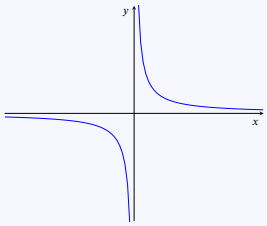
Limieten grafisch

We geven enkele voorbeelden en een intuïtieve definitie van limieten van *functies*. Daarmee bepalen we limieten van enkele eenvoudige functies. Daarna leren we om met wiskundig exacte rekenregels vanaf die basislimieten ingewikkeldere limieten te berekenen.

Limieten worden in de wiskunde gebruikt bij integralen en afgeleiden, maar ook bij asymptoten en het bestuderen van het verloop van functies.

Voorbeeld 1 (Belangrijk voorbeeld)**.**

Beschouw opnieuw de grafiek van de functie $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$:



We onderzoeken waar de functiewaarde $f(x)$ naar toe gaat als x naar een bepaalde waarde c gaat in het domein of op de rand van het domein. Voor bijvoorbeeld $c = 2$ is dat een eenvoudige vraag: als x naar 2 gaat, dan gaat $f(x)$ naar $\frac{1}{2}$. We kunnen immers $x = 2$ gewoon invullen in het functievoorschrift. We schrijven ook 'als $x \to 2$, dan $\frac{1}{x} \to \frac{1}{2}$', of nog korter

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

Een interessantere vraag is waar de functiewaarde naartoe gaat wanneer x naar $+\infty$ of $-\infty$ gaat, of wanneer we x naar $c = 0$ laten gaan, omdat we in deze gevallen $x = c$ niet meer kunnen invullen in het functievoorschrift: $+\infty$, $-\infty$ en 0 zijn de punten 'op de rand' van het domein.

Wanneer we x heel groot laten worden, wordt natuurlijk $\frac{1}{x}$ heel klein. Wanneer x *oneindig groot* is, $x = +\infty$, kunnen we x niet meer invullen in het functievoorschrift. We kunnen wel redelijkerwijs zeggen dat 'als x steeds groter wordt, $\frac{1}{x}$ steeds kleiner wordt en steeds dichter bij nul zal liggen'. We schrijven ook 'als $x \to +\infty$, dan $\frac{1}{x} \to 0$', of nog korter:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Wanneer we x naar $-\infty$ laten gaan, zal $\frac{1}{x}$ ook steeds dichter bij nul liggen:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Ook $x = 0$ kunnen we niet invullen in het functievoorschrift, want delen door nul kan niet. Voor x heel klein (in de betekenis van heel dicht bij 0), lijkt het nochtans ook eenvoudig: als x naar 0 gaat, dat wordt $\frac{1}{x}$ immers oneindig groot. Maar, er is een complicatie: als x negatief is en dicht bij 0 ligt, dan wordt x niet heel groot, maar net heel klein (in de betekenis van heel erg negatief). Dus voor x dicht bij 0, kan $1/x$ ofwel heel groot zijn (als $x > 0$), ofwel net heel erg negatief (als $x < 0$). Dus het hangt er van af 'langs welke kant' we x naar 0 laten gaan, of we in $+\infty$ dan wel in $-\infty$ uitkomen.

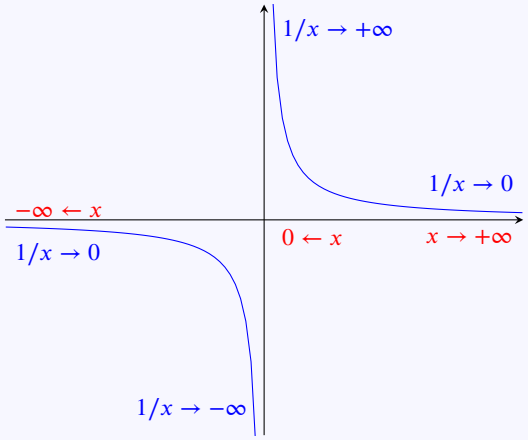
CC BY-NC-SA 4.0

Limieten grafisch

We spreken in dit geval niet van een limiet: $\lim_{x\to 0} f(x)$ bestaat niet. We hebben wel een *linkerlimiet* als we 0 langs links benaderen (met $x < 0$) en een *rechterlimiet* voor naderen langs rechts (met $x > 0$). We noteren dit als:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty \quad \text{en} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$$

De situatie wordt verduidelijkt op volgende tekening:



Zoals in vorig voorbeeld $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ kan je ook volgende limieten eenvoudig berekenen:

Oefening 1. Bereken volgende limieten.

1. $\lim_{x\to 0} e^x = \ldots\ldots$
2. $\lim_{x\to 1}(3x^2 - 4x + 2) = \ldots\ldots$

Als f een continue functie is, $c \in \mathbb{R}$ (dus niet $+\infty$ of $-\infty$) en c geen nulpunt van de noemer is, dan geldt:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

We bestuderen verder dan ook enkel limieten

- in $c = +\infty$ of $c = -\infty$
- in nulpunten van de noemer

We beperken ons tot volgende notatie en (pseudo-)definitie in verband met het begrip limiet:

Definitie 1 (Intuïtieve pseudo-definitie van limiet)**.** Zij f een reële functie, en a en c telkens ofwel een reëel getal, ofwel één van de symbolen $+\infty$ of $-\infty$. Dan zeggen en schrijven we dat

CC BY-NC-SA 4.0

Limieten grafisch

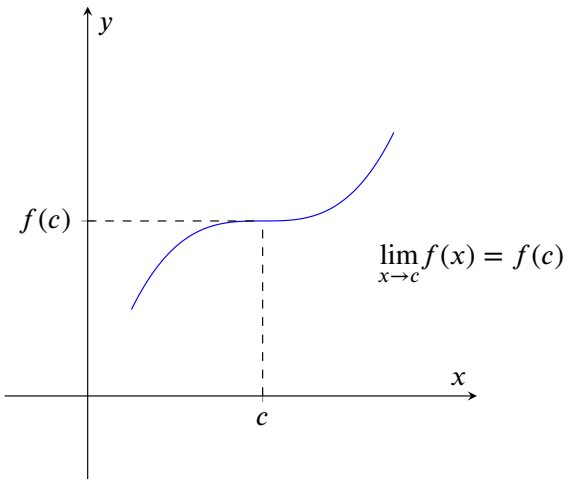
$$\lim_{x\to c} f(x) = a \iff \text{de limiet van } f \text{ als } x \text{ naar } c \text{ gaat is gelijk aan } a$$
$$\iff \text{als } x \to c, \text{ dan } f(x) \to a$$

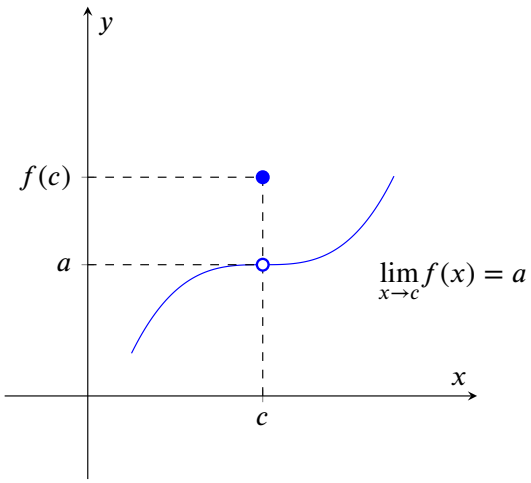
$$\lim_{\substack{x\to c\\<}} f(x) = a \iff \text{de linkerlimiet van } f \text{ als } x \text{ naar } c \text{ gaat is gelijk aan } a$$
$$\iff \text{de limiet van } f \text{ als } x \text{ langs links naar } c \text{ gaat is gelijk aan } a$$
$$\iff \text{als } x \to c \textbf{ langs links } (\text{dus } x < c), \text{ dan } f(x) \to a$$

$$\lim_{\substack{x\to c\\>}} f(x) = a \iff \text{de rechterlimiet van } f \text{ als } x \text{ naar } c \text{ gaat is gelijk aan } a$$
$$\iff \text{de limiet van } f \text{ als } x \text{ langs rechts naar } c \text{ gaat is gelijk aan } a$$
$$\iff \text{als } x \to c \textbf{ langs rechts } (\text{dus } x > c), \text{ dan } f(x) \to a$$

We illustreren enkele mogelijkheden aan de hand van onderstaande grafieken.

- In de linkse figuur zien we dat de limiet van f als x naar c gaat gelijk is aan de functiewaarde $f(c)$. In de rechtse figuur is dit echter niet het geval: de grafiek van f maakt een sprong in $x = c$. Als x de waarde c nadert, dan nadert $f(x)$ de waarde a, ook al is a verschillend van de functiewaarde $f(c)$.

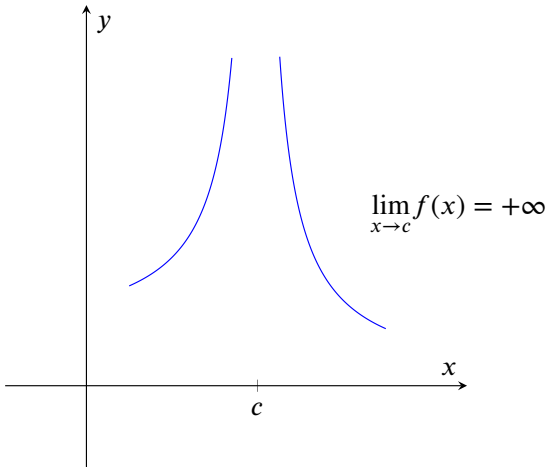


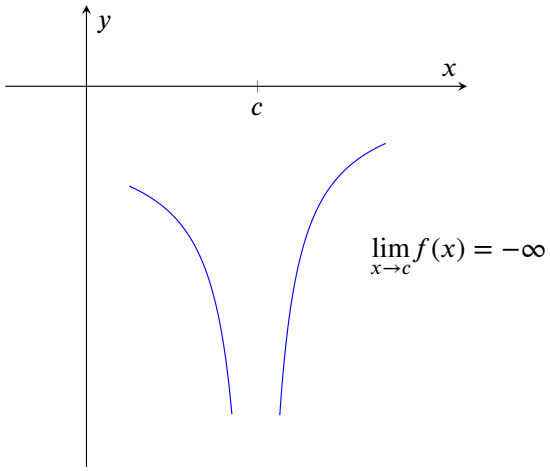


- De limiet van f als x naar c gaat is niet altijd een reëel getal, zoals de volgende figuren illustreren. In de linkse figuur wordt $f(x)$ steeds groter naarmate x de waarde c nadert. De limiet van f als x naar c gaat is dus gelijk aan $+\infty$. In de rechtse figuur wordt $f(x)$ juist steeds kleiner naarmate x de waarde c nadert. In dit geval is de limiet van f als x naar c gaat gelijk aan $-\infty$.

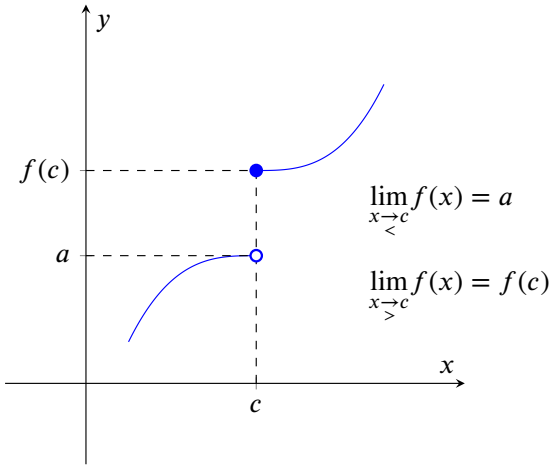
CC BY-NC-SA 4.0

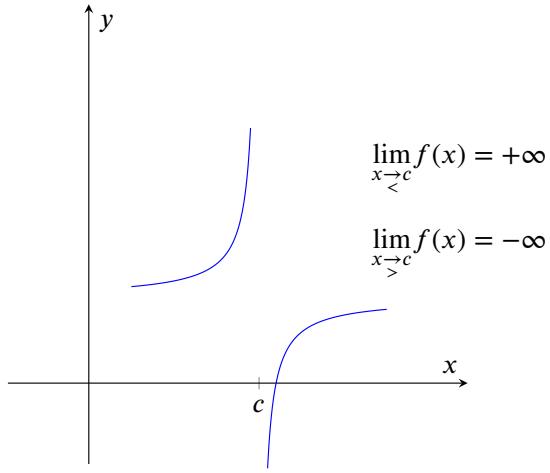
Limieten grafisch





- In sommige gevallen hangt de limiet van f als x naar c gaat af van de richting waarin x naar c gaat. De linker- en rechterlimiet zijn dan verschillend, zoals in de volgende figuren. In de linkse figuur zijn beide limieten reële getallen, maar ze zijn verschillend van elkaar. In de rechtse figuur zijn de linker- en rechterlimiet ook verschillend: de ene is gelijk aan $+\infty$, terwijl de andere gelijk is aan $-\infty$.

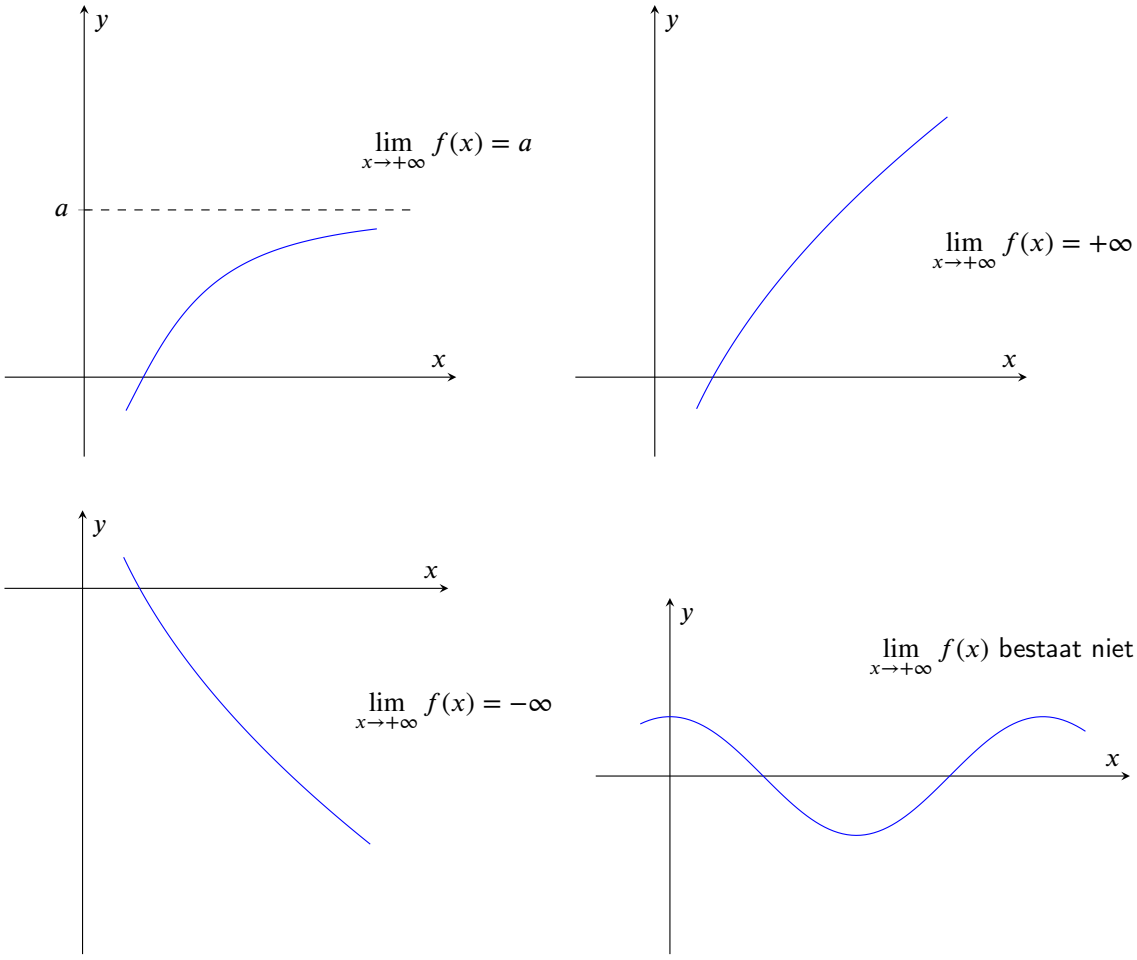




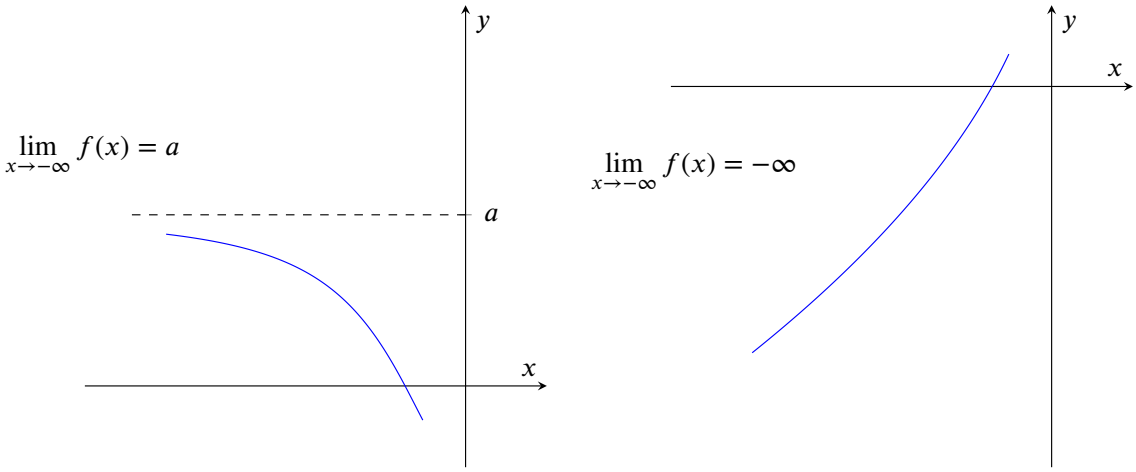
- We kunnen ook de limiet van f bepalen als x naar $+\infty$ gaat. In de figuur linksboven nadert $f(x)$ de waarde a als x steeds groter wordt. De limiet van f als x naar $+\infty$ gaat is dus gelijk aan het reële getal a. In de figuur rechtsboven blijft de grafiek stijgen als x naar $+\infty$ gaat. De limiet is in dit geval gelijk aan $+\infty$. In de figuur linksonder blijft de grafiek juist dalen als x naar $+\infty$ gaat. De limiet is in dit geval gelijk aan $-\infty$. De grafiek in de figuur rechtsonder nadert geen bepaalde waarde als x naar $+\infty$ gaat en de grafiek blijft niet stijgen of dalen, we zeggen dat de limiet van f als x naar $+\infty$ gaat niet bestaat.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.59)

Limieten grafisch



- Analoog kunnen we de limiet van f bepalen als x naar $-\infty$ gaat. In de linkse figuur nadert $f(x)$ de waarde a als x steeds kleiner wordt. De limiet van f als x naar $-\infty$ gaat is dus gelijk aan het reële getal a. In de rechtse figuur blijft de grafiek dalen als x naar $-\infty$ gaat. De limiet is in dit geval gelijk aan $-\infty$. Net als in het vorige geval (limiet in $+\infty$) kan het ook voorkomen dat de limiet van f als x naar $-\infty$ gaat gelijk is aan $+\infty$ of niet bestaat.



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.59)

Limieten grafisch

Opmerking 1.

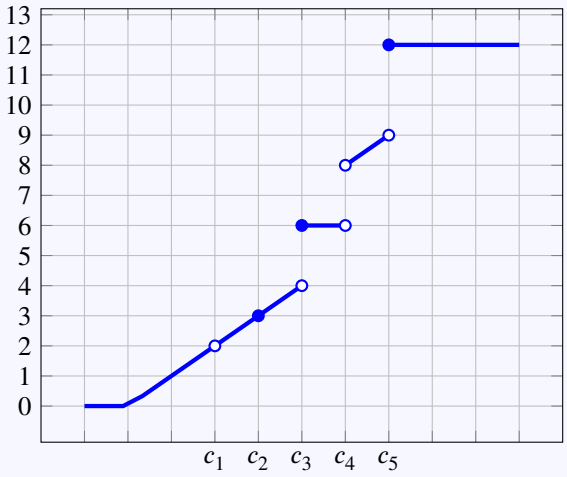
- Als we de uitdrukking $\lim_{x\to c} f(x) = a$ samen met de grafiek van f bekijken, dan bevindt c zich op de x-as (het domein van f), en bevindt a (en dus de limiet zelf) zich op de y-as (het codomein van f).
- Uit deze definitie volgt dat de limiet bestaat als en slechts als zowel de linker- als de rechterlimiet bestaan en beide aan elkaar gelijk zijn. Dus:

$$\lim_{x\to c} f(x) = a \iff \lim_{\substack{x\to c\\<}} f(x) = a \text{ en } \lim_{\substack{x\to c\\>}} f(x) = a$$

- De pseudo-definitie is bewust enigszins vaag over welke waarden c precies mag aannemen. We beperken ons tot punten of randpunten van het domein van f. Dus, we kunnen spreken van de limiet van $f(x) = \sqrt{x}$ in de punten 1 en π en 81 (punten van het domein), of van de limiet in $+\infty$ of de rechterlimiet in 0 (punten 'op de rand van het domein'), maar de limiet in de punten -1 en -314 heeft *geen* betekenis. Zo zijn bijvoorbeeld ook de limieten $\lim_{x\to-\infty} \ln x$ en $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x}$ duidelijk niet te bepalen.

Voorbeeld 2 (Linker- en rechterlimiet)**.**

We beschouwen de functie f met onderstaande grafiek:



We hebben volgende limieten in de punten c_i:

c_1	$\lim_{\substack{x\to c_1\\<}} f(x) = 2$	$\lim_{\substack{x\to c_1\\>}} f(x) = 2$	$\lim_{x\to c_1} f(x) = 2$
c_2	$\lim_{\substack{x\to c_2\\<}} f(x) = 3$	$\lim_{\substack{x\to c_2\\>}} f(x) = 3$	$\lim_{x\to c_2} f(x) = 3$
c_3	$\lim_{\substack{x\to c_3\\<}} f(x) = 4$	$\lim_{\substack{x\to c_3\\>}} f(x) = 6$	$\lim_{x\to c_3} f(x)$ bestaat niet
c_4	$\lim_{\substack{x\to c_4\\<}} f(x) = 6$	$\lim_{\substack{x\to c_4\\>}} f(x) = 8$	$\lim_{x\to c_4} f(x)$ bestaat niet
c_5	$\lim_{\substack{x\to c_5\\<}} f(x) = 9$	$\lim_{\substack{x\to c_5\\>}} f(x) = 12$	$\lim_{x\to c_5} f(x)$ bestaat niet

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.59)

Limieten grafisch

Voorbeeld 3 (Linker- en rechterlimiet)**.**

$\lim_{x\to 7}(-2+\sqrt{x-7})$ bestaat niet omdat x alleen langs rechts ($x > 7$) naar 7 kan gaan. De **rechterlimiet** bestaat wel:

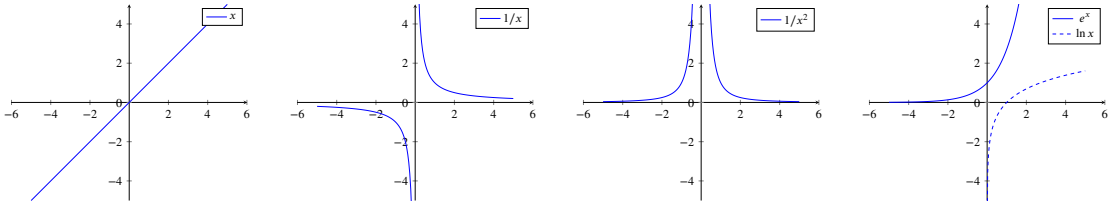
$$\lim_{\substack{x\to 7\\ >}}(-2+\sqrt{x-7}) = -2$$

Limieten kunnen op volgende wijze worden bepaald:

(a) enkele basislimieten lezen we af op een *grafiek*

(b) voor ingewikkeldere functies gebruiken we betrouwbare *rekenregels*

Oefening 2. Bepaal de limieten op basis van de grafieken (indien ze bestaan):



1. $\lim_{x\to+\infty} x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
2. $\lim_{x\to-\infty} x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
4. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
5. $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
6. $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
8. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
9. $\lim_{x\to+\infty} e^x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
10. $\lim_{x\to-\infty} e^x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
11. $\lim_{x\to+\infty} \ln x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing
12. $\lim_{x\to-\infty} \ln x =$	$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

CC BY-NC-SA 4.0

Limieten grafisch

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \ln x =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

15. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

Opmerking 2.

(a) Let op: het *berekenen* van een limiet op basis van een grafiek werkt enkel als de grafiek betrouwbaar is. In deze cursus gebruiken we de methode *enkel* voor bovenstaande basislimieten. In die gevallen kan men ook bewijzen dat de limieten wiskundig exact zijn.

(b) Let op: het *aflezen* van een limiet op een (betrouwbare) grafiek is een belangrijke vaardigheid. *Als* je een betrouwbare grafiek krijgt, moet je snel de relevante limieten kunnen aflezen.

(c) Let op: je kan dikwijls ook een limiet bepalen door enkele waarden te berekenen 'in de buurt', zoals bijvoorbeeld voor $\frac{\sin(0,01)}{0,01} = 0,999983\ldots$ waaruit zou kunnen blijken dat dus allicht $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Maar soms zijn berekeningen erg misleidend of volledig foutief. Zie bijvoorbeeld in de uitweiding onderaan voor $\lim\limits_{x\to 0}\sin(1/x)$.

Oefening 3. Bepaal deze limieten, indien ze bestaan, via een redenering op basis van de grafieken van de functies $e^x, \ln x$ en $\frac{1}{x}$. Je hoeft de grafieken van $e^{1/x}$ en $\ln(1+\frac{1}{x})$ hiervoor niet te kennen.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

3. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{\frac{1}{x}} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} e^{\frac{1}{x}} =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{x}) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+\frac{1}{x}) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln(1+\frac{1}{x}) =$

$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \ln(1+\frac{1}{x}) =$

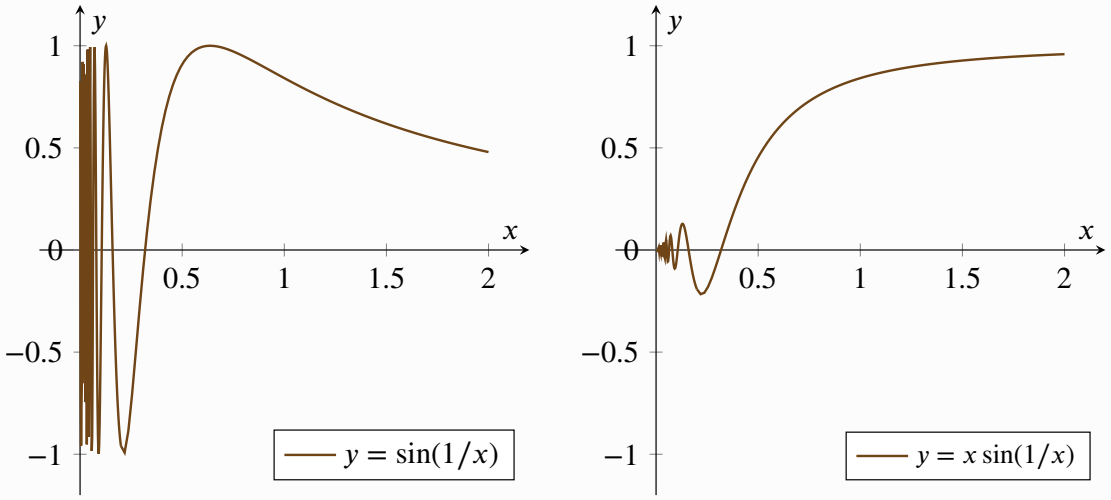
$+\infty$	$-\infty$	0	1	bestaat niet	andere oplossing

CC BY-NC-SA 4.0

Limieten grafisch

Uitweiding 1 (Uitbreiding: limieten van enkele merkwaardige functies)**.**

Beschouw hieronder de grafieken van de functies $\sin\frac{1}{x}$, $x\sin\frac{1}{x}$:

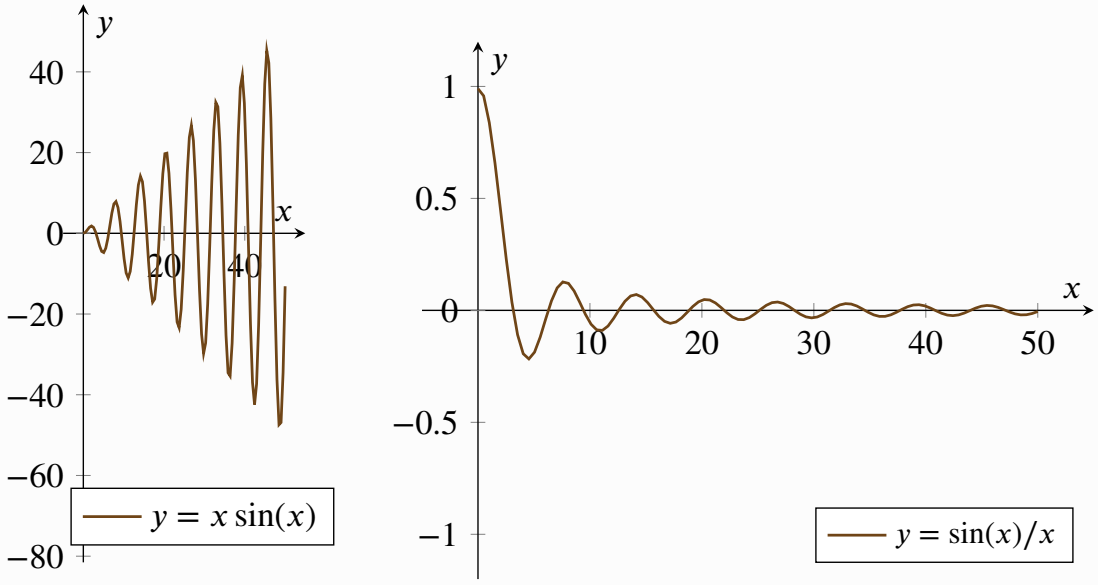


De limiet $\lim_{x\to 0}\sin(1/x)$ *bestaat niet*, omdat de functie erg snel blijft trillen tussen -1 en 1 rond $x=0$, en dus nooit in de buurt blijft van één bepaald getal.

Als we vermenigvuldigen met x, dan wordt $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)=0$, omdat de trilling wordt gedempt rond $x=0$, en de functie zich daar wel concentreert rond $y=0$.

De limieten in $+\infty$ zijn ook duidelijk op de grafiek: $\lim_{x\to+\infty}\sin(1/x)=0$ en $\lim_{x\to+\infty} x\sin(1/x)=1$.

Bekijk zelf de limieten van volgende functies $x\sin x$ en $\frac{\sin x}{x}$:



10. $\lim_{x\to 0}(x\sin x) =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.59)

Limieten grafisch

11. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

12. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x} =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

13. $\lim_{x\to +\infty} (x \sin x) =$ | $+\infty$ | $-\infty$ | 0 | 1 | bestaat niet | andere oplossing |

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.59)