Matrices

Net zoals een vector een manier is om veel *getallen* bij te houden, is een *matrix* een manier om veel *vectoren* (van dezelfde dimensie) bij te houden. Een matrix is *een rechthoek van getallen*, met m rijen van telkens n getallen. Matrices zijn erg nuttig bij de studie van stelsels van vergelijkingen maar komen ook voor in andere contexten.

Voorbeeld 1. Examenresultaten voor verschillende vakken kan je bijhouden in een tabel:

	Wiskunde	Nederlands	Engels	Duits
An	80	80	40	20
Bart	72	62	23	11
Chris	74	65	38	10
Dirk	73	70	29	17
Els	75	71	30	15

Je kan dezelfde gegevens ook in volgende (punten)matrix $\mathbf{A}$ opschrijven

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 80 & 80 & 40 & 20 \\ 72 & 62 & 23 & 11 \\ 74 & 65 & 38 & 10 \\ 73 & 70 & 29 & 17 \\ 75 & 71 & 30 & 15 \end{bmatrix}.$$

In deze voorstelling bevat elke rij de punten van een bepaalde leerling, en elke kolom de punten van een bepaald vak. We noemen deze matrix $\mathbf{A}$ een 5×4-matrix met 5 *rijen* en 4 *kolommen*. Het getal op rij 3 en kolom 2 zijn de punten van Chris voor Nederlands.

Definitie 1 (Matrix)**.**

Een reële $m \times n$ **matrix** $\mathbf{A}$ is een rechthoekig rooster van reële getallen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{met } m \text{ rijen en } n \text{ kolommen.}$$

- De **matrixelementen** (of soms ook *componenten*) van $\mathbf{A}$ zijn de getallen $a_{11}, \ldots a_{ij}, \ldots, a_{mn}$.
- Men noteert ook $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.
- Een $m \times n$ matrix heeft m rijen en n kolommen.
- Een $n \times n$ matrix (dus met evenveel rijen als kolommen) noemen we een **vierkante matrix**.
- Een $m \times 1$ **kolommatrix** (of **kolomvector**) is een matrix met één kolom.
- Een $1 \times n$ **rijmatrix** (of **rijvector**) is een matrix met één rij .
- De **diagonaal** van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ bestaat uit de elementen a_{ii} die we de **diagonaalelementen** van de matrix noemen. Voor een vierkante matrix vormen ze inderdaad de diagonaal van de matrix.

Voorbeeld 2.

CC BY-NC-SA 4.0

Matrices

- $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ is een 2×2 matrix met $a_{11} = 1, a_{21} = 3, a_{12} = 2$ en $a_{22} = 4$
- $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 2×3 matrix en $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ is een 3×2 matrix.
- $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ is een rijmatrix en $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ is een kolommatrix.
- In volgende voorbeelden zijn de diagonaalelementen aangeduid:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 4 & \mathbf{5} & 6 \\ 7 & 8 & \mathbf{9} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & \mathbf{5} & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & \mathbf{9} & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 \\ 4 & \mathbf{5} \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Opmerking 1.

- In deze notatie $m \times n$ mag het 'product' $m \times n$ *niet* worden uitgerekend: een 2×3 matrix is niet hetzelfde als een 3×2 matrix of een 6×1 matrix.
- De eerste index i geeft het nummer van de *rij* aan, de tweede index j die van de *kolom*.
- In sommige cursussen gebruikt men ronde haakjes in plaats van rechte haakjes: $\mathbf{A} = (a_{ij})$.
- In het geval $n = m = 1$ wordt er bijna nooit onderscheid gemaakt tussen een 1×1 matrix $[a]$, een vector met 1 component (a) en een getal a.
- Strikt wiskundig zijn vectoren, rijmatrices en kolommatrices *verschillend*,dus

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \neq (1, 3, -2),$$

maar als de betekenis voldoende duidelijk is uit de context worden ze toch door elkaar gebruikt.

Enkele speciale types van vierkante matrices krijgen een eigen naam:

Definitie 2 (Speciale matrices)**.**

De **nulmatrix** $\mathbf{O}_n$	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen 0 zijn.
De **eenheidsmatrix** $\mathbf{I}_n$	is een $n \times n$ matrix waarvan de diagonaalelementen gelijk zijn aan 1 en alle andere elementen gelijk zijn aan 0.
Een **diagonaalmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen buiten de diagonaal 0 zijn.
Een **bovendriehoeksmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen *onder* de diagonaal 0 zijn.
Een **onderdriehoeksmatrix**	is een $n \times n$ matrix waarvan alle elementen *boven* de diagonaal 0 zijn.

Voorbeeld 3. Een eenheidsmatrix, een diagonaalmatrix en een bovendriehoeksmatrix:

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

Matrices

We definiëren de optelling en de scalaire vermenigvuldiging van matrices op dezelfde manier als voor vectoren: element-per-element. Voor de optelling is het dus belangrijk dat beide matrices dezelfde afmetingen hebben: allebei evenveel rijen en evenveel kolommen.

Definitie 3 (Optelling en scalair veelvoud van matrices)**.**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$r\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{bmatrix}$$

Het verschil van matrices en de tegengestelde matrix worden gedefinieerd net zoals voor vectoren.

Voorbeeld 4 (Som, verschil, tegengestelde en scalair veelvoud van matrices)**.**

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 33 & 36 \end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 44 \end{bmatrix} \qquad -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

maar de sommen $\begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 40 & 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 10 & 200 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ bestaan niet.

Het product van een matrix met een kolomvector:

Definitie 4 (Matrix-vector-product)**.**

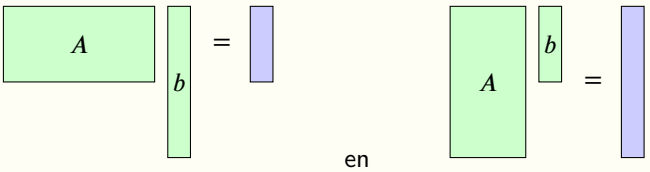
Het product van een $m \times n$ matrix $\mathbf{A}$ met een $n \times 1$ kolomvector $\mathbf{b}$ is de $m \times 1$ kolomvector $\mathbf{Ab}$ gegeven door

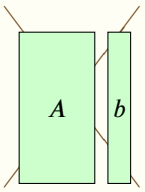
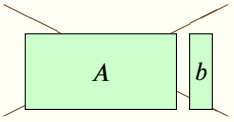
$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \vdots \\ \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots + a_{2n}b_n \\ \\ \vdots \\ \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \ldots + a_{mn}b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_k \end{bmatrix}.$$

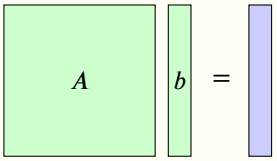
Opmerking 2.

(a) Het product $\mathbf{Ab}$ is enkel gedefinieerd als het aantal *kolommen* van $\mathbf{A}$ gelijk is aan het aantal *rijen* van $\mathbf{b}$. Het resultaat is een *kolomvector* met evenveel rijen als $\mathbf{A}$. Visueel betekent dit:

CC BY-NC-SA 4.0



maar volgende producten zijn onmogelijk:  en  .

Enkel voor *vierkante* matrices heeft $\mathbf{Ab}$ dezelfde vorm als $\mathbf{b}$: 

(b) Zoals gebruikelijk bij producten schrijft men soms ook een punt: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{Ab}$. Bi matrices wordt de punt echter meestal weggelaten.

(c) Als $\mathbf{A}$ een rijvector is schrijven we dergelijke matrix soms ook met een kleine letter $\mathbf{a}$, dan is het product $\mathbf{ab}$ het reële getal gegeven door

$$\mathbf{ab} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \overset{\text{def}}{=} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k \quad \in \mathbb{R}.$$

en dit komt neer op het *scalair product* van $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.

Voorbeeld 5.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 1\cdot 5 + 2\cdot 7 = 19$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 3\cdot 5 + 4\cdot 7 = 43.$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 1\cdot 6 + 2\cdot 8 = 22$ en $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = 3\cdot 6 + 4\cdot 8 = 50.$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 50 \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1 + 4\cdot 2 \\ 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 1 + 6\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 6 + 3 + 8 \\ 6 + 12 + 5 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 35 \end{bmatrix}$.

CC BY-NC-SA 4.0

Het product van twee matrices:

Definitie 5 (Matrix-matrix-product)**.**

Het product van $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is $m \times n$ matrix $\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right]$ waarbij het element c_{ij} op de i-de rij en de j-de kolom gelijk is aan het product van de i-de rij van $\mathbf{A}$ met j-de kolom van $\mathbf{B}$:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Voorbeeld 6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 4 & 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 2\cdot 3 + 3\cdot 4 & 2\cdot 5 + 3\cdot 7 & 2\cdot 6 + 3\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 19 & 22 \\ 18 & 31 & 36 \end{bmatrix}.$$

Met sommatietekens kan je dit als volgt schrijven:

Eigenschap 1.

Het product van een $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met een $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ is een $m \times n$ matrix:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix} \quad \text{(een } m \times n \text{ matrix)}$$

In het bijzonder is het product van een $m \times p$ matrix $\mathbf{A}$ met een $p \times 1$ kolommatrix $\mathbf{b}$ een $m \times 1$ kolommatrix:

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_{k} \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_{k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{mk}b_{k} \end{bmatrix} \quad \text{(een } m \times 1 \text{ kolomvector)}$$

en het product van een $1 \times p$ rijmatrix $\mathbf{a}$ met een $p \times n$ matrix $\mathbf{B}$ een $1 \times n$ rijmatrix:

$$\mathbf{aB} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{k}b_{k1} & \sum_{k=1}^{p} a_{k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{p} a_{k}b_{kn} \end{bmatrix} \quad \text{(een } 1 \times n \text{ rijvector)}$$

Voorbeeld 7.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} =$$

CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+a_{24}b_{41} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+a_{24}b_{42} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}+a_{34}b_{41} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{42} \end{bmatrix}.$$

Opmerking 3.

- Optellen van twee matrices werkt enkel als ze dezelfde vorm hebben: evenveel rijen en evenveel kolommen. De vermenigvuldiging daarentegen werkt enkel voor $m \times p$ met $p \times n$ matrices, dus als het aantal *kolommen* van de eerste matrix gelijk is aan het aantal *rijen* van de tweede. Het product van een 5×3 matrix $\mathbf{A}$ en een 3×2 matrix $\mathbf{B}$ is de 5×2 matrix $\mathbf{AB}$. Maar een matrix $\mathbf{BA}$ *bestaat dan niet*. Het product $\mathbf{BA}$ is in dit geval *niet gedefinieerd*!
- Een 1×100 matrix maal een 100×1 matrix is een getal, maar een 100×1 matrix maal een 1×100 matrix is een 100×100 matrix.
- Net zoals bij reële getallen wordt $\mathbf{AA}$ genoteerd als $\mathbf{A}^2$.

Voorbeeld 8. Berekening van een 1×2 matrix maal een 2×1 matrix en van een 2×1 matrix maal een 1×2 matrix.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11.$

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$

Oefening 1.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

4. $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \ldots\ldots$

Het optellen en vermenigvuldigen van matrices voldoet aan een aantal verwachte eigenschappen die het optellen en vermenigvuldigen van reële getallen veralgemenen:

Eigenschap 2 (Eigenschappen matrixbewerkingen)**.**

Zij a,b en c reële getallen, en $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ reële matrices. Dan gelden volgende eigenschappen zodra ze betekenis hebben (dat betekent: zodra de matrices het correcte formaat hebben om de optellingen en vermenigvuldigingen te kunnen uitvoeren):

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

CC BY-NC-SA 4.0

(b) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

(c) $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$

(d) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$

(e) $a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$

(f) $(a+b)\mathbf{A}=a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$

(g) $a(b\mathbf{A})=(ab)\mathbf{A}$

(h) $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$

(i) $0\mathbf{A}=\mathbf{O}$

(j) $\mathbf{O}\mathbf{A}=\mathbf{O}$

(k) $a\mathbf{O}=\mathbf{O}$

(l) $(-1)\mathbf{A}=-\mathbf{A}$

(m) $\mathbf{I}\mathbf{A}=\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}\mathbf{I}=\mathbf{A}$

(n) $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C})=(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$

(o) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{A}\mathbf{C}$

(p) $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{B}\mathbf{A}+\mathbf{C}\mathbf{A}$

Let wel op dat met matrices niet *alles* mag wat voor getallen geldt:

Voorbeeld 9. De volgorde van de vermenigvuldiging van matrices mag niet omgewisseld worden:

$$\begin{bmatrix}1&2\\-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&1\\-2&2\end{bmatrix}$$

maar

$$\begin{bmatrix}1&-1\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\1&6\end{bmatrix}.$$

In het algemeen geldt dus dat $\mathbf{AB}$ **niet** gelijk is aan $\mathbf{BA}$.

Voorbeeld 10. Voor sommige matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ geldt toch $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$:

$$\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}$$

en

$$\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5\\0&1\end{bmatrix}.$$

Voorbeeld 11. Een product kan nul zijn zonder dat één van de factoren nul is:

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \text{ en ook } \begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Analoog aan het inverse of omgekeerde van getallen (a^{-1} is het unieke getal b zodat $ab=1$) definiëren we voor matrices:

CC BY-NC-SA 4.0

Definitie 6 (Inverse matrix)**.** Twee matrices $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ zijn elkaars **inverse** als

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

Als voor een gegeven $\mathbf{A}$ dergelijke $\mathbf{B}$ bestaat dan is die uniek, en we noteren die als $\mathbf{A}^{-1}$. Er geldt dus

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

Een belangrijk verschil met reële getallen is dat niet elke matrix een inverse heeft. We gaan hier niet in op het berekenen van een inverse matrix.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.46)