Lineaire stelsels: definitie

We bespreken hier het oplossen van *stelsels van lineaire vergelijkingen*. Dergelijke lineaire stelsels komen vaak voor bij allerlei problemen in de wiskunde, fysica, scheikunde, economie, ... **Lineair** betekent daarbij dat de onbekenden voorkomen *zonder machten* of meer ingewikkelde uitdrukkingen als wortels of sinussen, en **stelsel** betekent dat de onbekenden aan *meerdere vergelijkingen tegelijk* moeten voldoen.

Voorbeeld 1.

1. Zoek twee getallen waarvan de som 5 is en het verschil 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=5$ en het verschil $x-y=1$, en we zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het lineaire stelsel

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

Merk op:

- Je kan in dit geval de gezochte getallen snel vinden door te *proberen*: de som moet 5 zijn, dus als we ons beperken tot natuurlijke getallen zijn de mogelijkheden $0+5$, $1+4$ of $2+3$. Enkel voor $2+3$ is het verschil 1, dus de oplossing is 2 en 3.
  In dit eenvoudige geval is het niet echt nuttig om onbekenden en stelsels op te schrijven. Maar zodra de voorwaarden wat ingewikkelder zijn, wordt *proberen* snel moeilijk en is *uitrekenen* meestal sneller.
- Als je toch een stelsel opschrijft, kan je in dit eenvoudige geval dat stelsel ook makkelijk oplossen. Als $x+y=5$ en $x-y=1$ dan is ook hun som gelijk: $(x+y)+(x-y)=5+1$. Deze laatste vergelijking reduceert zich echter tot $2x=6$ en dus $x=3$. Invullen dat $x=3$ in de eerste vergelijking $x+y=5$ levert $3+y=5$ of $y=2$.
  De methode voor het oplossen van stelsels is eigenlijk een veralgemening van dit eenvoudig trucje.
- Je kan dit stelsel ook opschrijven met matrices:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\cdot x+1\cdot y=5 \\ 1\cdot x+(-1)\cdot y=1 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Zoek twee getallen waarvan de som 3.1415 is en het verschil 1.2345.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x+y=3.1415$ en het verschil $x-y=1.2345$, en we zoeken getallen x en y die aan beide vergelijkingen voldoen. We zoeken dus de oplossing van het stelsel.

$$\begin{cases} x+y=3.1415 \\ x-y=1.2345 \end{cases}$$

Merk op:

- Je kan de getallen x en y nu veel minder makkelijk vinden door *proberen*.
- Je kan in dit eenvoudige geval het stelsel toch makkelijk oplossen met dezelfde methode als hiervoor: als $x+y=3.1415$ en $x-y=1.2345$ dan moet natuurlijk ook $(x+y)+(x-y)=3.1415+1.2345=4.3760$. Deze vergelijking reduceert zich tot $2x=4.376$ en dus $x=2.188$. Invullen van $x=2.188$ in de eerste vergelijking geeft $2.188+y=3.1415$ of $y=3.1415-2.188=1.9535$.

- Je kan ook dit stelsel schrijven met matrices:

$$\begin{cases} x+y=3.1415 \\ x-y=1.2345 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3.1415 \\ 1.2345 \end{bmatrix}$$

3. Zoek drie getallen waarvan het grootste dubbel zo groot is als het kleinste, het middelste de helft is van de som van de twee anderen, en het gemiddelde 42 is.

CC BY-NC-SA 4.0

Uitwerking: Noem de gezochte getallen, geordend van groot naar klein, x, y en z. Dan weten we dat $x = 2z$, $y = \frac{x+z}{2}$ en $\frac{x+y+z}{3} = 42$, en zoeken we dus de oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 126 \end{cases}$$

We bestuderen verder een oplossingsmethode voor een stelsel als dit. We schrijven het alvast met matrices:

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 126 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 126 \end{bmatrix}$$

Niet alle problemen leiden tot lineaire stelsels:

Voorbeeld 2 (Niet lineaire stelsels)**.**

1. Zoek twee getallen waarvan de som 5 is en het *product* 1.

Uitwerking: Noem de gezochte getallen x en y. Dan kennen we de som $x + y = 5$ en het product $x \cdot y = 1$, en we zoeken getallen x en y die voldoen aan het stelsel

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \cdot y = 1 \end{cases}$$

Merk op dat dit *wel een stelsel* is, maar *geen lineair stelsel*, want er komt een *product* van de onbekenden in voor. De tweede vergelijking is *geen lineaire vergelijking*. Dat soort stelsels is in het algemeen *veel moeilijker* om op te lossen. Merk ook op dat je dit stelsel niet op dezelfde manier als hierboven kan schrijven met matrices.

Definitie 1 (Lineair stelsel)**.**

Een **lineair stelsel van m vergelijkingen met n onbekenden** is een stel van m lineaire vergelijkingen met in totaal n onbekenden. Dergelijk lineair stelsel noteren we als

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

met S de naam van het stelsel, a_{ij} de **coëfficiënten**, $x_1, \ldots, x_n$ de **onbekenden** en b_i de **rechterleden** of **constante termen**.

De **coëfficiëntenmatrix** van het stelsel is de $m \times n$ matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

De **uitgebreide matrix** van het stelsel is de $m \times (n+1)$ matrix met de constante termen toegevoegd:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

CC BY-NC-SA 4.0

Lineaire stelsels: definitie

Een lineair stelsel is **homogeen** als alle constante termen nul zijn, dus alle $b_i = 0$.

De uitdaging bij dergelijke stelsels is om de letters x_i te vervangen door geschikte reële getallen zodat alle gelijkheden opgaan. We noemen dat het *oplossen van het stelsel* en de gevonden reële getallen zijn dan *oplossingen van het stelsel*.

Voorbeeld 3. Het stelsel

$$S_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

is een homogeen lineair stelsel met twee vergelijkingen in drie onbekenden x_1, x_2, x_3.

Opmerking 1.

- De term *rechterlid* is gebruikelijk in de wiskunde, maar is eigenlijk verwarrend of zelfs misleidend: een vergelijking $x+y = 2$ kan natuurlijk ook geschreven worden als $x+y-2 = 0$, maar $x+y-2 = 0$ is *geen* homogene vergelijking, en volgens bovenstaande definitie is het 'rechterlid' gelijk aan 2. Het begrip 'rechterlid' slaat dus op vergelijkingen in standaardvorm: alle onbekenden in het linkerlid en de constante term rechts.
- Om verwarring te voorkomen is het belangrijk steeds de verticale lijn van de uitgebreide matrix te noteren.
- Bij 2 onbekenden worden vaak de letters x en y gebruikt en bij 3 onbekenden x, y en z.

Eigenschap 1 (Matrixvorm van een lineair stelsel)**.**

Elk lineair stelsel

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

kan in **matrixvorm** worden geschreven als $\mathbf{Ax = b}$

$$S : \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

waarbij

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 4. Het stelsel

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

is een lineair stelsel met twee vergelijkingen in drie onbekenden met als coëfficiëntenmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

en als uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

We kunnen het stelsel dus schrijven als

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Voorbeeld 5. Bepaal alle reële getallen s, t, u, v, w waarvoor

$$\begin{cases} -3s & +6t & -u & +v & -7w & = 5 \\ s & -2t & +2u & +3v & -w & = 0 \\ 2s & -4t & +5u & +8v & -4w & = 1 \end{cases}$$

Dit is een *lineair stelsel van drie vergelijkingen in vijf onbekenden*.

- Dit is de wiskundige weergave van een probleem waarbij we weten dat er tussen de vijf onbekende grootheden s, t, u, v, w drie lineaire verbanden bestaan. De uitdaging is *alle waarden* te vinden voor de onbekende grootheden die aan *alle* (lineaire) verbanden voldoen.
- Met matrices en vectoren kunnen we het stelsel eenvoudiger schrijven: de vijf onbekenden (s, t, u, v, w) worden een 5×1 kolomvector $\mathbf{x}$, de coëfficiënten van de vergelijkingen vormen de 3×5 *coëfficiëntenmatrix* $\mathbf{A}$ en de rechterleden zetten we in een 3×1 kolomvector $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Het stelsel kan nu geschreven worden als $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ of

$$\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De uitgebreide matrix, die dus alle gegevens van het stelsel bevat, is

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 1 \end{array}\right].$$

Oefening 1. Welke van de volgende stelsels zijn lineair in de onbekenden u en v? Schrijf de lineaire stelsels ook in matrixvorm.

1. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} 2u + v & = 5 \\ 4u + 2v & = 1 \end{cases}$$

2. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} 2u + v & = 5 \\ 4u + 2v & = u \end{cases}$$

CC BY-NC-SA 4.0

Lineaire stelsels: definitie

3. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} 2u &= 5 \\ 2v &= 1 \end{cases}$$

4. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} (u+2)u - u^2 &= 5 \\ 4u + 2v &= 1 \end{cases}$$

5. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} \sin(u) + \cos(v) &= 1 \\ \sin(u) - 2\cos(v) &= 1/2 \end{cases}$$

6. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} u^2 + v &= 1 \\ -u^2 - 2v &= 2 \end{cases}$$

7. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} au + 2v &= 5 \\ 4u + bv &= 1 \end{cases} \quad (\text{met } a, b \in \mathbb{R})$$

8. Lineair | Niet lineair

$$\begin{cases} x^3 u + \cos(y)v &= 5 \\ 4u + x^3 v &= 1 \end{cases} \quad (\text{met } x, y \in \mathbb{R})$$

CC BY-NC-SA 4.0