Limieten in nulpunten van de noemer

1. Limieten van de vorm $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$

We hebben in het inleidend voorbeeld gezien dat $\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\frac{1}{x}=+\infty$, $\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\frac{1}{x}=-\infty$ en dat $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ niet bestaat.

Analoog kunnen we volgende situaties tegenkomen bij het berekenen van $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$, $c\in\mathbb{R}$:

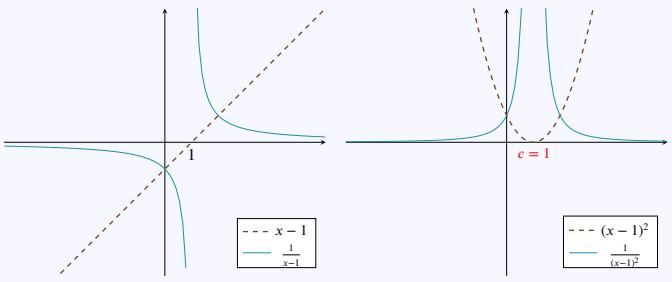
- Als $f(x)>0$ in een omgeving van c dan is $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.
- Als $f(x)<0$ in een omgeving van c dan is $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.
- Als $f(x)>0$ voor $x>c$ en $f(x)<0$ voor $x<c$ dan is $\lim_{\substack{x\to c\\>}}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ en $\lim_{\substack{x\to c\\<}}\frac{1}{f(x)}=-\infty$
- Als $f(x)<0$ voor $x>c$ en $f(x)>0$ voor $x<c$ dan is $\lim_{\substack{x\to c\\>}}\frac{1}{f(x)}=-\infty$ en $\lim_{\substack{x\to c\\<}}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

Om deze limieten te berekenen moet je dus het tekenverloop van de noemer $f(x)$ zoeken in de buurt van c. Je hoeft hiervoor niet het gehele tekenverloop van $f(x)$ op te stellen, in de buurt van c volstaat.

Voorbeeld 1.

1. $\lim_{\substack{x\to 1\\>}}\frac{1}{x-1}=+\infty$ want de noemer $x-1$ is positief voor $x>1$.
2. $\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\frac{1}{x-1}=-\infty$ want de noemer $x-1$ is negatief voor $x<1$.
3. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$ bestaat niet, want de noemer $x-1$ verandert van teken rond $x=1$.
4. $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$, want de noemer $(x-1)^2$ is positief voor $x\neq 1$.

Ter illustratie geven we bij deze eenvoudige voorbeelden ook de grafieken van $\frac{1}{f(x)}$ en van $f(x)$. In het algemeen echter hebben functies met nulpunten in de noemer geen eenvoudige grafieken en gebruik je niet de grafiek om de limiet af te lezen maar bereken je juist de limieten in deze nulpunten van de noemer om meer te weten te komen over de grafiek van de functie.



Opmerking 1.

Merk op dat $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ met $f(c)=0$ steeds $+\infty$ of $-\infty$ is als de limiet bestaat.

CC BY-NC-SA 4.0

Als de linker- en rechterlimiet verschillen, dan bestaat $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ niet.

2. Limieten van de vorm $\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}$ met $f(c)=0$

(a) c is geen nulpunt van de teller

In dit geval is c dus een nulpunt van de noemer maar geen nulpunt van de teller.

Dan kunnen we de limiet als volgt herschrijven:

$$\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to c}g(x)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}=g(c)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}.$$

Dit is geen onbepaalde vorm vermits $g(c)\neq 0$. Om de limiet verder uit te rekenen moeten we het teken van $g(c)$ kennen en de limiet $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)}$ berekenen. Het tekenverloop van de *teller* moet je niet zoeken, enkel het *teken* van $g(c)$ heeft belang.

Voorbeeld 2.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{x^2+x-1}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}(x^2+x-1)\cdot\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\frac{1}{x-1}=(1^2+1-1)\cdot(+\infty)=(1)\cdot(+\infty)=+\infty$$

(b) c is een nulpunt van teller en noemer

Dit geval leidt tot de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$.

Bij **rationale functies** kunnen we in dit geval teller en noemer ontbinden in factoren en de factor $x-c$ wegdelen in teller en noemer.

Voorbeeld 3.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

Bij sommige **irrationale functies** kunnen we teller en noemer vermenigvuldigen met de toegevoegde uitdrukking van teller of noemer.

Voorbeeld 4.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Opmerking 2. Men kan limieten die de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$ geven ook berekenen met de regel van de l'Hôpital.

Samengevat wordt dit:

CC BY-NC-SA 4.0

Limieten in nulpunten van de noemer

Eigenschap 1. De limiet in een nulpunt van de noemer bereken je als volgt:

1.	$\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)}$	met $f(c) = 0$:	**tekenverloop** van $f(x)$ in de buurt van c
1.a	als	$f(x) > 0$ rond c	limiet is $+\infty$
1.b		$f(x) < 0$ rond c	limiet is $-\infty$
1.c		$f(x)$ verandert van teken in c	linker- en rechterlimiet zijn verschillend
2.	$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)}$	met $f(c) = 0$:	
2.a	als	$g(c) \neq 0$:	**reduceer tot geval 1** want $\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to c} g(x) \cdot \lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = g(c) \cdot \lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)}$.
2.b	als	$g(c) = 0$:	onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ wegwerken via
		met f en g veeltermen	**gemeenschappelijke factor** $x - c$ wegdelen
		met f *of* g som van wortels	vermenigvuldigen met **toegevoegde tweeterm**
		met f en g afleidbaar	**l'Hôpital** toepassen

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.59)