Lineaire stelsels: oplossen via echelonvorm

De *eliminatiemethode van Gauss* is een algemene methode om *elk lineair stelsel* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ op te lossen. Het toepassen van geschikte zogenaamde *elementaire rijoperaties* op de vergelijkingen van het stelsel (in de praktijk op de uitgebreide matrix van het stelsel) leidt tot een gelijkwaardig maar eenvoudiger stelsel in trapvorm (de zogenaamde *echelonvorm*). Een andere naam voor de methode is 'rijherleiden', en een variant is gekend onder de naam 'spilmethode'.

0.1 Elementaire rijoperaties

Volgende drie operaties op vergelijkingen van stelsels *veranderen de oplossingsverzameling van het stelsel niet*:

(a) ***Herschaling* van een vergelijking:** een vergelijking vermenigvuldigen met een reëel getal verschillend van nul.
Een voorbeeld maakt meteen duidelijk waarom dit de oplossingsverzameling niet verandert: de vergelijking $x-2y=5$ heeft immers precies dezelfde oplossingen (x, y) als de vergelijkingen $3x-6y=15$ en $-2x+4y=-10$. Pas wel op: vermenigvuldigen *met nul* mag natuurlijk niet, want dat zou de vergelijking doen verdwijnen en de oplossingsverzameling dus erg vergroten.

(b) **Twee vergelijkingen van plaats *verwisselen*:**
Het is duidelijk dat de volgorde van de vergelijkingen geen invloed heeft op de oplossingen.

(c) **Bij een vergelijking een veelvoud van een andere vergelijking *optellen*:**

We tonen eerst aan waarom een veelvoud van een andere vergelijking optellen geen oplossingen kan doen verdwijnen. Daarna tonen we aan dat er dan ook geen oplossingen kunnen bijkomen.

(i) Als (x_0, y_0) een oplossing is van $\begin{cases} x-2y=5 \\ x+y=1 \end{cases}$
en we tellen bij de eerste vergelijking bijvoorbeeld twee keer de tweede op:

$$(x-2y)+2(x+y)=5+2\cdot 1 \text{ of dus } 3x+0y=7$$

dan is (x_0, y_0) ook een oplossing van $\begin{cases} 3x+0y=7 \\ x+y=1 \end{cases}$
Dus elke oplossing van het oorspronkelijke stelsel is ook oplossing van het nieuwe stelsel.

(ii) Maar is ook elke oplossing van het nieuwe stelsel een oplossing van het oorspronkelijke stelsel?
Ja, want de weg terug heeft volledig dezelfde structuur: als we van de nieuwe eerste rij de tweede rij (die ongewijzigd gebleven is) twee keer aftrekken bekomen we terug het oorspronkelijke stelsel.
De redenering van hierboven toont dus dat alle oplossingen behouden blijven.

Deze *operaties op vergelijkingen* van een stelsel komen overeen met zogenaamde *elementaire rijoperaties op de uitgebreide coëfficiëntenmatrix* van het stelsel:

Definitie 1. Volgende operaties op de rijen van matrices noemen we **elementaire rijoperaties**:

Herschaling	Vermenigvuldigen een rij met een getal verschillend van nul	$R_i \to aR_i, a \neq 0$
Verwisseling	Verwissel twee rijen van plaats	$R_i \leftrightarrow R_j$
Combinatie	Tel bij een rij een veelvoud van een andere rij op	$R_i \to R_i + aR_j$

Uit bovenstaande uitleg blijkt dus volgende eigenschap:

Eigenschap 1. Het toepassen van elementaire rijoperaties op de uitgebreide matrix van een stelsel verandert de oplossingsverzameling van het stelsel niet.

CC BY-NC-SA 4.0

Enkele voorbeelden van het toepassen van elementaire rijoperaties op de uitgebreide matrix van een stelsel. Let hierbij op de gebruike notatie: teken een pijl naar rechts naar de nieuwe matrix, en schrijf boven die pijl de rijoperatie die je toepast:

Voorbeeld 1 (Herschaling)**.**

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1/2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Voorbeeld 2 (Verwisseling)**.**

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Voorbeeld 3 (Combinatie)**.**

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

Opmerking 1.

Door een herschaling en een combinatie na elkaar uit te voeren kan je een rij ook vervangen door een niet-nul veelvoud van die rij waarbij een veelvoud van een andere rij wordt opgeteld: $R_i \to aR_i + bR_j, a \neq 0$. Men noemt deze operatie ook een (niet-elementaire) rijoperatie.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to 2R_2 - R1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -2 \end{array}\right]$$

0.2 Eliminatiemethode van Gauss

Het doel van de eliminatiemethode van Gauss is om een stelsel om te vormen tot een eenvoudiger gelijkwaardig stelsel door het gericht toepassen van elementaire rijoperaties. Omdat rijoperaties de oplossingsverzameling niet veranderen, kunnen we proberen om het stelsel te vereenvoudigen tot een vorm waarop die oplossingsverzameling direct kan worden afgelezen. We bekijken eerst enkele voorbeelden die we daarna veralgemenen.

Voorbeeld 4. Het stelsel

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u - v = 1 \\ u - 2v = -1 \end{cases}$$

heeft als uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$.

We vereenvoudigen nu de matrix, en dus het stelsel, door rijoperaties toe te passen. In een eerste stap zorgen we dat er nullen staan in de **eerste** kolom in rij 2 en rij 3. Hiervoor trekken we eerst van de tweede rij de eerste rij af:

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

CC BY-NC-SA 4.0

en vervolgens trekken we van de derde rij de eerste rij af

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right].$$

In de volgende stap plaatsen we een nul in de **tweede** kolom, in rij 3. Hiervoor delen we eerst de tweede rij door -2 en de derde rij door -3:

$$\xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_3/-3]{R_2 \to R_2/-2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

en trekken vervolgens van de derde rij de tweede rij af

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Nu kunnen we kiezen:

- ofwel plaatsen we door het toepassen van elementaire rijoperaties nog een nul in de tweede kolom in rij 1

  $$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  en bekomen we het gelijkwaardige maar eenvoudigere stelsel

  $$\begin{cases} u & & = 3 \\ & v & = 2 \end{cases}$$

  Er is dus een unieke oplossing die onmiddellijk kan worden afgelezen: $(u, v) = (3, 2)$.

- ofwel noteren we meteen het gelijkwaardige stelsel

  $$\begin{cases} u + v = 5 \\ v = 2 \end{cases}$$

  en lossen het verder op met achterwaartse substitutie

  $$\begin{cases} u = 5 - v \\ v = 2 \end{cases} \text{ of } \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$$

We vinden in beide gevallen

$$\mathrm{Opl}(S) = \{\ (3, 2)\ \}$$

Voorbeeld 5. Het stelsel

$$\begin{cases} -3s + 6t - u + v - 7w = 5 \\ s - 2t + 2u + 3v - w = 0 \\ 2s - 4t + 5u + 8v - 4w = 1 \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

heeft als uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

We vereenvoudigen de matrix, en dus het stelsel, door rijoperaties toe te passen. In een eerste stap zorgen we dat er nullen staan in de **eerste** kolom in rij 2 en rij 3:

De tweede rij met drie vermenigvuldigen (een herschaling) geeft

$$\xrightarrow{R_2 \to 3R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 3 & -6 & 6 & 9 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

en dan levert bij de tweede rij de eerste rij optellen een nul in de eerste kolom op de tweede rij:

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Deze twee elementaire operaties samen kunnen beschouwd worden als één (niet elementaire) operatie: vervang rij 2 door 3 maal zichzelf plus rij 1 ($R_2 \to 3R_2 + R_1$).

Op dezelfde manier levert rij 3 vervangen door 3 maal zichzelf plus 2 maal rij 1:

$$\xrightarrow{R_3 \to 3R_3 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{array}\right]$$

Door in deze eerste stap door middel van rijoperaties nullen te plaatsen in de eerste kolom in rij 2 en rij 3, zijn in dit voorbeeld ook meteen nullen terecht gekomen in de **tweede** kolom.

In de volgende stap plaatsen we een nul in de **derde** kolom in rij 3.

$$\xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_3/13]{R_2 \to R_2/5} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nu kunnen we kiezen:

- ofwel plaatsen we door het toepassen van elementaire rijoperaties nog een nul in de derde kolom in rij 1

  $$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  en delen we de eerste rij door -3 om verder te vereenvoudigen

  $$\xrightarrow{R_1 \to R_1/(-3)} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.44)

Zo bekomen we het gelijkwaardige maar eenvoudigere stelsel

$$\begin{cases} s & -2t & +0u & -v & +3w & = -2 \\ & & u & +2v & -2w & = 1 \end{cases}$$

Voor willekeurige waarden voor t, v en w vinden we de bijhorende u en s als

$$\begin{cases} s &= -2 + 2t + v - 3w \\ u &= 1 - 2v + 2w \end{cases}$$

- ofwel noteren we meteen het gelijkwaardige stelsel

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ & & u & +2v & -2w & = 1 \end{cases}$$

en lossen het verder op met achterwaartse substitutie

$$\begin{cases} -3s &= 5 - 6t + u - v + 7w = 5 - 6t + 1 - 2v + 2w - v + 7w \\ u &= 1 - 2v + 2w \end{cases}$$

Voor willekeurige waarden voor t, v en w vinden we de bijhorende u en s als

$$\begin{cases} -3s &= 6 - 6t - 3v + 9w \\ u &= 1 - 2v + 2w \end{cases} \quad \text{of} \quad \begin{cases} s &= -2 + 2t + v - 3w \\ u &= 1 - 2v + 2w \end{cases}$$

We vinden in beide gevallen

$$\text{Opl}(S) = \{ (-2 + 2t + v - 3w, t, 1 - 2v + 2w, v, w) \mid t, v, w \in \mathbb{R} \}$$

We bestuderen de methode die toegepast werd in bovenstaande voorbeelden nu wat formeler.

Definitie 2. Een matrix is in **rijcanonieke vorm** of **gereduceerde rijechelonvorm** als:

(a) het eerste niet-nul element in een rij is steeds 1. Dergelijk element noemen we een **spil** (Engels: pivot).

(b) boven en onder elke spil staan enkel nullen.

(c) voor elke spil geldt dat de spil van een *lagere* rij steeds verder naar *rechts* staat.

(d) nulrijen staan onderaan staan (als er zijn).

Opmerking 2.

- Elke matrix kan je met behulp van elementaire rijoperaties in rijcanonieke vorm brengen.
- In de verdere voorbeelden zullen we de spilelementen *omcirkelen*.
- De derde regel leidt tot de kenmerkende (dalende) *trap*- of echelonvorm met de spilelementen.
- Er bestaat ook een meer algemene, niet noodzakelijk *gereduceerde rijechelonvorm*: dan vervalt de voorwaarde dat *boven* de spil nullen moeten staan en dat de spillen 1 moeten zijn. Zowel met de gereduceerde als met de niet-gereduceerde echelonvorm kunnen stelsels worden opgelost, zoals getoond in bovenstaande voorbeelden. Bij de niet-gereduceerde echelonvorm gebruik je achterwaartse substitutie om de oplossingen te vinden, bij de gereduceerde echelonvorm zijn de oplossingen direct af te lezen.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.44)

Lineaire stelsels: oplossen via echelonvorm

In onderstaande voorbeelden stelt een $*$ een willekeurig getal voor, al dan niet 0.

Voorbeeld 6. Voorbeelden van matrices in rijcanonieke vorm of gereduceerde rijechelonvorm :

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 7. Voorbeelden van matrices in rijechelonvorm maar niet in gereduceerde rijechelonvorm:

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 7 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 8. Voorbeelden van matrices NIET in rijechelonvorm:

$$\begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & * & * \\ 0 & 1 & \textcircled{1} & * & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oefening 1. Staan volgende matrices in rijcanonieke vorm (of ook: gereduceerde echelonvorm) ?

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

5. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

6. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja | Nee

Opmerking 3. In Voorbeeld 5 werden in de *eerste kolom* alle elementen nul gemaakt behalve het element links boven (dat zelf verschillend was van nul) door de andere rijen te herschalen en een

CC BY-NC-SA 4.0

gepast veelvoud van de eerste rij daarvan af te trekken. Dit noemen we het *schoonvegen van een kolom*.

De **eliminatiemethode van Gauss** veegt achtereenvolgens verschillende kolommen van de matrix $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ schoon. Hiervoor gebruiken we in elke stap een van nul verschillend zogenaamd *spilelement*, dat telkens dezelfde rol speelt als het element links boven in voorbeeld 5.

Voorbeeld 9 (spilelement)**.** Hoe vind je een spilelement? Een spil wordt eerst en vooral steeds gezocht in de deelmatrix *onder en rechts* van de vorige spil. Bij het zoeken van de eerste spil is deze deelmatrix de gehele matrix. Als we verder werken op voorbeeld 5, bekijken we dus de volgende matrix die we bekomen hadden maar dan zonder de eerste rij en de eerste kolom, als volgt:

uit $\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$ halen we de deelmatrix $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$

In deze deelmatrix zoeken we *de eerste kolom die niet volledig uit nullen bestaat*. In het voorbeeld is dat de tweede kolom van de 2×5 deelmatrix. We kiezen het bovenste niet-nul element, 5, als spil en vegen daarmee de hele derde kolom van de totale matrix schoon, zowel boven als onder de spil. Hiertoe combineren we zowel de eerste als de derde rij met de tweede om boven en onder de 5 een nul te bekomen als volgt.

We nemen terug de volledige matrix (en niet de deelmatrix, die enkel diende om de nieuwe spil te bepalen):

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

Door bij elke rij een geschikt veelvoud op te tellen van de **spilrij** (rij 2), kunnen we de **spilkolom** (kolom 3) 'schoonvegen'. We kunnen, zoals in Voorbeeld 5, eerste rij 2 delen door 5 en rij 3 door 13, of we gaan als volgt te werk:
Rij 1 vervangen door vijf maal zichzelf plus rij 2 levert

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

Rij 3 vervangen door 5 maal zichzelf min 13 maal rij 2 levert

$$\begin{bmatrix} -15 & 30 & 0 & 15 & -45 & 30 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Merk op dat bij het schoonvegen van de derde kolom de nullen die we al bekomen hadden in de eerste twee kolommen niet gewijzigd zijn.

Via een herschaling van rij 1 en rij 2 zorgen we tenslotte nog dat het eerste element van de niet-nulrijen een 1 is: Dit levert

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Deze matrix is in rijcanonieke vorm.

Merk op dat in de bovenstaande afleiding geen rijverwisselingen voorkwamen, enkel herschalingen en optellingen. Veronderstel echter dat we volgende deelmatrix hadden gevonden:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} & 10 & -10 & 5 \\ 0 & 13 & 26 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.44)

Dan is de tweede kolom van de deelmatrix nog steeds de eerste niet-nulkolom. Maar het eerste niet-nulelement, 13, staat dan niet bovenaan. In zo'n geval moet de rij van de nieuwe spil door een verwisseling net onder de rij van de vorige spil gebracht worden om tot een echte trapvorm te komen. Dus zouden we in dit voorbeeld rij 2 met rij 3 moeten verwisselen.

Bij een uitgebreide matrix in *rijcanonieke vorm* kan je de oplossing van een stelsel direct *aflezen*:

Eigenschap 2 (Oplossingen van een stelsel in rijcanonieke vorm)**.**

Voor een stelsel S met uitgebreide matrix $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$ *in rijcanonieke vorm* geldt:

- De **spilkolommen** zijn de kolommen die een spil bevatten .
- De **hoofdonbekenden** of **gebonden onbekenden** zijn de onbekenden die horen bij een spilkolom, de andere onbekenden zijn de **nevenonbekenden** of **vrije onbekenden**.
- Het *aantal* oplossingen van het stelsel hangt af van de *plaats* van de spilelementen:
  - *de laatste kolom* (= het rechterlid) bevat een spil: er is **geen oplossing**.
    Inderdaad, het stelsel is *strijdig*, want
    een rij $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right]$ komt overeen met de strijdige vergelijking $0x_0 + \ldots 0x_n = 1$.
  - *elke kolom behalve de laatste* bevat een spil: er is een **unieke oplossing**.
    Inderdaad, de matrix is dan van de vorm (met $b_i \in \mathbb{R}$)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

    en de overeenkomstige vergelijkingen geven dus direct de unieke oplossing: $x_i = b_i$.
  - in alle andere gevallen: er zijn **oneindig veel oplossingen**.
    Inderdaad, de matrix is dan van de vorm (met de b_i en * willekeurige getallen)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & * & 0 & * & 0 & * & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

    Bij elke willekeurige keuze van de *vrije* onbekenden, hoort dan precies één set waarden voor de gebonden onbekenden die een oplossing opleveren voor het stelsel. Het aantal vrije onbekenden noemt men ook het **aantal vrijheidsgraden** of de **dimensie** van de oplossingsverzameling.

Opmerking 4. Als een *homogeen* stelsel $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ een unieke oplossing oplossing heeft, dan is dit altijd de nulvector $\mathbf{x} = 0$.

Voorbeeld 10. [Vervolg van Voorbeeld 9]

In het vorige voorbeeld berekenden we voor het stelsel S : $\left\{\begin{array}{rrrrrr} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 1 \end{array}\right.$

CC BY-NC-SA 4.0

de rijcanonieke vorm

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Voor dit stelsel zijn de *eerste* en de *derde* kolom de *spilkolommen*: s en u zijn dus gebonden onbekenden, en t, v en w vrije onbekenden.

Bij elke willekeurige keuze van vrije onbekenden t, v, w vinden we precies één set van waarden voor de gebonden onbekenden s en u. Als we t, v, w *vrij* kiezen als

$$t = a, \quad v = b, \quad w = c,$$

met a, b, en c willekeurige reële getallen, dan ligt de waarde van de gebonden onbekenden vast om een oplossing te hebben voor het stelsel: de *gebonden variabelen* hebben dus een waarde die *gebonden* is aan de vrije keuzes voor de waarden van de vrije variabelen. De gebonden variabelen zullen dus uitdrukkingen worden in de *parameters* a, b en c. Elk van de vergelijkingen in de rijcanonieke vorm

$$\begin{cases} s & -2t & & -v & +3w & = -2 \\ & & u & +2v & -2w & = 1 \end{cases}$$

bevat immers precies één van de gebonden onbekenden, die we daar telkens uit kunnen 'berekenen in functie van de vrije onbekenden':

$$\begin{cases} s & = & -2 & +2a & +b & -3c \\ u & = & 1 & & -2b & +2c \end{cases}$$

Samen levert dat de volledige oplossing

$$(s, t, u, v, w) = (-2 + 2a + b - 3c, a, 1 - 2b + 2c, b, c)$$

of

$$(s, t, u, v, w) = (-2, 0, 1, 0, 0) + a(2, 1, 0, 0, 0) + b(1, 0, -2, 1, 0) + c(-3, 0, 2, 0, 1)$$

met a, b en c willekeurige reële getallen. De oplossingsverzameling is dus

$$\mathrm{Opl}(S) = \{(-2 + 2a + b - 3c, a, 1 - 2b + 2c, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} .$$

Opmerking 5. Het is niet strikt nodig om te schrijven dat $t = a, v = b, w = c$ voor willekeurige $a, b, c \in \mathbb{R}$. Je kan dan even goed zeggen dat $t, v, w \in \mathbb{R}$ willekeurig zijn. Je kan de oplossingsverzameling dus ook schrijven als

$$\mathrm{Opl}(S) = \{(-2 + 2t + v - 3w, t, 1 - 2v + 2w, v, w) \mid t, v, w \in \mathbb{R}\} .$$

Voorbeeld 11. De uitgebreide matrix van het homogene stelsel

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 0 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 0 \end{cases}$$

is $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right]$.

Dit stelsel heeft dezelfde matrix $\mathbf{A}$ als voorbeeld 5, maar het rechterlid is 0. De oplossingsmethode verloopt volledig analoog, alleen bestaat de laatste kolom van de uitgebreide matrix uit nullen. *Der-*

CC BY-NC-SA 4.0

gelijke nulkolom blijft onveranderd doorheen de verschillende rijoperaties! De rijcanonieke vorm is dan ook dezelfde, op de laatste kolom na. De oplossingen zijn

$$\text{Opl}(S) = \{(2a + b - 3c, a, -2b + 2c, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

CC BY-NC-SA 4.0