Inwendig product van vectoren

Het *inwendig product* van twee vectoren in $\mathbb{R}^n$ is een reëel getal dat makkelijk te berekenen is en belangrijke informatie levert over de *onderlinge ligging* van die twee vectoren:

Definitie 1. Het **inwendig product** (ook **scalair product**) van vectoren $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ is het reëel getal

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) \overset{\text{def}}{=} u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n \in \mathbb{R}.$$

Voorbeeld 1. $(1,2) \cdot (3,4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11$ en $(3,-2,1) \cdot (2,2,-2) = 6 - 4 - 2 = 0$.

Opmerking 1.

(a) Verwar dit inwendig of scalair *product* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$ tussen twee vectoren niet met het scalair *veelvoud* $r \cdot \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ van een reëel getal met een vector.

(b) In principe laten we de punt bij het scalair product nooit weg: we schrijven $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ en niet $\mathbf{uv}$.

(c) Dit inwendig product komt overeen met een matrixproduct op voorwaarde dat we de eerste vector schrijven als rijvector en de tweede als kolomvector:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

De eerste uitdrukking is een inwendig product van vectoren, de tweede een matrixproduct.

Het resultaat is een getal.

(d) Deze definitie van inwendig product gebruikt essentieel dat vectoren n-tallen zijn. In de wiskunde, fysica en andere wetenschappen komen echter ook meer algemene vectoren voor, en voor die meer algemene vectoren is het definiëren van een inwendig product wat subtieler.

Volgende eigenschappen kan je makkelijk verifiëren:

Eigenschap 1. Voor $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ en $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ en $a, b \in \mathbb{R}$ geldt:

(a) $\mathbf{u} \cdot (a\,\mathbf{v} + b\,\mathbf{w}) = a\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + b\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ en $(a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + b\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ (bilineair)

(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (symmetrisch)

(c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ (positief)

(d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (positief definiet)

Uit de stelling van Pythagoras volgt dat je met behulp van dit inwendig product ook *lengtes* kan berekenen. Wiskundigen gebruiken meestal het woord *norm* voor de lengte van een vector:

Definitie 2. De **norm** of **lengte** van een vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ is

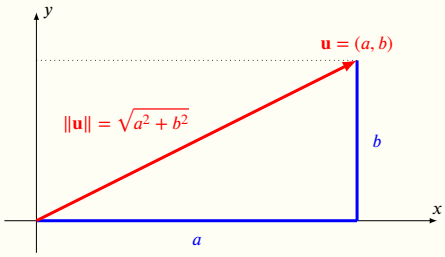
$$\|\mathbf{u}\| = \|(u_1, u_2, \ldots, u_n)\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}.$$

Een **eenheidsvector** (soms ook **genormeerde vector**) is een vector met norm 1.

CC BY-NC-SA 4.0

Opmerking 2.

(a) Voor $n = 2$ volgt het feit dat $c = \|\mathbf{u}\|$ inderdaad de lengte is van $\mathbf{u} = (a, b)$ direct uit de stelling van Pythagoras:



Ook voor grotere n kan men aantonen dat deze formule een zinvol begrip 'lengte' geeft.

(b) Sommige berekeningen worden eenvoudiger als het volstaat het *kwadraat* van de norm te berekenen, want dan valt de vervelende vierkantswortel weg:

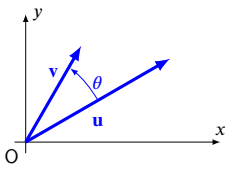
$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2.$$

Er geldt volgend enigszins merkwaardig verband met de *cosinus van de hoek tussen de vectoren*:

Eigenschap 2.

Voor twee vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ geldt $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\theta)$ of equivalent $\dfrac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \cos(\theta)$

met θ de hoek $\angle(u, v)$ tussen de vectoren $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$.



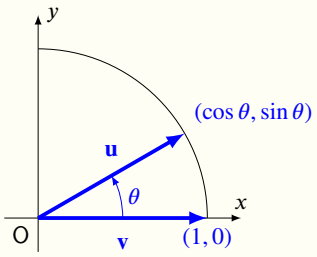
Het scalair product is een *getal* en geen vector, en kan dus niet onmiddellijk op een tekening worden weergegeven.

Opmerking 3.

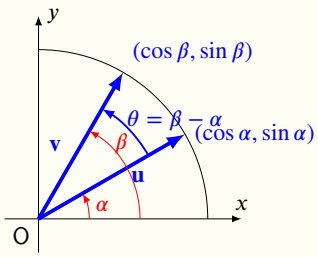
- We bewijzen deze eigenschap hier niet, maar geven verder wel enkele verklaringen. In sommige curusssen wordt bovenstaande formule zelfs gebruikt om de cosinus van een hoek te *definiëren*.
- Wie vertrouwd is met goniometrie herkent enkele eigenschappen van de cosinus:

CC BY-NC-SA 4.0

Inwendig product van vectoren

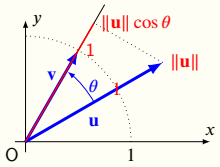


$\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$
$\mathbf{v} = (1, 0)$
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta) \cdot (1, 0)$
$= \cos\theta + 0 = \cos\theta$



$(\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (\cos\beta, \sin\beta)$
$= (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$
$= (\cos(\beta - \alpha)$
$= \cos\theta$

- Als $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ eenheidsvectoren zijn ($\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$) wordt deze formule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \cos(\theta)$.
  Met het scalair product van *eenheids*vectoren kan je dus de *cosinus van hun hoek* berekenen.
- Als $\mathbf{v}$ een eenheidsvector ($\|\mathbf{v}\| = 1$) is, dan wordt deze formule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cos(\theta)$.
  Met het scalair product kan je dus de grootte $\|\mathbf{u}\| \cos(\theta)$ van de projectie van de vector $\mathbf{u}$ op de drager van de eenheidsvector $\mathbf{v}$ berekenen.



- Het inwendig product van twee willekeurige vectoren kan geïnterpreteerd worden als
  - de norm van $\mathbf{u}$ maal de grootte van de projectie van $\mathbf{v}$ op $\mathbf{u}$,
  - de norm van $\mathbf{v}$ maal de grootte van de projectie van $\mathbf{u}$ op $\mathbf{v}$,
  - de norm van $\mathbf{u}$ maal de norm van $\mathbf{v}$ maal de cosinus van hun hoek:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos(\theta) = \|\mathbf{u}\|\Big(\|\mathbf{v}\| \cos(\theta)\Big) = \|\mathbf{v}\|\Big(\|\mathbf{u}\| \cos(\theta)\Big).$$

Omdat de cosinus enkel nul is voor rechte hoeken volgt uit vorige eigenschap onmiddellijk:

Eigenschap 3. Voor twee vectoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

Met het inwendig product kan je dus makkelijk de *loodrechte stand van vectoren* nagaan.

Opmerking 4.

- Wie vertrouwd is met cartesiaanse vergelijkingen ziet dat de homogene vergelijking

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

nu kan geschreven worden als

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

CC BY-NC-SA 4.0

wat je kan interpreteren als voorwaarde opdat de onbekende vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *loodrecht staat* op de gegeven vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0 \text{ of } \mathbf{a} \perp \mathbf{x}.$$

- Meer algemeen geldt volgende interpretatie van homogene stelsels:

  De oplossingenverzameling van een homogene stelsel $\mathbf{Ax} = 0$ bestaat uit
  alle vectoren die loodrecht staan op de rijen van $\mathbf{A}$ (geïnterpreteerd als vectoren).

CC BY-NC-SA 4.0