Inleidende voorbeelden 2×2 stelsels

Voor het oplossen van (lineaire) 2×2 stelsels bestaan verschillende methoden. We bespreken de substitutiemethode en de eliminatiemethode, en geven telkens eerst een voorbeeld.

Voorbeeld 1. Los volgend stelsel op met de *substitutiemethode*: $\begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=-4 \end{cases}$.

Uitwerking: Uit de eerste vergelijking $x+y=5$ kan je x berekenen als $x=5-y$.
Die uitdrukking $y-5$ voor x kan je substitueren in de tweede vergelijking $x-2y=-4$:

$$(5-y)-2y=-4 \Leftrightarrow -3y=-9$$

Hieruit volgt dat $y=3$. Je kan de waarde $y=3$ invullen in $x=5-y$ en vindt $x=5-3=2$.

De oplossing van het stelsel is dus $x=2$ en $y=3$, of ook $(x,y)=(2,3)$.

Merk op dat je dezelfde oplossing bekomt door de eerste vergelijking te herschrijven als $y=5-x$ en te substitueren in de tweede vergelijking. Je kan ook de tweede vergelijking herschrijven en substitueren in de eerste vergelijking. Al deze varianten leiden tot hetzelfde resultaat.

Algemeen kan je de substitutiemethode als volgt beschrijven:

Algoritme 1. Los een 2×2 stelsel op met de **substitutiemethode** door

(a) uit één van de vergelijkingen één van de onbekenden op te lossen en

(b) in de andere vergelijking die onbekende te *substitueren* (vervangen) door de gevonden oplossing.

(c) Die andere vergelijking heeft nu nog maar één onbekende, en kan je oplossen,

(d) en die oplossing ingevuld in de vergelijking waarmee je gestart bent, levert de eindoplossing.

Indien men een strijdig stelsel of dubbele vergelijking heeft, zal bovenstaande algoritme niet zonder meer bruikbaar zijn.

Voorbeeld 2. Los volgend stelsel op met de *eliminatiemethode*: $\begin{cases} x+y=5 \\ x-2y=-4 \end{cases}$.

Uitwerking: Zodra x en y voldoen aan de twee vergelijkingen, voldoen ze ook aan de som of het verschil van die vergelijkingen.

Als je in dit geval de tweede vergelijking zou vervangen door het verschil van die tweede vergelijking met de eerste, dan blijkt de onbekende x verdwenen (i.e. *geëlimineerd*) te zijn uit die tweede vergelijking:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ -3y=-9 \end{cases}$$

De tweede vergelijking heeft nu nog maar één onbekende, en is onmiddellijk oplosbaar: $y=3$. Door die oplossing $y=3$ in te vullen in de eerste vergelijking (nl. $x+y=5$), vind je $x+3=5$, dus $x=2$.

De oplossing van het stelsel is dus $x=2$ en $y=3$, of ook $(x,y)=(2,3)$.

Merk op dat er opnieuw verschillende eliminatiemethoden zijn, die allemaal tot diezelfde oplossing leiden.

Strikt genomen hebben we hier de eliminatiemethode enkel in de eerste stap gebruikt, en ze gecombineerd met substitutie om x te berekenen. Het is mogelijk om ook y te elimineren uit de eerste vergelijking, maar in de praktijk is dat voor 2×2 stelsels meestal ingewikkelder dan nodig.

Algemeen kan je de eliminatiemethode als volgt beschrijven:

CC BY-NC-SA 4.0

Algoritme 2. Los een 2×2 stelsel op met de **eliminatiemethode** door

(a) bij één van de vergelijkingen een geschikt veelvoud van de andere op te tellen zodat één van de onbekenden wordt *geëlimineerd* (verdwijnt),

(b) die vergelijking met maar één onbekende op te lossen, en

(c) die oplossing in te vullen in de andere vergelijking.

Zie verder voor de gevallen met strijdige of dubbele vergelijkingen.

In de vorige voorbeelden was er telkens een *unieke* oplossing. Dat is echter niet altijd het geval, soms zijn er *geen* oplossingen, soms zijn er *oneindig veel* oplossingen.

Voorbeeld 3. Stelsel zonder oplossingen: $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$.

Inderdaad, $x+y$ kan natuurlijk niet tegelijk gelijk zijn aan 1 en gelijk zijn aan 2.

Als je dergelijk stelsel oplost met *substitutie* bekom je uit de eerste vergelijking $x=1-y$, en dat invullen in de tweede vergelijking geeft $(1-y)+y=2$, of $1=2$ wat een strijdige vergelijking is. Er is dus geen oplossing van deze vergelijking, en dus zeker ook geen oplossing van het hele stelsel.

Als je dergelijk stelsel oplost met *eliminatie* bekom je als tweede vergelijking $0=1$, wat ook een strijdige vergelijking is. Er is dus geen oplossing.

Voorbeeld 4. Stelsel met oneindig veel oplossingen: $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$.

Inderdaad, telkens y één kleiner is dan x voldoen x en y aan beide vergelijkingen, bijvoorbeeld $(x,y)=(5,4), (x,y)=(11,10)$ of $(x,y)=(\pi+1,\pi)$.

De oplossingen van het stelsel zijn $x=t, y=t-1$, met $t\in\mathbb{R}$, wat je ook kan schrijven als $(x,y)=(t,t-1)$, met $t\in\mathbb{R}$.

Pas wel op: je kan de oplossingen ook schrijven als $x=s+1, y=s$, met $s\in\mathbb{R}$.

Als je dergelijk stelsel oplost met *substitutie* bekom je uit de eerste vergelijking $x=y+1$, en dat invullen in de tweede vergelijking geeft $2(y+1)-2y=2$, of $2=2$. De gelijkheid $2=2$ (eventueel nog te vereenvoudigen tot $1=1$ of $0=0$) legt geen extra voorwaarden op aan x en y, want ze is altijd voldaan. Er is dus eigenlijk maar één vergelijking: de tweede bevat precies dezelfde voorwaarde op x en y. Er is geen unieke oplossing, maar er zijn er oneindig veel.

Als je dergelijk stelsel oplost met *eliminatie* bekom je als tweede vergelijking $0=0$, wat ook een altijd voldane vergelijking is. Er blijft dus maar één vergelijking met twee onbekenden over, en dergelijke vergelijking heeft oneindig veel oplossingen.

Merk op dat het niet altijd onmiddellijk af te lezen is van een stelsel of het al dan oneindig veel oplossingen heeft.

Zo heeft ook $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-y=y+2 \end{cases}$ oneindig veel oplossingen.

We illustreren dit nog verder met enkele voorbeelden:

CC BY-NC-SA 4.0

Inleidende voorbeelden 2×2 stelsels

Voorbeeld 5. Los volgend stelsel op: $\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$.

Uitwerking:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 3x + y = 6 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y = 4 \\ y = 6 - 3x \end{cases} \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + (6 - 3x) = 4 \\ y = 6 - 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 6 = 4 \\ y = 6 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 - 3x \end{cases} \underset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

De stappen hierboven zijn de volgende:

(1) de eerste vergelijking door 2 delen en de tweede vergelijking herschrijven
(2) y substitueren in de eerste vergelijking
(3) x invullen in tweede vergelijking

De oplossing is dus $(x, y) = (1, 3)$.

Voorbeeld 6. Los volgend stelsel op: $\begin{cases} -4x + 4y = -8 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

Uitwerking:

$$\begin{cases} -4x + 4y = -8 \\ x - y = 2 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases} \underset{(2)}{\Leftrightarrow} x - y = 2 \underset{(3)}{\Leftrightarrow} x = 2 + y$$

We gebruikten de volgende stappen:

(1) eerste vergelijking delen door (-4)
(2) twee gelijke vergelijkingen, je kan één schrappen
(3) x schrijven in functie van y

Stel $y = t$ met $t \in \mathbb{R}$ dan wordt de oplossing gelijk aan $(x, y) = (2 + t, t)$, er zijn oneindig veel oplossingen.

Voorbeeld 7. Los volgend stelsel op: $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$.

Uitwerking:

$$\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -3x + y = 2 \\ -3x + y = 1 \end{cases}$$

We hebben hier de tweede vergelijking gedeeld door (-1). Maar dan hebben we dat eenzelfde term $-3x + y$ tegelijkertijd gelijk moet zijn aan 2 en 1, wat natuurlijk niet kan. Daarom is dit stelsel strijdig en zijn er geen oplossingen.

CC BY-NC-SA 4.0