Limieten in $\pm\infty$

Voorbeeld 1. Bereken $\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)$.

Als we proberen de regel 'limiet van de som is som van de limieten' te gebruiken, krijgen we

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2) &= \lim_{x\to+\infty}3x^2-\lim_{x\to+\infty}4x+\lim_{x\to+\infty}2\\ &= 3\cdot(+\infty)-4\cdot(+\infty)+2\\ &= \infty-\infty, \text{ en dus ONBEPAALD}\end{aligned}$$

Conclusie: we mogen de rekenregel *niet* toepassen. We hebben een fout gemaakt. De eerste gelijkheid geldt niet:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)\neq\lim_{x\to+\infty}3x^2-\lim_{x\to+\infty}4x+\lim_{x\to+\infty}2$$

Er is echter een manier om de onbepaaldheid te omzeilen, en de limiet *toch* te berekenen met behulp van de rekenregels. We kunnen namelijk *de hoogstegraadsterm buiten haakjes te brengen*, en daardoor de limiet van een som omzetten in de limiet van een product. Verder gebruiken we dan de rekenregel voor limieten van een product. We beginnen de berekening met:

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2)=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$$

We weten dat

$$\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}(3)-\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=3+0+0=3$$

dus als we de limiet van dit product van functies schrijven als het product van de limieten krijgen we geen onbepaalde vorm:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(3x^2-4x+2) &= \lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\\ &= (+\infty)\cdot 3=+\infty, \text{ en dus GEEN onbepaaldheid}\end{aligned}$$

Oefening 1. Bereken $\lim_{x\to+\infty}\left(2x^3-5x^2\right)$. Schrijf al je tussenstappen op!

Als de rekenregels voor limieten een onbepaaldheid opleveren, probeer je de onbepaaldheid te *omzeilen*. Een mogelijke oplossing bij de limiet in $c=\pm\infty$ van een som is om de term die het snelst naar oneindig gaat buiten haakjes te brengen en zo een som om te zetten in een product. Bij de limiet van een veelterm is dit de hoogstegraadsterm. We zetten enkel de macht van x buiten haakjes, de coëfficiënt laten we binnen haakjes staan. Dit idee beperkt zich echter niet tot veeltermen. We geven nog enkele voorbeelden:

Voorbeeld 2. Bereken $\lim_{x\to+\infty}\left(2e^{3x}-5e^{2x}\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2e^{3x}-5e^{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{3x}\left(2-\frac{5}{e^x}\right)=(+\infty)\cdot 2=+\infty$$

Voorbeeld 3. Bereken $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-6x+1}{2x^2+11x-8}$.

CC BY-NC-SA 4.0

Dit is de limiet van een quotiënt, maar het quotiënt van de limieten geeft $\frac{+\infty}{+\infty}$, en dus kunnen we de gewone rekenregel niet toepassen. We zetten nu zowel in teller als in noemer de hoogstegraadsterm buiten haken:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-6x+1}{2x^2+11x-8}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{11}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{11}{x}-\frac{8}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

Oefening 2. Bereken $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-1}{x-1}$. Schrijf al je tussenstappen op!

Opmerking 1.

- Door het toepassen van de rekenregels zie je dat de limiet voor $x\to\pm\infty$ gelijk is aan de limiet van de hoogstegraadsterm voor een veeltermfunctie, en gelijk is aan de limiet van het quotiënt van de hoogstegraadstermen in teller en noemer voor een rationale functie. In de oefeningen wordt echter verwacht dat je niet gewoon het eindresultaat opschrijft, maar dat je telkens met de rekenregels uitwerkt hoe je hier aan komt.
- Het heeft geen zin om de termen die het snelst naar oneindig gaan buiten haken te brengen bij een limiet in een nulpunt van de noemer zoals bijvoorbeeld:

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x^2+x-1}{x-1}$$

Ook bij irrationale functies zetten we de term die het snelst naar oneindig gaat buiten haken:

Voorbeeld 4. Bereken $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+3x\right)$.

Dit is de limiet van een som, maar de som van de limieten geeft $\infty-\infty$, en dus kunnen we deze rekenregel niet toepassen. We zetten stap voor stap de hoogste macht van x buiten haken:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+3x\right)&=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{7}{x}\right)}+3x\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3x\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3x\right)\\
&=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3\right)\\
&=\left(\lim_{x\to-\infty}x\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+3\right)\right)\\
&=(-\infty)\cdot\left(-\sqrt{4}+3\right)\\
&=-\infty
\end{aligned}$$

Merk op: we hebben $|x|$ vervangen door $-x$ omdat we de limiet in $-\infty$ moeten berekenen, en voor negatieve x is inderdaad $|x|=-x$.

CC BY-NC-SA 4.0

Opmerking 2.

Let op bij het berekenen van limieten met vierkantswortels:

$\sqrt{x^2} = |x|$ dus

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to+\infty} |x| = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2} = \lim_{x\to-\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} -x = -(-\infty) = +\infty$

Deze techniek werkt echter niet altijd. We nemen een voorbeeld dat erg lijkt op het vorige voorbeeld, maar toch op een heel andere manier uitgerekend moet worden:

Voorbeeld 5. Bereken $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right) &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2\left(4+\frac{7}{x}\right)}+2x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right) \\
&= \left(\lim_{x\to-\infty} x\right)\cdot\left(\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)\right) \\
&= (-\infty)\cdot\left(-\sqrt{4}+2\right) \\
&= (-\infty)\cdot 0
\end{aligned}$$

Met deze berekeningen krijgen we een onbepaaldheid, dus moeten we een andere techniek gebruiken om deze limiet te kunnen uitrekenen. We vermenigvuldigen teller en noemer met de toegevoegde tweeterm. De toegevoegde tweeterm nemen wil zeggen dat we het plusteken tussen de twee termen

CC BY-NC-SA 4.0

vervangen door een minteken, of omgekeerd.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+7x}+2x)(\sqrt{4x^2+7x}-2x)}{\sqrt{4x^2+7x}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+7x-4x^2}{\sqrt{4x^2+7x}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{7x}{|x|\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{7x}{-x\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{7}{-\sqrt{4+\frac{7}{x}}-2}\\
&= \frac{7}{-\sqrt{4}-2} = -\frac{7}{4}
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.58)