Vectoren

We gebruiken het begrip *vector* hier als een andere naam voor een *n-tal van reële getallen*. Dergelijke vectoren veralgemenen de koppels (x, y), dus punten of vectoren in het vlak, en de drietallen (x, y, z), dus punten of vectoren in de driedimensionale ruimte.

Definitie 1 (Vector als n-tal)**.**

Een **vector a** is een geordend n-tal reële getallen:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Men noemt n de **dimensie** van de vector $\mathbf{a}$.

De getallen $a_1, a_2, \dots, a_n$ zijn de **componenten** (of ook **coördinaten**) van de vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Voorbeeld 1.

$(1, 2)$	heeft 2 componenten	$(\sqrt{2}, 0, -1, \pi)$	heeft 4 componenten
$(1, -2, \frac{1}{2})$	heeft 3 componenten	$(1, 2, \dots, n)$	heeft n componenten

Opmerking 1.

- In andere contexten worden andere definities gegeven van vectoren: vectoren komen onder verschillende gedaantes voor in de meetkunde, in de fysica en in de lineaire algebra.
- Men noteert een vector $\mathbf{a}$ soms ook met een pijltje als $\vec{a}$ of gewoon als a. Uiteraard kunnen er ook andere letters gebruikt worden zoals $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ of $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$.
- Vectoren zijn *gelijk* als ze *dezelfde componenten* hebben *in dezelfde volgorde*: $(0.5, 1) = (\frac{1}{2}, 1)$ en $(1, 2) \neq (2, 1)$.

De belangrijkste bewerkingen op vectoren zijn de *som* en het *scalair veelvoud*.

Definitie 2 (Rekenen met vectoren)**.**

Voor twee vectoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ en een getal $r \in \mathbb{R}$ definiëren we:

som	$\mathbf{a} + \mathbf{b}$	$=$	$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$
scalair veelvoud	$r\mathbf{a}$	$=$	$r \cdot \mathbf{a} = r(a_1, a_2, \dots, a_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$
tegengestelde	$-\mathbf{a}$	$=$	$-(a_1, a_2, \dots, a_n)$	$\overset{\text{def}}{=}$	$(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$
verschil	$\mathbf{a} - \mathbf{b}$	$\overset{\text{def}}{=}$	$\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$	$=$	$(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$

Voorbeeld 2.

$$(1, 2) + (3, 4) = (1 + 3, 2 + 4) = (4, 6) \qquad (4, 3) - (2, 1) = (4 - 2, 3 - 1) = (2, 2) = 2 \cdot (1, 1)$$
$$-(1, 2, 3) = (-1, -2, -3) \qquad (1, -1.5, 3) + (2.2, -1, 0) = (3.2, -2.5, 3)$$
$$3 \cdot (1, 2) = (3, 6) \qquad 3 \cdot (1, -1, 0.5) = (3, -3, 1.5)$$

Oefening 1. Bereken

1. $(2, 1) + (1, -1) = \dots\dots$

2. $2 \cdot (2, 1) = \dots\dots$

3. $-(1, -1) = \dots\dots$

CC BY-NC-SA 4.0

Opmerking 2.

- De som en het verschil van vectoren worden 'component per component' berekend. Bijgevolg zijn som en verschil enkel gedefinieerd voor vectoren *van hetzelfde formaat*: de som $(1,2)+(3,4,5,6)$ is *niet gedefinieerd*.
- Net zoals voor de vermenigvuldiging van getallen schrijft men het punt voor de scalaire vermenigvuldiging soms wel en soms niet: $r \cdot \mathbf{a} = r\mathbf{a}$.

Vectoren komen vaak voor in zogenaamde *lineaire combinaties*:

Definitie 3 (Lineaire combinatie)**.**

Een **lineaire combinatie** van vectoren is *een som van (scalaire) veelvouden* van die vectoren.

Als $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$ vectoren zijn van dezelfde dimensie en $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, dan is de vector

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + \ldots + a_m\mathbf{v_m}$$

een *lineaire combinatie* van de vectoren $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_m}$.
De getallen a_i heten de **coëfficiënten** of **gewichten** van de lineaire combinatie.

Voorbeeld 3 (Lineaire combinaties)**.**

1. $2(1,2) + 3(4,5)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$.

2. $(5,7)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

3. $(1,2)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

4. $(2,4)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2)$ en $(4,5)$

5. $(2,4,0)$ is een lineaire combinatie van de vectoren $(1,2,0)$ en $(4,5,0)$

6. $(2,4,1)$ is geen lineaire combinatie van de vectoren $(1,2,0)$ en $(4,5,0)$

7. $3(1,2.5,-1,1) - 2(2,0,1,-1) + 2(1,-1,0.5,0) = (1,5.5,-4,5)$ is een lineaire combinatie van $(1,2.5,-1,1)$, $(2,0,1,-1)$ en $(1,-1,0.5,0)$.

Definitie 4.

Het **inwendig product** (ook **scalair product**) van vectoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ is het reëel getal

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) \overset{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 4.

$$(1,2) \cdot (3,4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11 \quad \text{en} \quad (3,-2,1) \cdot (2,2,-2) = 6 - 4 - 2 = 0.$$

We gebruiken de notatie $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ om aan te duiden dat de vectoren $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ loodrecht staan op elkaar. In 2 dimensies kan je gemakkelijk inzien dat

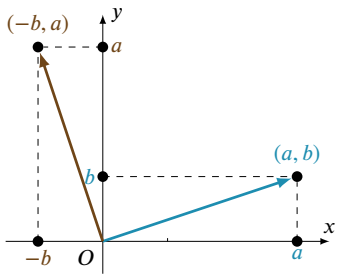
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b},$$

want een kwartdraai van het vlak in tegenwijzerzin brengt de positieve x-as naar de positieve y-as en de positieve y-as naar de negatieve x-as. Een punt (a,b) komt bij een kwartdraai dus terecht op het punt

CC BY-NC-SA 4.0

$(-b, a)$, en na een kwartdraai staat de vector $(-b, a)$ dus loodrecht op de oorspronkelijke vector (a, b):

$$(a, b) \perp (-b, a) \qquad \text{en} \qquad (a, b) \cdot (-b, a) = a(-b) + ba = 0.$$



Ook in 3 dimensies kan men aantonen dat $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Oefening 2.

1. $(2, 1) \cdot (1, -1) = \ldots\ldots$

2. $(1, 2, 3) \cdot (-2, 1, 0) = \ldots\ldots$

3. | Juist | Fout | $(1, 2, 3) \perp (-2, 1, 0)$?

CC BY-NC-SA 4.0