3. $S_{23} = \left\{ \begin{array}{rrrcl} 6x & +2y & +z & = & 2 \\ & +5y & +3z & = & 4 \\ & & +2z & = & 6 \end{array} \right.$

Uitwerking: $\text{Opl}(S_{23}) = \{\ (1/6,-1,3)\ \}$

Opnieuw aan de hand van achterwaartse substitutie eerst z, vervolgens y en dan x berekenen.

CC BY-NC-SA 4.0

Lineaire stelsels: oplossingen

In matrixvorm schrijf je dit stelsel $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

CC BY-NC-SA 4.0