KU LEUVEN

IDL Project Basiswiskunde

Basiskennis Wiskunde

Oefeningen
Zomercursus A

(Versie 2026/11/20.38)

Inhoudsopgave

1 Les Verzamelingen en elementair rekenen 1.1

1.1 Oefeningen verzamelingen 1.1

1.2 Oefeningen rekenvaardigheden 1.4

2 Les Functies deel 1 2.1

2.1 Oefeningen functies deel 1 . . . . . 2.1

3 Les Veeltermen 3.1

3.1 Oefeningen Veeltermen 3.1

4 Les Goniometrie 4.1

4.1 Oefeningen Goniometrie 4.1

5 Les vergelijkingen en ongelijkheden 5.1

5.1 Oefeningen ongelijkheden 5.1

6 Les Rekenen met logaritmen 6.1

6.1 Oefeningen logaritme 6.1

7 Les Exponentiële en logaritmische functies 7.1

7.1 Oefeningen groeimodellen en exponentiële en logaritmische functies 7.1

8 Les Lineaire algebra 8.1

8.1 Oefeningen vectoren en matrices 8.1

8.2 Oefeningen stelsels 8.2

9 Les Sommatieteken, faculteit en binomiaalgetallen 9.1

9.1 Oefeningen som, faculteit en binomiaalgetal 9.1

10 Les Limieten 10.1

10.1 Oefeningen limieten 10.1

11 Les Goniometrische en periodieke functies 11.1
11.1 Oefeningen Goniometrische functies 11.1
11.2 Oefeningen Even, oneven en periodieke functies 11.3

12 Les Functies deel 2 12.1
12.1 Oefeningen functies deel 2 . . . . . 12.1

13 Les Afgeleiden 13.1
13.1 Oefeningen Afgeleiden 13.1

14 Les Integralen 14.1
14.1 Oefeningen Integralen 14.1

15 Les Poolcoördinaten en Vectoren in de Fysica 15.1
15.1 Oefeningen poolcoördinaten 15.1
15.2 Oefeningen Vectoren in de Fysica 15.3

16 Les Complexe getallen 16.1
16.1 Oefeningen Complexe getallen 16.1

1.1 Oefeningen verzamelingen

1.1.1 Niveau 1

Oefening 1.1.1. Zijn volgende uitspraken waar?

1. Juist ✓ $\{1,2,3\} \overset{?}{\subseteq} \mathbb{N}$
2. Juist ✓ $\{1\} \overset{?}{\subseteq} \mathbb{N}$
3. Fout ✓ $1 \overset{?}{\subseteq} \mathbb{N}$
4. Juist ✓ $\{5,7\} \overset{?}{\subseteq} \{n \in \mathbb{N} | n \text{ priemgetal}\}$

Oefening 1.1.2. Bepaal volgende verzamelingen.

1. $\{1,2,3,4\} \cap \{2,3,4\} =$ $\{2,3,4\}$✓
2. $\{1,2,3,4\} \cup \{2,3,4\} =$ $\{1,2,3,4\}$✓
3. $\{1,2,3,4\} \setminus \{2,3,4\} =$ $\{1\}$✓
4. $\{2,3,4\} \setminus \{1,2,3,4\} =$ $\emptyset$✓

1.1.2 Niveau 2

Oefening 1.1.3. Zijn volgende uitspraken waar of onwaar? Verbeter de foute uitspraken.

1. Juist ✓ $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}_0$
2. Juist ✓ $\{1,2,3\} \setminus \{2\} = \{1,3\}$
3. Fout ✓ $\{1,\{1\}\} \setminus \{1\} = \{1\}$
4. Fout ✓ $\mathbb{R} \setminus]\,2,5\,] =]-\infty, 2\,[\cup [\,5, +\infty[$
5. Juist ✓ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ is de verzameling van de irrationale getallen.

Oefening 1.1.4. Supportersclub 'de Sortie' gaat regelmatig kijken naar de thuiswedstrijden van OHL. Er is echter onzekerheid over het aantal leden. Uit de archieven blijkt het volgende:

- de vorige drie wedstrijden waren tegen AA Gent, KV Kortrijk en KV Mechelen.
- er gingen 14 supporters kijken naar de wedstrijd tegen AA Gent, 11 naar de wedstrijd tegen KV Kortrijk en 8 naar de wedstrijd tegen KV Mechelen.
- van die supporters gingen er sommige naar minstens 2 matchen: 5 naar zowel AA Gent als KV Kortrijk, 3 gingen naar de wedstrijd tegen KV Kortrijk en KV Mechelen, en 3 gingen naar AA Gent en KV Mechelen kijken.
- er waren 2 supporters die de drie wedstrijden bijwoonden.

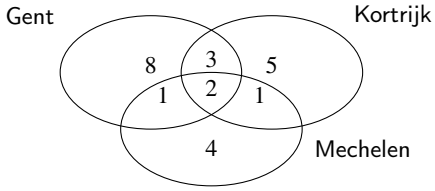
Als we er van uitgaan dat alle leden van 'de Sortie' minstens 1 keer gingen supporteren, hoeveel leden telt 'de Sortie' dan?

24

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Oefeningen verzamelingen

Uitwerking: Je start bij het invullen best met de 2 supporters die de drie wedstrijden hebben bijgewoond. Daarna vul je in de doorsnedes de overblijvende supporters in die precies twee wedstrijden volgden.



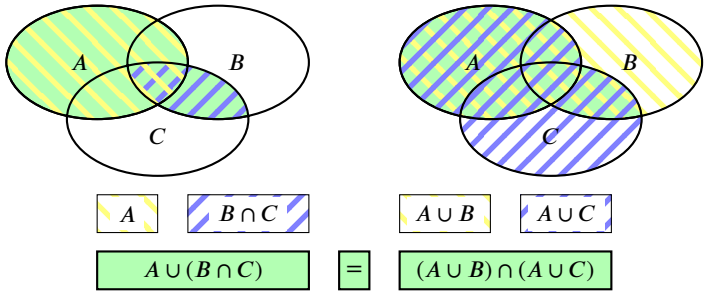
Oefening 1.1.5. In een klas beoefent elke leerling(e) minstens een van de volgende drie sporten: zwemmen, atletiek en tennis. De atleten en zij die tennissen zijn samen met 15. 14 leerlingen tennissen niet. 5 leerlingen doen zowel aan zwemmen als aan atletiek, 4 zowel aan tennis als aan zwemmen. Onder de 3 leerlingen die zowel tennissen als atletiek doen, zijn er 2 die bovendien zwemmen. De atleten zijn samen met 11.

Hoeveel leerlingen doen alleen aan zwemmen?

6

Oefening 1.1.6. Toon de gelijkheid $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ aan op een Venndiagram.

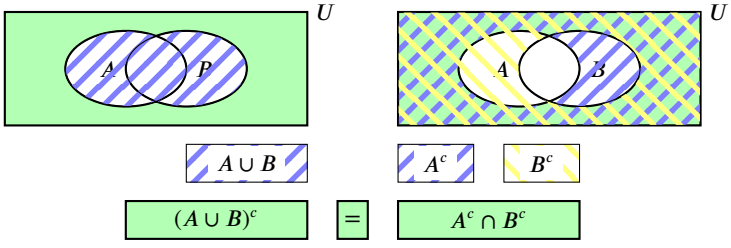
Uitwerking:



Oefening 1.1.7. Illustreer met een Venndiagram volgende uitspraken. A, B zijn willekeurige verzamelingen.

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Uitwerking:

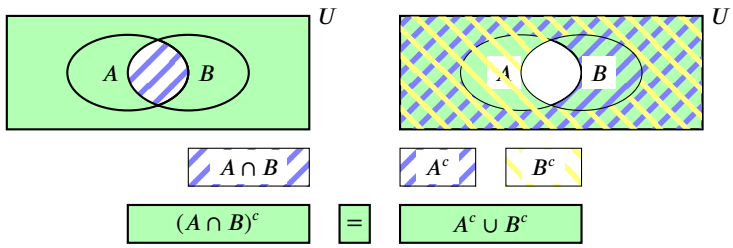


2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

CC BY-NC-SA 4.0

1.1 Oefeningen verzamelingen

Uitwerking:



CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Oefeningen rekenvaardigheden

1.2.1 Niveau 1

Oefening 1.2.1. Vereenvoudig.

1. $p-(p+q)+2q = q$

Uitwerking: $p-(p+q)+2q = p-p-q+2q = q$

2. $1-(x-y+1)+x = y$

3. $-\dfrac{2x+4xy}{-2x} = 1+2y$

Uitwerking: $-\dfrac{2x+4xy}{-2x} = \dfrac{2x(1+2y)}{2x} = 1+2y$

Oefening 1.2.2. Werk de haakjes uit. $(a \in \mathbb{R})$

1. $2(a+3)^2 = 2a^2+12a+18$

2. $2(a-3)^2 = 2a^2-12a+18$

3. $2(-a-3)^2 = 2a^2+12a+18$

Oefening 1.2.3. Ontbind in factoren. $(x, y, a \in \mathbb{R})$

1. $x(x+2)+7(x+2) = (x+7)(x+2)$

2. $3y(4y-3)-4x(4y-3) = (3y-4x)(4y-3)$

3. $(a+1)(x+1)-(2a-4)(x+1) = (-a+5)(x+1)$

4. $5(x+1)-(x+1)^2 = (4-x)(x+1)$

Oefening 1.2.4. Schrijf zo eenvoudig mogelijk.

1. $20\cdot(\frac{5}{4}-\frac{4}{5}) = 9$

2. $-\dfrac{6}{27}+\dfrac{27}{1}+\dfrac{16+14}{9}-\dfrac{3}{14+13}-3\cdot 9 = 3$

3. $-\dfrac{(1-a)-2}{a+1} = 1$ $(a \neq -1)$

Oefening 1.2.5. Bereken

1. $2^2\cdot 2^3 = 2^5$

2. $(2^2)^3 = 2^6$

3. $2^{(2^3)} = 2^8$

4. $\dfrac{2^{1302}}{2^{1299}} = 2^3$

5. $1302^5\cdot 2^5 = 2604^5$

Oefening 1.2.6. Bereken (zonder rekenmachine) volgende absolute waarden.

1.2 Oefeningen rekenvaardigheden

1. $|2-9| = 7$
2. $|-2-(-6)| = 4$
3. $\left|\frac{11}{10} - \frac{51}{10}\right| = 4$
4. $|\pi - 3\pi| = 2\pi$

1.2.2 Niveau 2

Oefening 1.2.7. Ontbind in factoren (of vul aan). Zij $u, s, t \in \mathbb{R}$.

1. $24st + 12t - 60ut = 12t(2s + 1 - 5u)$
2. $\frac{st^2}{8} + \frac{s^2t^2}{12} + s^2t = st(\frac{t}{8} + \frac{st}{12} + s)$
3. $st + s + ut + u = (s+u)(t+1)$
4. $(2t-2)(5t+3) - (t-1)(4t-1) = (t-1)(6t+7)$
5. $\frac{2s+3}{2} + (2s+3)^2 = \frac{2s+3}{2} \cdot (7+4s)$
6. $\left(\frac{5s}{8}\right)(u-1) - 5s(3u+1) = \left(\frac{5s}{8}\right) \cdot (-(23u+9))$

Oefening 1.2.8. Ontbind in factoren. Zij $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$
2. $25x^2y^4 - 64 = (5xy^2 - 8)(5xy^2 + 8)$
3. $x^2 - y^2 + 1 - 2x = (x - 1 + y)(x - 1 - y)$

Oefening 1.2.9. Schrijf als een zo eenvoudig mogelijke breuk. Stel $a, b, c \in \mathbb{R}_0$.

1. $\frac{a-b}{c} - \frac{a-2b}{2c} = \frac{a}{2c}$
2. $\frac{\frac{a-b}{b}}{1-\frac{a}{b}} = -1$
3. $\frac{1-\frac{a+b}{b}}{\frac{a^2}{b}} = -\frac{1}{a}$
4. $a + \frac{a}{1+a} = \frac{2a+a^2}{1+a}$
5. $1 + \frac{a}{1+a} = \frac{1+2a}{1+a}$
6. $1 + \frac{1}{1+a} = \frac{2+a}{1+a}$
7. $a + \frac{1}{1+a} = \frac{1+a+a^2}{1+a}$
8. $\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}} = \frac{1+a}{2+a}$

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Oefeningen rekenvaardigheden

Oefening 1.2.10. Schrijf zo eenvoudig mogelijk. Stel $x, y, a, b \in \mathbb{R}_0^+$.

1. $\dfrac{\sqrt{a}}{a^5} = a^{-9/2}$
2. $\left(x^6 y^8\right)^{-1/2} = x^{-3} y^{-4}$
3. $a^4 b \left(\dfrac{\sqrt{a^2 b^4}}{ab}\right)^3 = (ab)^4$

1.2.3 Herhalingsoefeningen

Oefening 1.2.11. Vul aan. Je mag veronderstellen dat de noemer verschilt van 0.

1. $\dfrac{4x^2}{5} - 3x = 4x \cdot [\dfrac{x}{5} - \dfrac{3}{4}]$
2. $(p+1)^2 + \dfrac{(p+1)^3}{2} + \dfrac{(p+1)^2}{6} = \dfrac{(p+1)^2}{2} \cdot [p + \dfrac{10}{3}]$
3. $\dfrac{(m+n)}{2} \cdot \dfrac{m^2}{(m+n)^2} - \dfrac{m}{2} = \dfrac{-mn}{2(m+n)}$
4. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} = 11 \cdot \sqrt{2}$

Uitwerking:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} &= \sqrt{2} + \sqrt{2 \cdot 4} + \sqrt{2 \cdot 9} + \sqrt{2 \cdot 25} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{9} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{25} \\ &= \sqrt{2}(1 + 2 + 3 + 5) = \sqrt{2} \cdot 11 \end{aligned}$$

5. $\dfrac{4}{q} - \dfrac{8+q}{2q^2} = \dfrac{7q-8}{2q^2}$
6. $\dfrac{-8}{2x} + \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = \dfrac{14x-8}{2x(x-1)^2}$
7. $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y^2}\right)^{-1} = \dfrac{xy^2}{x+y^2}$

Uitwerking: $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y^2}\right)^{-1} = \left(\dfrac{y^2+x}{xy^2}\right)^{-1} = \dfrac{xy^2}{y^2+x}$

8. $(a+b)^3 - \left(a^3 + b^3\right) = (a+b) \cdot 3ab$
9. $\dfrac{a+b}{a^2+b^2} - \dfrac{a-b}{a^2-b^2} = \dfrac{-2ab^2 + 2a^2 b}{a^4 - b^4}$
10. $(t-1) \cdot (1 + t + t^2) = t^3 - 1$
11. $\dfrac{\frac{1}{2p} - \frac{1}{2}}{2p-2} = -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{p}$
12. $x + 1 + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x^2}{x-1}$

CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Oefeningen rekenvaardigheden

13. $xy^2z^3 + \dfrac{x^2yz}{2} + \dfrac{xyz^2w}{3} = xyz \cdot \left[yz^2 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{zw}{3}\right]$

14. $\dfrac{1}{b+c} - \dfrac{1}{c} = \dfrac{-b}{c(b+c)}$

15. $\dfrac{x^2z}{2} + zyx + \dfrac{zy^2}{2} = \dfrac{x+y}{2} \cdot [z(x+y)]$

Uitwerking: $\dfrac{x^2z}{2} + zyx + \dfrac{zy^2}{2} = \dfrac{x^2z + 2zyx + zy^2}{2} = \dfrac{z(x^2+2yx+y^2)}{2} = \dfrac{z(x+y)^2}{2} = \dfrac{x+y}{2} \cdot z(x+y)$

16. $\left(\dfrac{-4}{a}\right)^2 + \dfrac{3}{2a} = \dfrac{3}{a^2} \cdot \left[\dfrac{16}{3} + \dfrac{a}{2}\right]$

17. $a^x \cdot a^{-\frac{2x}{3}} = a^{\frac{1}{3}x}$

18. $(k+l+m)^2 = ((k+l)+m)^2 = k^2 + 2kl + l^2 + m^2 + 2lm + 2km$

19. $\dfrac{2}{a} \cdot \dfrac{1}{a} \cdot 3a - \dfrac{1}{a+1} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{6a+5}{a(a+1)}$

Uitwerking: $\dfrac{2}{a} \cdot \dfrac{1}{a} \cdot 3a - \dfrac{1}{a+1} \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a}\left(6 - \dfrac{1}{a+1}\right) = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{6a+6-1}{a+1}\right) = \dfrac{6a+5}{a(a+1)}$

20. $\dfrac{-1}{1 - \dfrac{x+1}{x}} = x$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/20.38)

2.1 Oefeningen functies deel 1

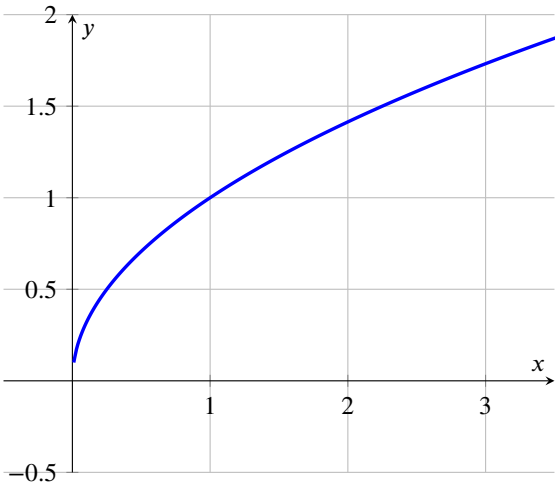
2.1.1 Niveau 1

Oefening 2.1.1. Geef telkens het grootst mogelijke domein voor volgende functies:

1. $f(x) = \sqrt{x}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ $\mathbb{R}^+$

Uitwerking: Het grootst mogelijke domein is $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^+$. De vierkantswortel van een reëel getal is namelijk enkel gedefinieerd voor positieve reële getallen.

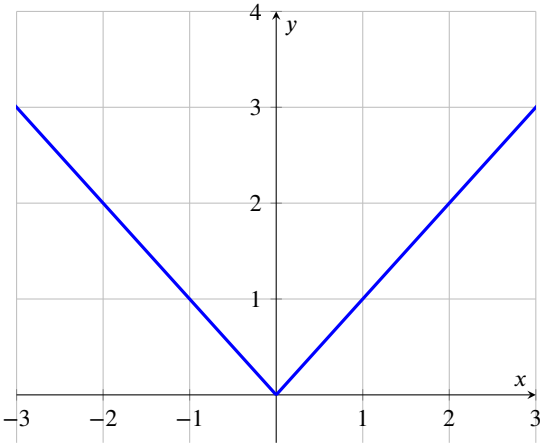
Deze functie heeft volgende grafiek:



2. $f(x) = |x|$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ $\mathbb{R}$

Uitwerking: Het grootst mogelijke domein is $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. De absolute waarde van een reëel getal is namelijk gedefinieerd voor elk reëel getal.

Deze functie heeft volgende grafiek:



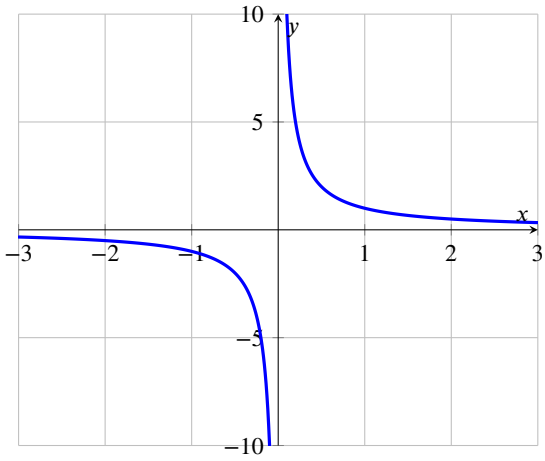
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ $\mathbb{R}_0$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Oefeningen functies deel 1

Uitwerking: Het grootst mogelijke domein is $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}_0$. De functie is *niet* gedefinieerd in het nulpunt van de noemer, namelijk 0. In alle andere punten is de functie wel gedefinieerd.

Deze functie heeft volgende grafiek:



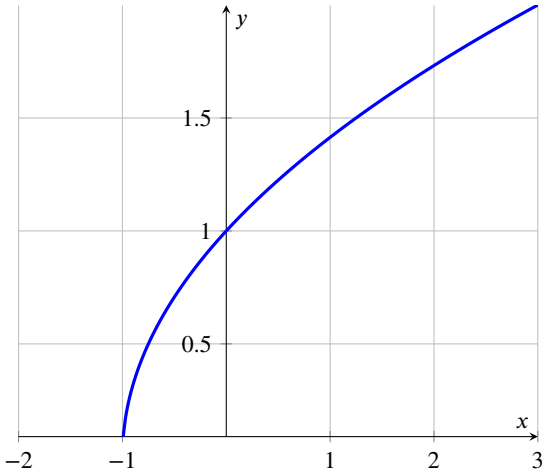
2.1.2 Niveau 2

Oefening 2.1.2. Geef telkens het grootst mogelijke domein voor volgende functies:

1. $f(x) = \sqrt{1+x}$. Antwoord: $\mathrm{dom}\, f =$ $[-1, +\infty[$

Uitwerking: Het grootst mogelijke domein is $\mathrm{dom}\, f = [-1, +\infty[$. De functie is enkel gedefinieerd voor de x-waarden waarvoor de uitdrukking onder de wortel positief is. Dus moet x voldoen aan de ongelijkheid $1 + x \geq 0$, dus $x \geq -1$, wat het interval $[-1, +\infty[$ als oplossing geeft.

Deze functie heeft volgende grafiek:



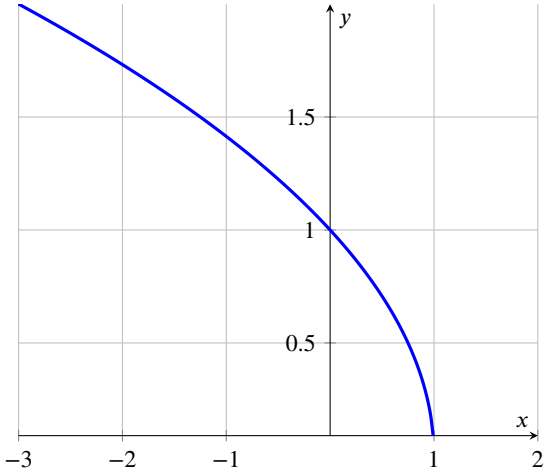
2. $f(x) = \sqrt{1-x}$. Antwoord: $\mathrm{dom}\, f =$ $]-\infty, 1]$

Uitwerking: Het grootst mogelijke domein is $\mathrm{dom}\, f =]-\infty, 1]$. De functie is enkel gedefinieerd voor de x-waarden waarvoor de uitdrukking onder de wortel positief is. Dus moet x voldoen aan de ongelijkheid $1 - x \geq 0$, dus $1 \geq x$, wat het interval $]-\infty, 1]$ als oplossing geeft.

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Oefeningen functies deel 1

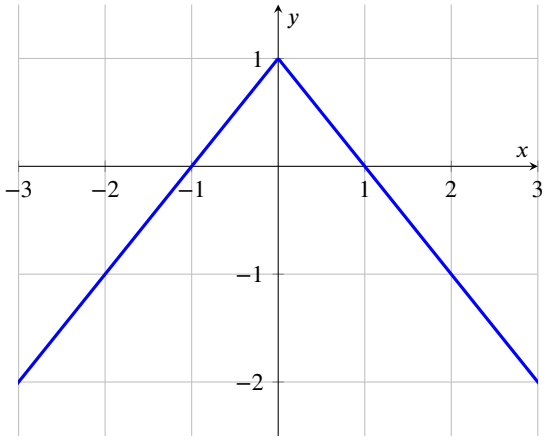
Deze functie heeft volgende grafiek:



3. $f(x) = 1 - |x|$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ $\mathbb{R}$

Uitwerking: Het grootst mogelijke domein is $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$. De absolute waarde van een reëel getal is namelijk gedefinieerd voor elk reëel getal.

Deze functie heeft volgende grafiek:



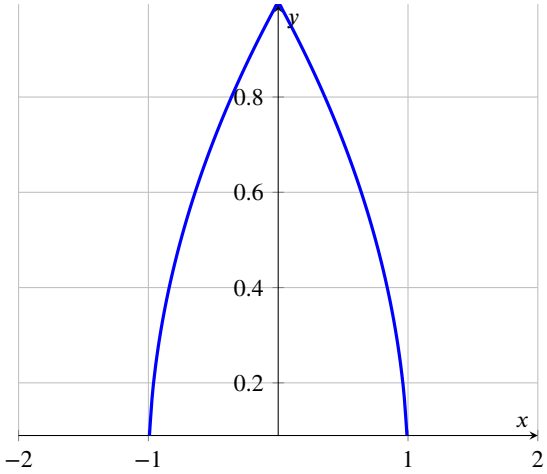
4. $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$. Antwoord: $\operatorname{dom} f =$ $[-1, 1]$

Uitwerking: Het grootst mogelijke domein is $\operatorname{dom} f = [-1, 1]$. De functie is enkel gedefinieerd voor de x-waarden waarvoor de uitdrukking onder de wortel positief is. Dus moet x voldoen aan de ongelijkheid $1 - |x| \geq 0$, of dus $|x| \leq 1$, wat het interval $[-1, 1]$ als oplossing geeft.

Deze functie heeft volgende grafiek:

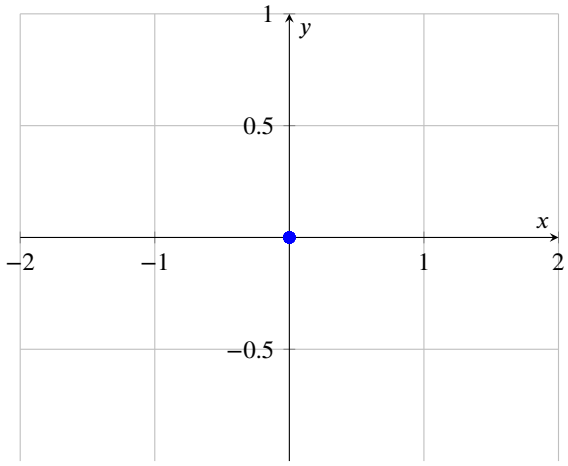
CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Oefeningen functies deel 1



5. $f(x) = \sqrt{-|x|}$. Antwoord: dom $f =$ $\{0\}$

Uitwerking: Het grootst mogelijke domein is $\text{dom}\, f = \{0\}$. Voor $x = 0$ hebben we dat $-|x| = 0$ en dus $f(0) = \sqrt{0} = 0$. Voor $x \neq 0$, is $-|x| < 0$, en de vierkantswortel van een negatief getal is niet gedefinieerd. f beeldt dus enkel nul af op nul.



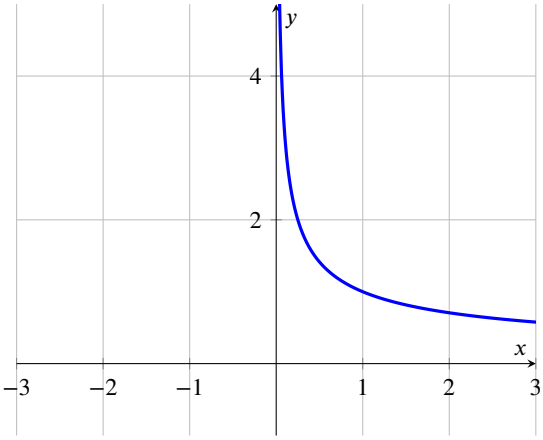
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Antwoord: dom $f =$ $\mathbb{R}_0^+$

Uitwerking: Het grootst mogelijke domein is $\text{dom}\, f = \mathbb{R}_0^+$. De vierkantswortel is enkel gedefinieerd voor $x \in \mathbb{R}^+$. Omdat de vierkantswortel in de noemer staat mag $\sqrt{x}$ niet nul zijn, dus x mag niet nul zijn. $\mathbb{R}^+$ zonder nul is $\mathbb{R}_0^+$.

Deze functie heeft volgende grafiek:

CC BY-NC-SA 4.0

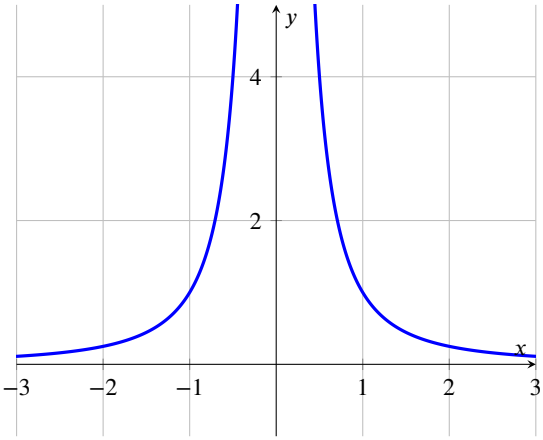
2.1 Oefeningen functies deel 1



7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Antwoord: dom $f =$ $\mathbb{R}_0$

Uitwerking: Het grootst mogelijke domein is dom $f = \mathbb{R}_0$. De functie is *niet* gedefinieerd in het nulpunt van de noemer, namelijk 0. In alle andere punten is de functie wel gedefinieerd.

Deze functie heeft volgende grafiek:



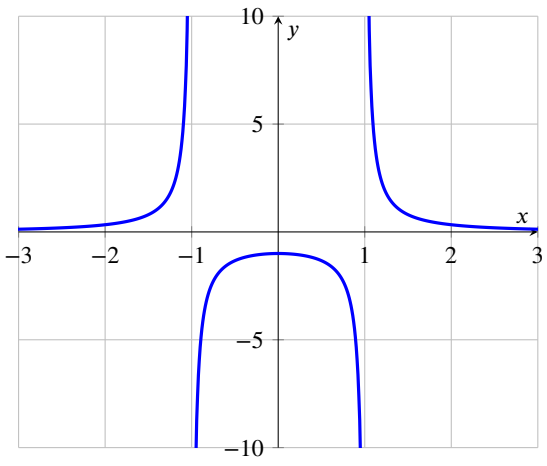
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$. Antwoord: dom $f =$ $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Uitwerking: Het grootst mogelijke domein is dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. De functie is *niet* gedefinieerd in de nulpunten van de noemer: oplossen van de vergelijking $x^2 - 1 = 0$ of dus $x^2 = 1$ levert de nulpunten 1 en -1. In alle andere punten is de functie wel gedefinieerd.

Deze functie heeft volgende grafiek:

CC BY-NC-SA 4.0

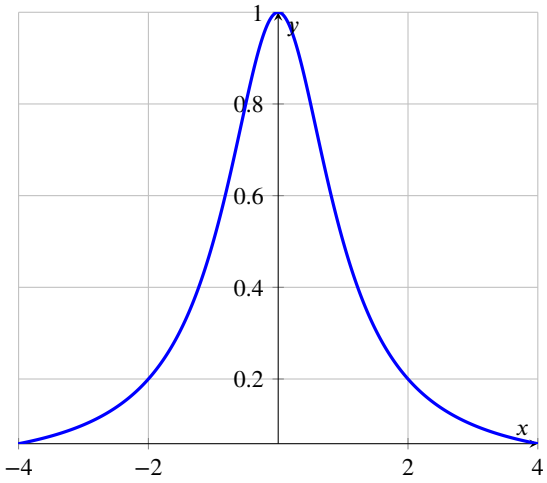
2.1 Oefeningen functies deel 1



9. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Antwoord: dom $f =$ $\mathbb{R}$

Uitwerking: Het grootst mogelijke domein is dom $f = \mathbb{R}$. De functie is *niet* gedefinieerd in de nulpunten van de noemer. Maar $x^2 + 1 = 0$ heeft geen reële oplossingen: voor geen enkele reële x geldt $x^2 = -1$, want kwadraten zijn altijd positief. Dus de functie is overal gedefinieerd.

Deze functie heeft volgende grafiek:



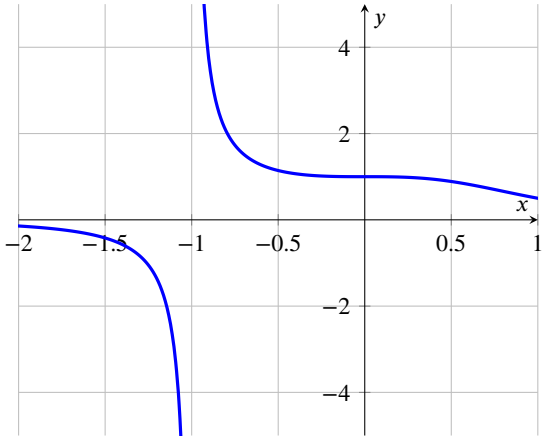
10. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$. Antwoord: dom $f =$ $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Uitwerking: Het grootst mogelijke domein is dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. De functie is *niet* gedefinieerd in de nulpunten van de noemer: oplossen van $x^3 + 1 = 0$ of dus $x^3 = -1$ levert de oplossing $x = -1$. In alle andere punten is de functie wel gedefinieerd.

Deze functie heeft volgende grafiek:

CC BY-NC-SA 4.0

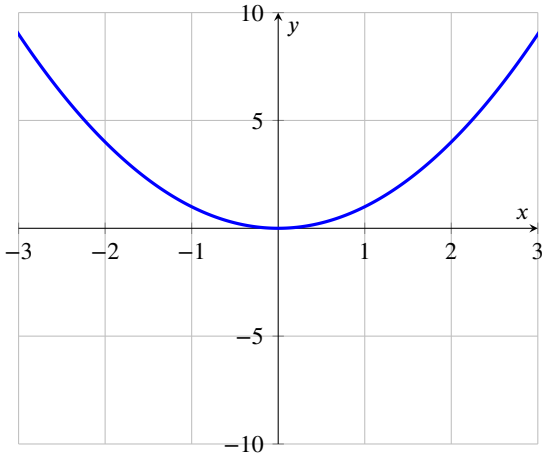
2.1 Oefeningen functies deel 1



Oefening 2.1.3. Geef telkens het *beeld* van volgende functies.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Antwoord: bld $f =$ $\mathbb{R}^+$

Uitwerking: De grafiek van $x \mapsto x^2$ is een dalparabool, en je ziet dan onmiddellijk dat enkel *positieve* reële waarden worden bereikt, en dat het beeld dus $\mathbb{R}^+$ is. Je kan ook opmerken dat een kwadraat steeds positief is, en het beeld dus zeker niet groter kan zijn dat $\mathbb{R}^+$. Anderzijds is ook elk positief getal het kwadraat van een reëel getal, en dus wordt elk positief reëel getal bereikt door de functie $x \mapsto x^2$.



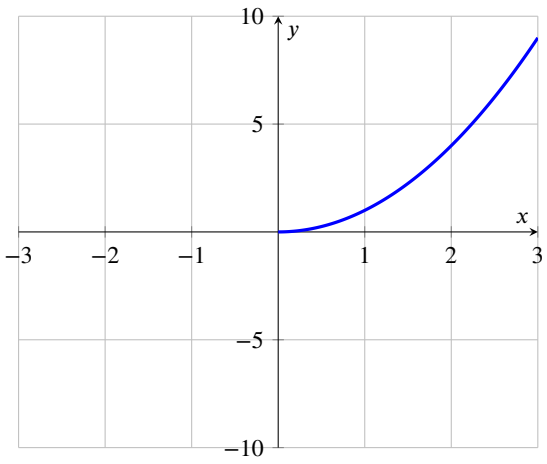
Op de grafiek is het beeld dus de verzameling waarden op de y-as waarvoor een horizontale rechte de grafiek snijdt.

2. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Antwoord: bld $f =$ $\mathbb{R}^+$

Uitwerking: Als je $x \mapsto x^2$ beperkt tot positieve x, verandert er niets aan het beeld.

CC BY-NC-SA 4.0

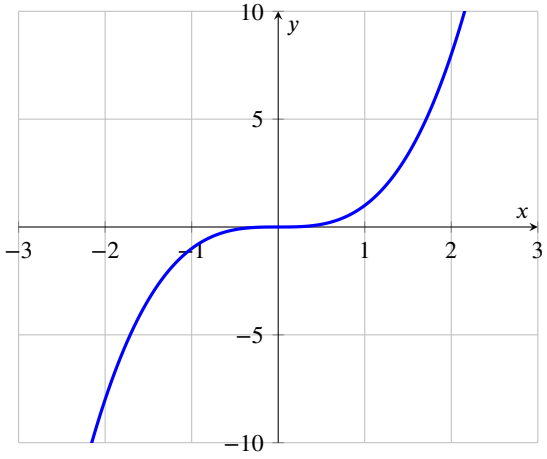
2.1 Oefeningen functies deel 1



3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Antwoord: bld $f =$ $\mathbb{R}$

Uitwerking: Het is erg handig als je de grafiek van de derdemachtsfunctie in je hoofd hebt. Je ziet dan onmiddellijk dat alle reële waarden bereikt worden door de derdemacht, en dat het beeld dus $\mathbb{R}$ is.

Je kan redeneren dat elk reëel getal een (unieke!) derdemachtswortel heeft. Dus voor elke $y \in \mathbb{R}$ bestaat het getal $x = \sqrt[3]{y}$, en voor dit getal x geldt dat $x^3 = y$. Dus elk reëel getal wordt bereikt door de functie $x \mapsto x^3$.

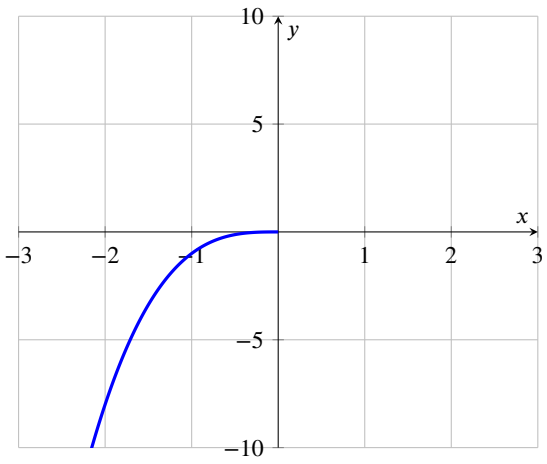


4. $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Antwoord: bld $f =$ $\mathbb{R}^-$

Uitwerking: Als je $x \mapsto x^3$ beperkt tot *negatieve* x, dan is x^3 ook steeds negatief. Het beeld is dus $\mathbb{R}^-$.

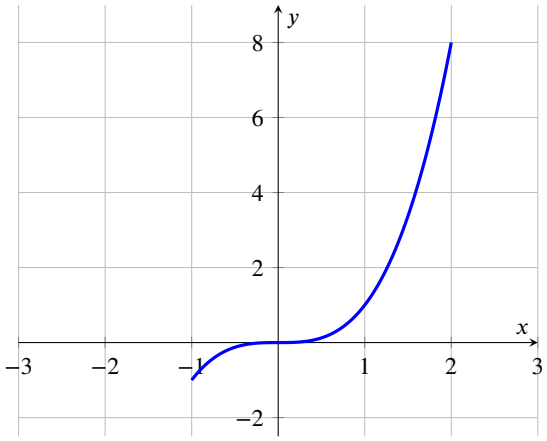
CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Oefeningen functies deel 1



5. $f : [-1,2] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Antwoord: bld $f =$ $[-1,8]$

Uitwerking: De grafiek van deze functie is het stuk van de grafiek van $x \mapsto x^3$ boven het interval van $x = -1$ tot $x = 2$. De kleinste y-waarde die bekomen wordt is -1, en de grootste y-waarde is 8. Alle y-waarden tussen deze twee uitersten worden ook bereikt.



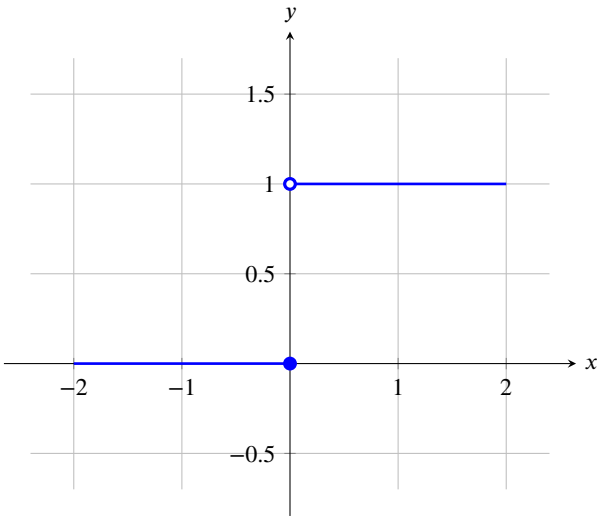
Het *beeld* van een functie hangt dus af van het *domein*: een kleiner domein leidt mogelijk tot een kleiner beeld.

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x \leq 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$. Antwoord: bld $f =$ $\{0,1\}$

Uitwerking: Iedere x in $\mathbb{R}$ wordt ofwel op 0 ofwel op 1 afgebeeld. Dat blijkt ook uit onderstaande grafiek.

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Oefeningen functies deel 1



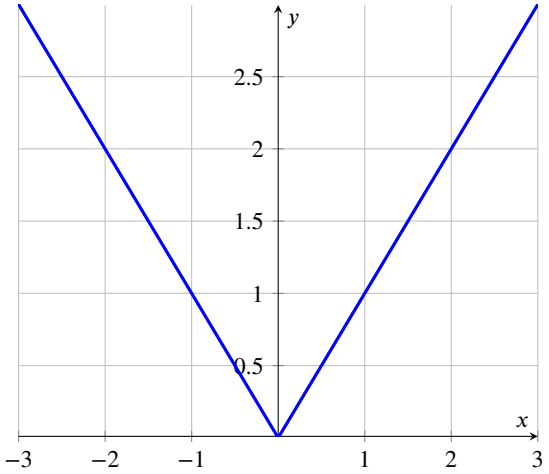
Oefening 2.1.4. Teken (zonder een grafisch rekenmachine te gebruiken) de grafiek van de functies met volgende voorschriften.

1. $f(x) = |x|$

Uitwerking: De definitie van deze functie is

$$|x| : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+ : x \mapsto \begin{cases} x & \text{als } x \geq 0 \\ -x & \text{als } x \leq 0 \end{cases}$$

Deze functie heeft volgende grafiek:



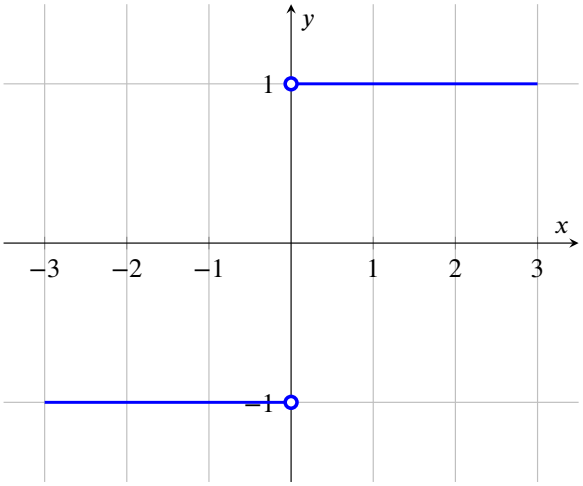
2. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

Uitwerking: In nul is de functie *niet* gedefinieerd, omdat we anders delen door nul. Het domein van de functie is dus $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}_0$. Met behulp van de definitie van de absolute waarde functie vinden we dat voor $x > 0$, het resultaat van $f(x)$ altijd 1 is. Voor $x < 0$ vinden we analoog dat het resultaat steeds -1 is.

Deze functie heeft volgende grafiek:

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/20.38)

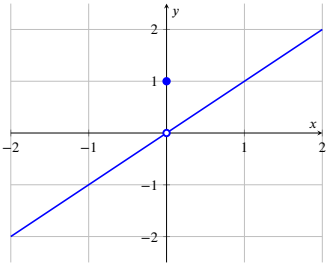
2.1 Oefeningen functies deel 1



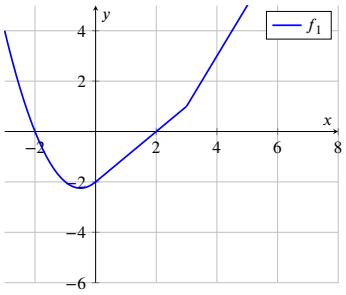
Oefening 2.1.5. Schets de grafiek van volgende functie met *meervoudig functievoorschrift*:

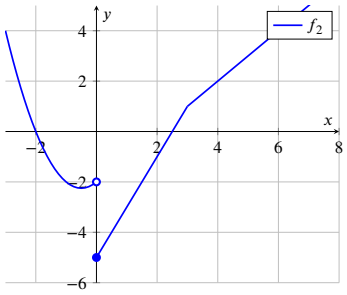
1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{als } x \neq 0 \\ 1 & \text{als } x = 0 \end{cases}$

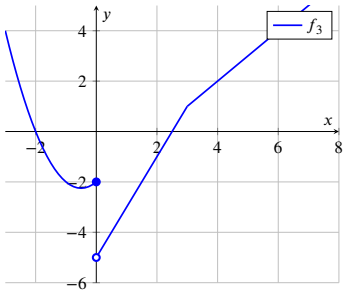
Uitwerking:



Oefening 2.1.6. Welk functievoorschrift hoort bij welke grafiek ?







1. $f_3 = \begin{cases} x^2 + x - 2 & \text{als } x \leq 0 \\ 2x - 5 & \text{als } 0 < x < 3 \\ x - 2 & \text{als } x \geq 3 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Oefeningen functies deel 1

2. $f_1 = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x<0 \\ x-2 & \text{als } 0 \le x < 3 \\ 2x-5 & \text{als } x \ge 3 \end{cases}$

3. $f_2 = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{als } x<0 \\ 2x-5 & \text{als } 0 \le x < 3 \\ x-2 & \text{als } x \ge 3 \end{cases}$

Uitwerking: Bekijk hoe elke functie gedefinieerd is. In de punten waar de grafiek van de functie een sprong maakt, zijn de randpunten van de intervallen van de definitiegebieden van belang. Inderdaad: de functie f_1 heeft in 0 de waarde -2, maar de functie f_3 heeft in 0 de waarde -5.

Oefening 2.1.7. Bepaal de samenstellingen van volgende reële functies.

1. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto 7$, dan is $f \circ g : x \mapsto 5$
2. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto 7$, dan is $g \circ f : x \mapsto 7$
3. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $f \circ g : x \mapsto 5$
4. Als $f : x \mapsto 5$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $g \circ f : x \mapsto 25$

Oefening 2.1.8.

1. Als $f : x \mapsto \sin(x+2)$ en $g : x \mapsto x+1$, dan is $f \circ g : x \mapsto \sin(x+3)$
2. Als $g : x \mapsto \sin(x+2)$ en $f : x \mapsto x+1$, dan is $f \circ g : x \mapsto \sin(x+2)+1$
3. Als $f : x \mapsto x+e^x$ en $g : x \mapsto 2x+1$, dan is $f \circ g : x \mapsto 2x+1+e^{2x+1}$
4. Als $f : x \mapsto x+e^x$ en $g : x \mapsto 2x+1$, dan is $g \circ f : x \mapsto 2x+2e^x+1$
5. Als $f : x \mapsto x^2+x$ en $g : x \mapsto e^x+\cos(x^2)$, dan is $f \circ g : x \mapsto (e^x+\cos(x^2))^2+e^x+\cos(x^2)$
6. Als $f : x \mapsto x^2+x$ en $g : x \mapsto e^x+\cos(x^2)$, dan is $g \circ f : x \mapsto e^{(x^2+x)}+\cos\left((x^2+x)^2\right)$

Oefening 2.1.9.

1. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x+2$, dan is $h \circ (f \circ g) : x \mapsto 2\cos(x^2)+2$
2. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x+2$, dan is $(h \circ f) \circ g : x \mapsto 2\cos(x^2)+2$
3. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x+2$, dan is $(f \circ g) \circ h : x \mapsto \cos((2x+2)^2)$
4. Als $f : x \mapsto \cos(x)$, $g : x \mapsto x^2$ en $h : x \mapsto 2x+2$, dan is $f \circ (g \circ h) : x \mapsto \cos((2x+2)^2)$

Uitwerking: Deze oefening is een illustratie van de rekenregel $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

2.1.3 Niveau 3

Oefening 2.1.10. Teken (zonder een grafisch rekenmachine te gebruiken) de grafiek van de functies met volgende voorschriften.

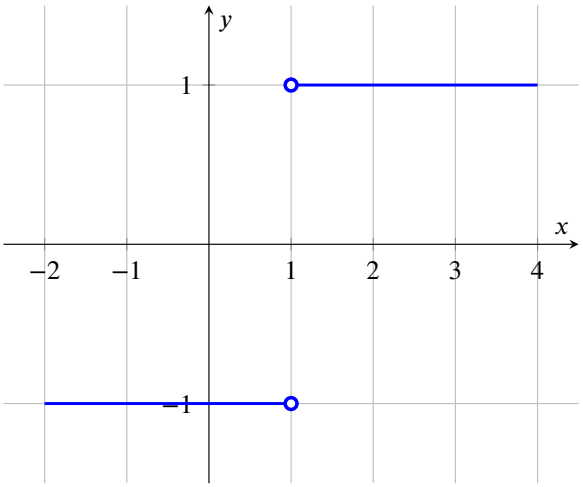
1. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Oefeningen functies deel 1

Uitwerking: De functie is niet gedefinieerd voor $x = 1$. Bovendien volgt uit de definitie van de absolute waarde functie dat $|x-1| = x-1$ voor $x-1 > 0$, of dus $x > 1$. Een analoge redenering kan je maken om in te zien dat $|x-1| = -(x-1)$ voor $x < 1$.

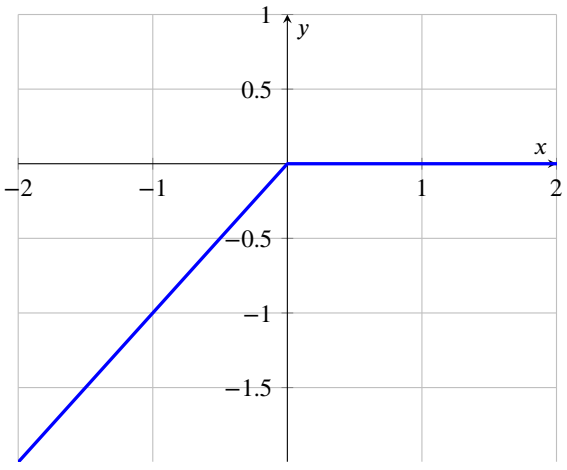
Deze functie heeft volgende grafiek:



2. $f(x) = \dfrac{x-|x|}{2}$

Uitwerking: Voor $x \geq 0$ is $|x| = x$. Dus voor $x \geq 0$ is de teller de nulfunctie. Dit blijft zo nadat we hebben gedeeld door twee. Voor $x < 0$ is $|x| = -x$ en dus is de teller gelijk aan $2x$. Bijgevolg is de grafiek voor $x < 0$ dezelfde als voor de identieke functie die x afstuurt op x.

Deze functie heeft volgende grafiek:



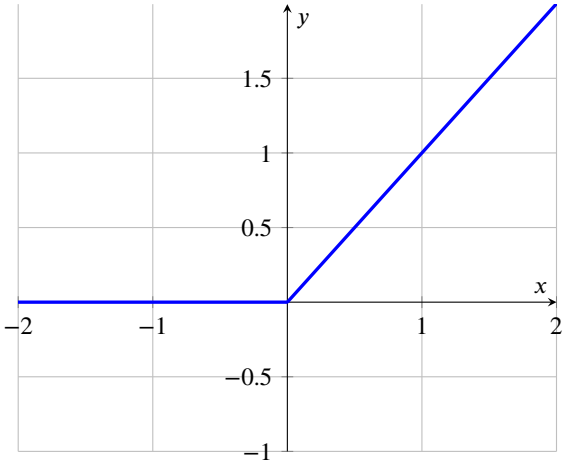
3. $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$

Uitwerking: Voor $x \leq 0$ is $|x| = -x$ en dus is de teller identiek gelijk aan nul voor $x \leq 0$. Voor $x > 0$ is de teller gelijk aan $2x$, en dus valt de grafiek van de functie voor $x > 0$ samen met de eerste bissectrice van het vlak.

Deze functie heeft volgende grafiek:

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Oefeningen functies deel 1



Oefening 2.1.11. Gegeven zijn de functies $f : [0,1] : x \mapsto x^2$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 5x$.

1. $\operatorname{dom} f \circ g = [0, 1/5]$.

Uitwerking: We vinden dat $(f \circ g)(x) = f(5x) = 25x^2$. Om het domein te bepalen, merken we op dat $f(x)$ enkel gedefinieerd is indien $x \in [0,1]$ en dus is $f(5x)$ enkel gedefinieerd als $5x \in [0,1]$ zit. Dit is equivalent met zeggen dat $x \in [0, 1/5]$.

2. $\operatorname{dom} g \circ f = [0, 1]$.

Uitwerking: We vinden dat $(g \circ f)(x) = 5x^2$. De functie g is overal gedefinieerd, maar de functie f is enkel gedefinieerd voor $x \in [0,1]$: het domein van de samenstelling $g \circ f$ is dus gelijk aan het domein van f, namelijk $[0,1]$.

Oefening 2.1.12. Gegeven zijn de volgende twee functievoorschriften voor f en g:

$$f : x \mapsto x^2$$
$$g : x \mapsto \sqrt{-x}$$

1. $\operatorname{dom} f = \boxed{\mathbb{R}}$.

2. $\operatorname{dom} g = \boxed{\mathbb{R}^-}$.

3. $\operatorname{bld} f = \boxed{\mathbb{R}^+}$.

4. $\operatorname{bld} g = \boxed{\mathbb{R}^+}$.

5. $\operatorname{dom} f \circ g = \mathbb{R}^-$.

Uitwerking: We vinden het functievoorschrift $(f \circ g)(x) = f(\sqrt{-x}) = (\sqrt{-x})^2 = -x$. Deze functie is gedefinieerd voor $x \in \mathbb{R}^-$: de samenstelling $f \circ g$ is immers gedefinieerd voor alle x in het domein van g en waarvoor $g(x)$ tot het domein van f behoort. De tweede voorwaarde mogen we achterwege laten: het domein van f is immers gans $\mathbb{R}$. Uit de eerste voorwaarde volgt echter dat het domein van deze samenstelling gelijk is aan $\mathbb{R}^-$. Bijgevolg is het beeld van $f \circ g$, met dit domein, gelijk aan $\mathbb{R}^+$.

6. $\operatorname{bld} f \circ g = \mathbb{R}^+$.

CC BY-NC-SA 4.0

2.1 Oefeningen functies deel 1

7. $\mathrm{dom}\, g\circ f = \{0\}$.

Uitwerking: We vinden het functievoorschrift $(g\circ f)(x) = g(x^2) = \sqrt{-x^2}$. Deze functie is enkel gedefinieerd voor $x = 0$: de samenstelling $g\circ f$ is immers gedefinieerd voor alle x in het domein van f en waarvoor $f(x)$ tot het domein van g behoort. De eerste voorwaarde is niet van belang, aangezien het domein van f heel $\mathbb{R}$ is. Het domein van g is $\mathbb{R}^-$, maar het beeld van de functie f is gelijk aan $\mathbb{R}^+$, zodat enkel voor 0 deze samenstelling goed gedefinieerd is. Inderdaad, voor eender welke $x \neq 0$ is $x^2 > 0$ en zal dus $f(x)$ niet tot het domein van g behoren. Het domein van de samenstelling $g\circ f$ is dan $\{0\}$ en bijgevolg is het beeld van de functie $\{0\}$.

8. $\mathrm{bld}\, g\circ f = \{0\}$.

Oefening 2.1.13. Gegeven zijn de volgende twee functievoorschriften voor f en g:

$$f : x \mapsto \sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}$$
$$g : x \mapsto \sqrt{x}$$

1. $\mathrm{dom}\, f =$ $[2, +\infty[$.

Uitwerking: De functie f is gedefinieerd voor alle x waarvoor *beide* vierkantswortels goed gedefinieerd zijn: voor de eerste geeft dit de voorwaarde $x - 2 \geq 0$, voor de tweede dat $x + 2 \geq 0$. Deze zijn equivalent met de ongelijkheden $x \geq 2$ en $x \geq -2$. Het is duidelijk dat de eerste ongelijkheid de tweede impliceert: het domein is dus $[2, +\infty[$.

2. $\mathrm{dom}\, g =$ $\mathbb{R}^+$.

Uitwerking: De functie g is gedefinieerd voor positieve reële getallen: het domein is dus $\mathbb{R}^+$.

3. $\mathrm{dom}\, f\circ g = [4, +\infty[$.

Uitwerking: We vinden dat

$$(f\circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}-2} - \sqrt{\sqrt{x}+2}$$

De samenstelling $f\circ g$ is goed gedefinieerd voor de x die in het domein van g zitten en waarvoor $g(x)$ in het domein van f zit. Dus x moet in het interval $\mathbb{R}^+$ zitten, en $\sqrt{x}$ moet in het interval $[2, +\infty[$ zitten. De tweede voorwaarde is equivalent met $\sqrt{x} \geq 2$. Kwadrateren geeft dan $x \geq 4$. Deze ongelijkheid impliceert ook meteen dat x in het interval $[1, +\infty[$ zit. Het domein van de samenstelling $f\circ g$ is dus $[4, +\infty[$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Oefeningen Veeltermen

3.1.1 Niveau 1

Oefening 3.1.1. Geef de symmetrie-as van de grafiek van volgende kwadratische functies.

1. $x \mapsto x^2 + 2x - 6$ heeft symmetrie-as: $x = -1$
2. $x \mapsto 3x^2 + 12x - 15$ heeft symmetrie-as: $x = -2$

Oefening 3.1.2. Zoek de snijpunten met de x-as en de y-as van de parabool met vergelijking $y = x^2 + x - 6$.De snijpunten met de x-as zijn $(2,0)$ en $(-3,0)$. Het snijpunt met de y-as is $(0,-6)$.

Uitwerking: Om het snijpunt met de y-as te vinden stellen we $x = 0$ en vinden zo $y = -6$. Het snijpunt met de y-as is dus in het punt $(0,-6)$. Om de snijpunten met de x-as te vinden stellen we $y = 0$. We zoeken dus de oplossingen van $x^2 + x - 6 = 0$. We berekenen $D = 25$, dus de oplossingen zijn $x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$ en $x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$. De snijpunten met de x-as zijn dus $(2,0)$ en $(-3,0)$.

3.1.2 Niveau 2

Oefening 3.1.3. Geef het tekenverloop van de functie f met het gegeven functievoorschrift. Bepaal hiervoor het nulpunt/ de nulpunten van de functie en noteer de correcte tekens in een tabel.

1. $f(x) = -x + 8$
2. $f(x) = -x^2 + 4x - 7$
3. $f(x) = x^2 + 5x - 6$
4. $f(x) = x^2 - 6x + 9$
5. $f(x) = -(x-2)(x+2)$
6. $f(x) = 3x + 2$

Oefening 3.1.4. Ontbind in factoren

1. $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$
2. $3x^2 + 12x - 15 = 3(x+5)(x-1)$

Oefening 3.1.5. Geef de oplossingen van volgende kwadratische vergelijkingen in onbekende x.

1. $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3}(1-p) = 0$. Hierin is $p > 0$ een zekere constante. $x_1 = \frac{1}{12}\left(7 + \sqrt{1+48p}\right)$ en $x_2 = \frac{1}{12}\left(7 - \sqrt{1+48p}\right)$

Uitwerking: De discriminant is $D = \frac{49}{36} - 4 \cdot \frac{1}{3}(1-p) = \frac{49 - 48(1-p)}{36} = \frac{1+48p}{36}$. Omdat $p > 0$ is ook $D > 0$, dus vinden we twee verschillende nulpunten:

$$x_1 = \frac{\frac{7}{6} + \frac{\sqrt{1+48p}}{6}}{2} = \frac{1}{12}\left(7 + \sqrt{1+48p}\right)$$

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Oefeningen Veeltermen

$$x_2 = \frac{\frac{7}{6} - \frac{\sqrt{1+48p}}{6}}{2} = \frac{1}{12}\left(7 - \sqrt{1+48p}\right)$$

2. $yx^2 + x - y = 0$. Hierin is $y \neq 0$ een zekere constante. $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}$ en $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{1+4y^2}}{2y}$

Uitwerking: De discriminant is $D = 1 - 4 \cdot y \cdot (-y) = 1 + 4y^2 > 0$, de nulpunten zijn $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}$ en $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{1+4y^2}}{2y}$. De nulpunten hangen dus af van de parameter y.

Oefening 3.1.6. Stel de vergelijking van de parabool met nulpunten in $(1,0)$ en $(4,0)$ op, die door het punt $(2,6)$ gaat. Schrijf de vergelijking in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.$y = -3x^2 + 15x - 12$

Uitwerking: Omdat we de nulpunten kennen, weten we dat we de vergelijking van de parabool kunnen schrijven in de vorm $y = a(x-1)(x-4)$, met a nog onbekend. We weten dat $(2,6)$ op de parabool ligt dus moet gelden dat $6 = a(2-1)(2-4)$, dus $6 = -2a$ of $a = -3$. De gezochte vergelijking is dus $y = -3(x-1)(x-4)$. Haakjes uitwerken geeft $y = -3x^2 + 15x - 12$

Oefening 3.1.7. Welk van de volgende functievoorschriften hoort bij een bergparabool met snijpunt met de y-as in $(0,2)$?

Meerkeuze:

(a) $f(x) = x^2 + 2x + 2$

(b) $f(x) = -x^2 - 2x + 2$ ✓

(c) $f(x) = -x^2 + 2x - 2$

(d) $f(x) = 2x^2 + 2x - 2$

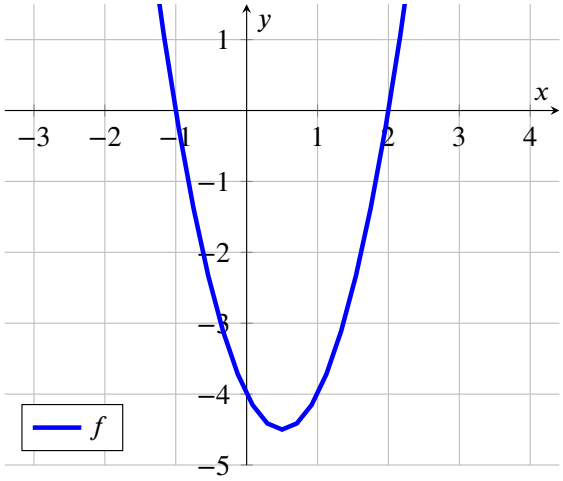
Uitwerking: Een bergparabool heeft negatieve hoogstegraadscoëfficiënt, dus enkel de tweede en derde optie blijven over. De y-waarde van het snijpunt met de y-as is gelijk aan de constante term van het functievoorschrift, dus de constante term van het voorschrift moet gelijk zijn aan 2. Dan blijft enkel de tweede optie over.

Oefening 3.1.8. Geef het functievoorschrift van de functie f waarvan de gegeven parabool de grafiek is. Geef het functievoorschrift in de vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$

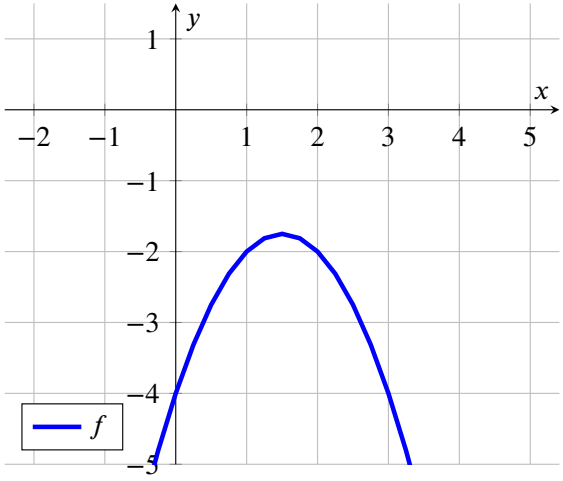
CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Oefeningen Veeltermen



Uitwerking: Het voorschrift van f is $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$. De nulpunten van f zijn $x = -1$ en $x = 2$, dus het voorschrift is $f(x) = a(x+1)(x-2) = ax^2 - ax - 2a$. We kunnen aflezen dat $f(0) = -4$ en dus $-2a = -4$, waaruit volgt dat $a = 2$. Als we dit invullen in het voorschrift vinden we $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$.

2. $f(x) = -x^2 + 3x - 4$



Uitwerking: Het voorschrift van f is $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a, b, c \in \mathbb{R}$ en $a \neq 0$. We kunnen zien dat $f(0) = -4$, dus $c = -4$. Verder kunnen we zien dat $f(1) = -2$ en $f(2) = -2$, dit geeft volgend stelsel:

$$\begin{cases} a + b - 4 = -2 \\ 4a + 2b - 4 = -2 \end{cases}$$

Als we de eerste vergelijking twee keer aftrekken van de tweede vinden we $2a + 4 = 2$ en dus $a = -1$. Dit invullen in de eerste vergelijking geeft $-1 + b - 4 = -2$ en dus $b = 3$. Dit geeft $f(x) = -x^2 + 3x - 4$.

Oefening 3.1.9. Zoek de oplossingsverzameling van volgende ongelijkheden door het tekenverloop op te stellen. Maak ook een tekening.

1. $x^2 - 1 > 0$. $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

Uitwerking: Zoek het tekenverloop van $x \mapsto x^2 - 1$ en kijk waar deze functie strikt positief is. De nulpunten

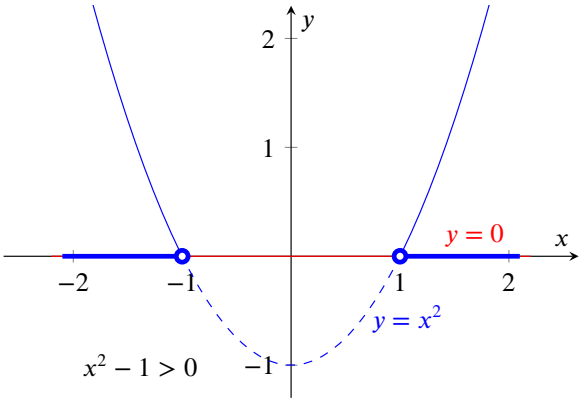
CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Oefeningen Veeltermen

zijn $x_1 = -1$ en $x_2 = 1$. De coëfficiënt $a = 1$ is positief, dus is de tekentabel

x		$x_1 = -1$		$x_2 = 1$	
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

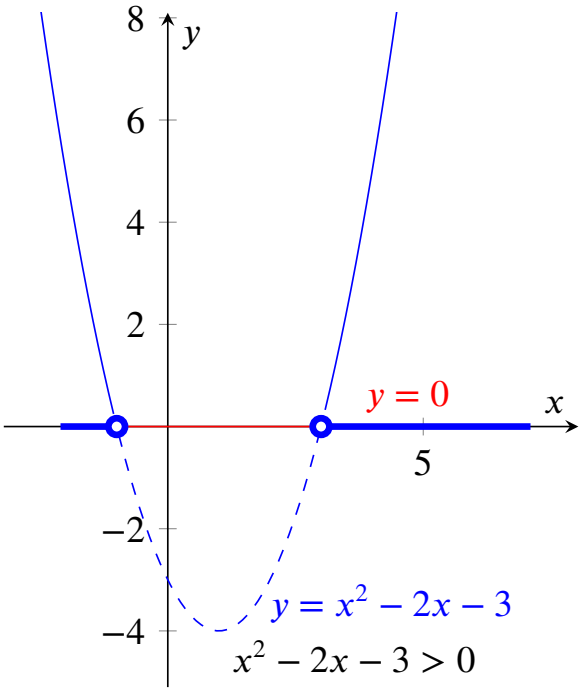


2. $x^2 - 2x - 3 > 0$. $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$

Uitwerking: Zoek het tekenverloop van $x \mapsto x^2 - 2x - 3$ en kijk waar deze veelterm strikt positief is.
De nulpunten zijn $x_1 = -1$ en $x_2 = 3$. De coëfficiënt $a = 1$ is positief, dus is de tekentabel

x		$x_1 = -1$		$x_2 = 3$	
$x^2 - 2x - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$.



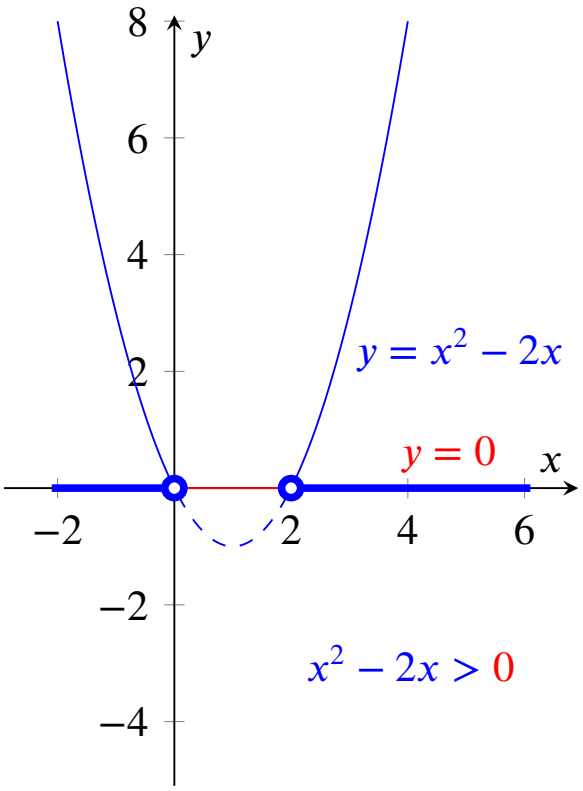
3. $x^2 - 2x > 0$. $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

3.1 Oefeningen Veeltermen

Uitwerking: Zoek het tekenverloop van $x \mapsto x^2 - 2x$ en kijk waar deze functie strikt positief is. De nulpunten zijn $x_1 = 0$ en $x_2 = 2$. De coëfficiënt $a = 1$ is positief, dus is de tekentabel

x		$x_1 = 0$		$x_2 = 2$	
$x^2 - 2x$	$+$	0	$-$	0	$+$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$.



4. $-2x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$. $V = \emptyset$

Uitwerking: De discriminant is $D = 16 - 40 = -24 < 0$, en er zijn dus geen nulpunten. De hoogstegraads-coëfficiënt is negatief, dus is de tekentabel

x	
$-2x^2 + 4x - 5$ met $a < 0$	$-$

De oplossingsverzameling is dus leeg, $V = \emptyset$.

Oefening 3.1.10. Zoek het quotiënt en de rest van volgende delingen met behulp van een Euclidische deling.

1. Deel $2x^4 - 1$ door $x - 1$. Quotiënt $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ en rest 1

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Oefeningen Veeltermen

Uitwerking:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr|l}
2x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & - & 1 & & x-1 \\
\cline{11-11}
-\,2x^4 & - & 2x^3 & & & & & & & & 2x^3+2x^2+2x+2 \\
\cline{1-9}
 & & 2x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & - & 1 & & \\
 & & 2x^3 & - & 2x^2 & & & & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & 2x^2 & + & 0x & - & 1 & & \\
 & & & & 2x^2 & - & 2x & & & & \\
\cline{5-9}
 & & & & & & 2x & - & 1 & & \\
 & & & & & & 2x & - & 2 & & \\
\cline{7-9}
 & & & & & & & & 1 & &
\end{array}$$

2. Deel $4x^3+4x^2-5x-3$ door $2x^2-x-1$. Quotiënt $2x+3$ en rest 0.

Uitwerking:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
4x^3 & + & 4x^2 & - & 5x & - & 3 & & 2x^2-x-1 \\
\cline{9-9}
-\,4x^3 & - & 2x^2 & - & 2x & & & & 2x+3 \\
\cline{1-7}
 & & 6x^2 & - & 3x & - & 3 & & \\
 & & 6x^2 & - & 3x & - & 3 & & \\
\cline{3-7}
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Oefening 3.1.11.

1. De Euclidische deling van de veelterm ax^2+bx+c door $x-3$ heeft als quotiënt $3x+1$ en rest $r\in\mathbb{R}$. Wat is de waarde van b in deze veelterm?

$b=-8$

Uitwerking: Uit het gegeven volgt dat $ax^2+bx+c=(x-3)(3x+1)+r=3x^2-8x+(-3+r)$.

Hieruit volgt dat $b=-8$.

2. De Euclidische deling van de veelterm $p(x)=ax^2+bx+c$ door $2x+1$ heeft als quotiënt $-x-1$ en rest 2. Wat is de waarde van $p(1)$?

$p(1)=-4$

Uitwerking: Uit het gegeven volgt dat $p(x)=ax^2+bx+c=(2x+1)(-x-1)+2=-2x^2-3x+1$.

Hieruit volgt dat $p(1)=-2-3+1=-4$.

Oefening 3.1.12. Bepaal voor onderstaande veeltermen een nulpunt a en bereken het quotiënt bij deling door $x-a$.

1. x^4-2x^3+1: x^4-2x^3+1 delen door $x-1$ geeft als quotiënt x^3-x^2-x-1

Uitwerking: De gehele delers van de constante term (dus van 1) zijn ±1.

$$p(-1)=(-1)^4-2(-1)^3+1=1+2+1\neq 0$$

$$p(1)=1-2+1=0$$

We delen door $x-1$. Het quotiënt vinden we via het algoritme van de euclidische deling, of met de methode van Horner:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1x^4 & -2x^3 & 0x^2 & 0x & 1x^0 \\
x-1 & & 1x^3 & -1x^2 & -1x & -1x^0 \\
\hline
 & 1x^3 & -1x^2 & -1x & -1x^0 & 0\text{(rest)}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\
1 & & 1 & -1 & -1 & -1 \\
\hline
 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0
\end{array}$$

2. x^3-x^2-5x+6: x^3-x^2-5x+6 delen door $x-2$ geeft als quotiënt x^2+x-3

Uitwerking: $p(2)=8-4-10+6=0$. We delen door $x-2$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Oefeningen Veeltermen

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & 2 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

Oefening 3.1.13. Ontbind de volgende veeltermen in factoren van zo laag mogelijke graad:

1. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$

Uitwerking: De gehele delers van de constante term zijn $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

We berekenen $p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$.

Er bestaat dus zeker een veelterm $q(x)$ zodat $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)q(x)$.

Deze veelterm $q(x)$ kan je berekenen met de Euclidische Deling:

$$\begin{array}{rcccccccc|l} 1x^3 & - & 6x^2 & + & 11x & - & 6 & & x-1 \\ \cline{9-9} -(1x^3 & - & 1x^2) & & & & & & x^2-5x+6 \\ \cline{1-3} & - & 5x^2 & + & 11x & - & 6 & & \\ & -(- & 5x^2 & + & 5x) & & & & \\ \cline{2-6} & & & & 6x & - & 6 & & \\ & & & -(& 6x & - & 6) & & \\ \cline{4-7} & & & & & & 0 & & \end{array}$$

Hieruit volgt dat $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$. Nu moet de factor $x^2 - 5x + 6$ nog verder worden ontbonden. Dat kan via een berekening van de nulpunten met de discriminant: $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = 2, 3$.

We vinden de ontbinding $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$.

2. $x^3 - x^2 - 5x + 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x-1)$

Uitwerking: De gehele delers van de constante term zijn $1, -1, 5, -5$.

We berekenen $p(1) = 1 - 1 - 5 + 5 = 0$.

Er bestaat dus zeker een veelterm $q(x)$ zodat $x^3 - x^2 - 5x + 5 = (x-1)q(x)$.

Deze veelterm $q(x)$ kan je berekenen met de Euclidische Deling:

$$\begin{array}{rcccccccc|l} 1x^3 & - & 1x^2 & - & 5x & + & 5 & & x-1 \\ \cline{9-9} -(1x^3 & - & 1x^2) & & & & & & x^2-5 \\ \cline{1-3} & & & - & 5x & + & 5 & & \\ & & & -(& 5x & + & 5) & & \\ \cline{4-7} & & & & & & 0 & & \end{array}$$

Hieruit volgt dat $x^3 - x^2 - 5x + 5 = (x-1)(x^2 - 5)$. Nu moet de factor $x^2 - 5$ nog verder worden ontbonden. Dat kan via een berekening van de nulpunten met de discriminant: $x_{1,2} = \dfrac{0 \pm \sqrt{20}}{2} = \pm\sqrt{5}$, of door het merkwaardig product $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ te gebruiken.

We vinden telkens de ontbinding $x^3 - x^2 - 5x + 5 = (x-1)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$.

3. $2x^3 + x^2 - 8x + 5 = (x-1)^2(2x+5)$

Uitwerking: De gehele delers van de constante term zijn $1, -1, 5, -5$.

We berekenen $p(1) = 1 - 1 - 5 + 5 = 0$.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Oefeningen Veeltermen

Er bestaat dus zeker een veelterm $q(x)$ zodat $2x^3+x^2-8x+5=(x-1)q(x)$.

Deze veelterm $q(x)$ kan je berekenen met de Euclidische Deling:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
2x^3 & + & 1x^2 & - & 8x & + & 5 & & x-1 \\
\cline{10-10}
2x^3 & - & 2x^2 & & & & & & 2x^2+3x-5 \\
\cline{1-3}
 & & 3x^2 & - & 8x & + & 5 & & \\
 & & 3x^2 & - & 3x & & & & \\
\cline{3-5}
 & & & - & 5x & + & 5 & & \\
 & & & - & 5x & + & 5 & & \\
\cline{4-7}
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Hieruit volgt dat $2x^3+x^2-8x+5=(x-1)(2x^2+3x-5)$. Nu moet de factor $2x^2+3x-5$ nog verder worden ontbonden. De discriminant is $D=9-4\cdot 2\cdot(-5)=49$ en de nulpunten zijn $x_1=\frac{-3+7}{4}=1$ en $x_2=\frac{-3-7}{4}=-\frac{5}{2}$, dus $(2x^2+3x-5)=2(x-1)(x+\frac{5}{2})=(x-1)(2x+5)$. Hierbij hebben we gebruikt dat als x_1 en x_2 de wortels zijn van ax^2+bx+c, dan is $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. We besluiten

$$2x^3+x^2-8x+5=(x-1)^2(2x+5)$$

.

4. $x(x+1)(2x+1)+6(x+1)^2=(x+1)(x+2)(2x+3)$

Uitwerking: Om efficiënt te rekenen schrijven we deze opgave niet eerst in de vorm $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ om dan een deler van de vorm $x-a$ te zoeken. We zetten de gemeenschappelijke factor $(x+1)$ buiten haakjes

$$(x+1)(x(2x+1)+6(x+1))=(x+1)(2x^2+7x+6),$$

en moeten dan enkel een 2de graadsveelterm ontbinden in factoren. De nulpunten van $2x^2+7x+6$ zijn -2 en $-\frac{3}{2}$, dus

$$2x^2+7x+6=2(x+2)(x+\frac{3}{2})=(x+2)(2x+3)$$

en

$$x(x+1)(2x+1)+6(x+1)^2=(x+1)(x+2)(2x+3).$$

5. $2x^4-1=(2^{1/4}x-1)(2^{1/4}x+1)(\sqrt{2}x^2+1)$

Uitwerking: De veelterm kan ontbonden worden met het merkwaardig product $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$:

$$2x^4-1=(\sqrt{2}x^2-1)(\sqrt{2}x^2+1)=(2^{1/4}x-1)(2^{1/4}x+1)(\sqrt{2}x^2+1).$$

Oefening 3.1.14. Schrijf als één breuk door de breuken op te tellen.

1. $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{2x+5}{(x-1)(x+1)}$

Uitwerking: We kunnen de breuken niet vereenvoudigen. Het kleinste gemene veelvoud van de noemers is $(x-1)(x+1)$. We brengen eerst de breuken op gelijke noemer en tellen daarna op.

$$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)(x+1)}=\frac{2(x+1)+3}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x+5}{(x-1)(x+1)}$$

2. $\frac{x+1}{x+3}-\frac{2}{x^2+6x+9}=\frac{x^2+4x+1}{(x+3)^2}$

Uitwerking: We ontbinden de noemer van de tweede breuk in factoren en vinden zo dat het kleinste gemene veelvoud van de noemers $(x+3)^2$ is.

CC BY-NC-SA 4.0

3.1 Oefeningen Veeltermen

$$\frac{x+1}{x+3} - \frac{2}{x^2+6x+9} = \frac{x+1}{x+3} - \frac{2}{(x+3)^2} = \frac{(x+1)(x+3)-2}{(x+3)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+3)^2}$$

3. $\dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x(x-3)} - \dfrac{x}{2(x+3)} = \dfrac{-x^3+(2A+3)x^2+(6A+2B)x+6B}{2x(x-3)(x+3)}$

Uitwerking: Het kleinste gemene veelvoud van de noemers is $2x(x-3)(x+3)$. We brengen eerst de breuken op gelijke noemer en tellen daarna op. Dit geeft

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x(x-3)} - \frac{x}{2(x+3)} &= \frac{2Ax(x+3)}{2x(x-3)(x+3)} + \frac{2B(x+3)}{2x(x-3)(x+3)} - \frac{x^2(x-3)}{2x(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{2Ax(x+3)+2B(x+3)-x^2(x-3)}{2x(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{-x^3+(2A+3)x^2+(6A+2B)x+6B}{2x(x-3)(x+3)}\end{aligned}$$

4. $\dfrac{A}{4(x-2)} + \dfrac{B}{2(x-2)^2} + \dfrac{C}{2(x+2)} = \dfrac{(A+2C)x^2+(2B-8C)x+(-4A+4B+8C)}{4(x-2)^2(x+2)}$

Uitwerking: Het kleinste gemene veelvoud van de noemers is $4(x-2)^2(x+2)$. We brengen eerst de breuken op gelijke noemer en tellen daarna op. Dit geeft

$$\begin{aligned}\frac{A}{4(x-2)} + \frac{B}{2(x-2)^2} + \frac{C}{2(x+2)} &= \frac{A(x-2)(x+2)}{4(x-2)^2(x+2)} + \frac{2B(x+2)}{4(x-2)^2(x+2)} + \frac{2C(x-2)^2}{4(x-2)^2(x+2)} \\ &= \frac{A(x^2-4)}{4(x-2)^2(x+2)} + \frac{2B(x+2)}{4(x-2)^2(x+2)} + \frac{2C(x^2-4x+4)}{4(x-2)^2(x+2)} \\ &= \frac{A(x^2-4)+2B(x+2)+2C(x^2-4x+4)}{4(x-2)^2(x+2)} \\ &= \frac{(A+2C)x^2+(2B-8C)x+(-4A+4B+8C)}{4(x-2)^2(x+2)}\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Oefeningen Goniometrie

4.1.1 Niveau 1

Oefening 4.1.1. Zet om van graden naar radialen of omgekeerd.

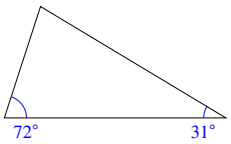
Graden	*Radialen*
$120°$	$2\pi/3$
$8°$	$2\pi/45$
$315\ °$	$7\pi/4$
$18\ °$	$\pi/10$
$90°$	$\pi/2$
$1°$	$\pi/180$
$252\ °$	$7\pi/5$

Graden	*Radialen*
$120°$	$2\pi/3$
$8°$	$2\pi/45$
$315\ °$	$7\pi/4$
$18\ °$	$\pi/10$
$90°$	$\pi/2$
$1°$	$\pi/180$
$252\ °$	$7\pi/5$

Oefening 4.1.2. Bepaal de grootte van de derde hoek in een driehoek met hoeken α, β, γ. (zie Appendix: Basiseigenschappen van driehoeken):

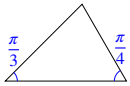
1. $\beta = 31°, \gamma = 72°$, $\alpha = 77°$.

Uitwerking: De som van de hoeken van een driehoek is $180°$: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, en hieruit vinden we $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 31° - 72° = 77°$.



2. $\alpha = \pi/4, \gamma = \pi/3$, $\beta = 5\pi/12$ radialen.

Uitwerking: De som van de hoeken van een driehoek is π radialen: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, en hieruit vinden we $\beta = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{3\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$.



Oefening 4.1.3. Lees de waarden van volgende goniometrische getallen af op de cirkel:

4.1 Oefeningen Goniometrie

1. $\cos 0° = 1$
2. $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos 90° = 0$
4. $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$
5. $\sin 0° = 0$
6. $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
7. $\sin 90° = 1$
8. $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$
9. $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$
10. $\cos \frac{\pi}{2} = 0$
11. $\tan \frac{\pi}{4} = 1$
12. $\cot \frac{3\pi}{2} = 0$

Oefening 4.1.4. Duid het juiste antwoord aan (er is telkens precies één antwoord correct).

1. De hoeken $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{5\pi}{6}$ zijn supplementair✓

Uitwerking: $\frac{\pi}{6}$ en $\frac{5\pi}{6}$ zijn supplementaire hoeken want $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$

2. $\cos \frac{5\pi}{4}$ is gelijk aan $\cos \frac{3\pi}{4}$✓

Uitwerking: $\cos \frac{5\pi}{4} = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4}$ (tegengestelde hoeken)

3. $\sin(\pi - 23)$ is gelijk aan $\sin(23)$✓

Uitwerking: $\sin(\pi - 23) = \sin(23)$ (supplementaire hoeken)

4. $\sin(2\pi + 1)$ is gelijk aan $\sin 1$✓

Uitwerking: $\sin(2\pi + 1) = \sin 1$

Oefening 4.1.5. Bereken zonder rekentoestel. Gebruik de gekende goniometrische getallen en de formules voor tegengestelde, (anti)supplementaire en (anti)complementaire hoeken.

1. $\sin(135°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Uitwerking: $\sin(135°) = \sin(45° + 90°) = \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

of ook $\sin(135°) = \sin(180° - 45°) = \sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\tan(3\pi/4) = -1$

Uitwerking: $\tan(3\pi/4) = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan(\frac{\pi}{4}) = -1$

3. $\cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\sin(-120°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Oefeningen Goniometrie

5. $\tan(-\frac{5\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Uitwerking: $\tan(-\frac{5\pi}{6}) = -\tan(\frac{5\pi}{6}) = -\tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = \tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

6. $\cot(390°) = \sqrt{3}$

4.1.2 Niveau 2

Oefening 4.1.6. Zoek aan de hand van de goniometrische cirkel waaraan volgende uitdrukkingen gelijk zijn.

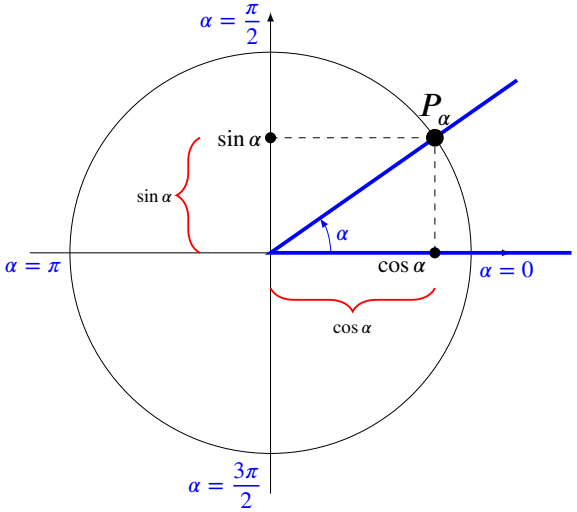
1. $\cos(\pi - \alpha) =$ $-\cos\alpha$✓

2. $\sin(\alpha - \pi) =$ $-\sin\alpha$✓

3. $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) =$ $\sin\alpha$✓

4. $\sin(\pi + \alpha) =$ $-\sin\alpha$✓

5. $\tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$ $-\cot\alpha$✓



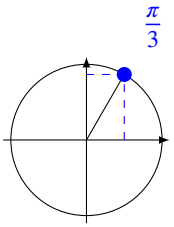
Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha - \tfrac{\pi}{2}) &= \frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha - \frac{\pi}{2})} \\
&= \frac{\sin(-(\frac{\pi}{2} - \alpha))}{\cos(-(\frac{\pi}{2} - \alpha))} \\
&= \frac{-\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)} \\
&= \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} \\
&= -\cot\alpha
\end{aligned}$$

Oefening 4.1.7. Bereken volgende goniometrische getallen door gebruik te maken van de gekende waarden van de standaardhoeken $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ en $\frac{\pi}{2}$ en de symmetrieën voor de verwante hoeken.

1. $\cos\frac{\pi}{3} =$ $\frac{1}{2}$✓

Uitwerking:



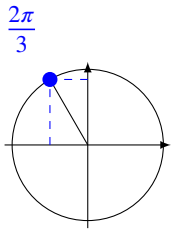
CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Oefeningen Goniometrie

Dit is al een gekende waarde voor een standaardhoek. Je moet dus geen rekenregels voor verwante hoeken toepassen.

2. $\cos\frac{2\pi}{3} =$ $-\frac{1}{2}$✓

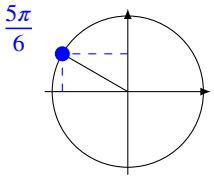
Uitwerking:



Door gebruik te maken van supplementaire hoeken, vinden we dat $\cos 2\pi/3 = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos\pi/3 = -1/2$, waarbij in de laatste stap een gekende waarde voor een standaardhoek werd gebruikt.

3. $\cos\frac{5\pi}{6} =$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$✓

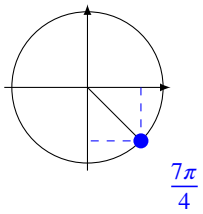
Uitwerking:



Door gebruik te maken van supplementaire hoeken, vinden we dat $\cos 5\pi/6 = \cos(\pi - \pi/6) = -\cos\pi/6 = -\sqrt{3}/2$, waarbij in de laatste stap een gekende waarde voor een standaardhoek werd gebruikt.

4. $\sin\frac{7\pi}{4} =$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$✓

Uitwerking:

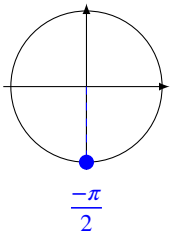


Merk allereerst op dat $7\pi/4 = -\pi/4$. Door gebruik te maken van tegengestelde hoeken, vinden we dan dat $\sin(7\pi/4) = \sin(-\pi/4) = -\sin(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, waarbij in de laatste stap de gekende waarde voor een standaardhoek werd gebruikt.

5. $\cos\frac{-\pi}{2} =$ 0✓

4.1 Oefeningen Goniometrie

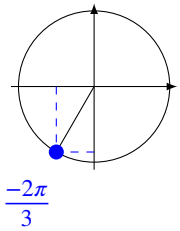
Uitwerking:



Door gebruik te maken van tegengestelde hoeken vinden we dat $\cos(-\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, waarbij in de laatste stap de gekende waarde voor een standaardhoek werd gebruikt.

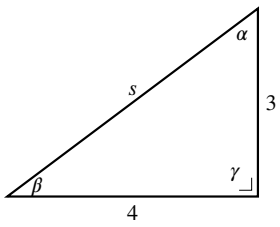
6. $\cos\dfrac{-2\pi}{3} =$ $\boxed{-\dfrac{1}{2}\checkmark}$

Uitwerking:



Door gebruik te maken van tegengestelde hoeken vinden we dat $\cos(-2\pi/3) = \cos 2\pi/3$. Vervolgens maken we gebruik van supplementaire hoeken, zodat $\cos 2\pi/3 = \cos(\pi - \pi/3) = -\cos(\pi/3) = -1/2$, waarbij in de laatste stap de gekende waarde voor een standaardhoek werd gebruikt.

Oefening 4.1.8. We bekijken een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden met lengte 3 en 4 (zie tekening). Bereken de lengte van de schuine zijde s. Bereken ook de sinus en cosinus van elk van de hoeken α, β en γ.



1. $s = 5$

2. $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$

3. $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$

4. $\sin\beta = \dfrac{3}{5}$

5. $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$

6. $\sin\gamma = 1$

7. $\cos\gamma = 0$

Oefening 4.1.9. Bepaal $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ en $\cot\alpha$ en het kwadrant waarin α ligt in het volgende geval (zonder gebruik te maken van een rekenmachine):

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6} \qquad \text{en} \qquad \sin\alpha < 0.$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Oefeningen Goniometrie

1. α ligt in het IVe✓ kwadrant.

2. $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{5}{6}}$

3. $\tan\alpha = -\sqrt{5}$

4. $\cot\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Oefening 4.1.10. Bepaal $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ en $\cot\alpha$ en het kwadrant waarin α ligt in het volgende geval (zonder gebruik te maken van een rekenmachine):

$$\tan\alpha = -\frac{3}{4} \qquad \text{en} \qquad \sin\alpha > 0.$$

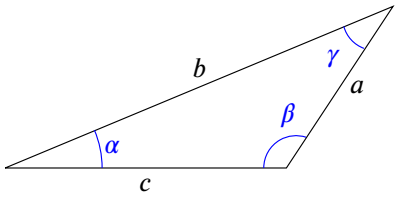
1. α ligt in het IIe✓ kwadrant.

2. $\cot\alpha = -\frac{4}{3}$

3. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

4. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

Oefening 4.1.11. Bereken alle zijden en hoeken van een driehoek met gegeven zijden $a = 2$, $b = 4$ en hoek $\beta = \pi/2$. De notatie is als volgt:



1. Bereken de hoek $\alpha = \pi/6$ rad.

Uitwerking: Als je twee zijden (a en b) en een aanliggende hoek (β) kent, dan kan je de hoek α berekenen met de sinusregel $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, want $\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b} = \frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{1}{2}$ (want $\sin\beta = \sin\frac{\pi}{2} = 1$). De hoek met sinus $1/2$ is een standaardhoek, namelijk $\pi/6$.

Merk op: er is nog een andere hoek α met $\sin\alpha = 1/2$, namelijk de hoek $\pi - \pi/6 = 5\pi/6$ (maak een schets van de goniometrische cirkel om dit in te zien). Dit kan hier echter onmogelijk de hoek zijn die we zoeken: de hoek α is namelijk een hoek in een driehoek, de som van alle hoeken van een driehoek is π radialen, en als $\alpha = 5\pi/6$ dan zou $\alpha + \beta$ al groter zijn dan π radialen wat natuurlijk niet kan.

2. Bereken de hoek $\gamma = \pi/3$ rad.

Uitwerking: De derde hoek γ kunnen we nu onmiddellijk berekenen omdat de som van alle hoeken in een driehoek gelijk is aan π: $\gamma = \pi - \pi/2 - \pi/6 = \pi/3$. Je kan ook nogmaals de sinusregel gebruiken.

3. Bereken met de cosinusregel en de waarde van γ uit vorige deelvraag de lengte van de zijde $c = 2\sqrt{3}$.

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Oefeningen Goniometrie

Uitwerking: Je kan de cosinusregel gebruiken:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

waarbij de waarden $a = 2, b = 4$ en $\gamma = \pi/3$ in het rechterlid allemaal gekend zijn. Omdat $\pi/3$ een standaardhoek is, met $\cos\pi/3 = \frac{1}{2}$, vind je

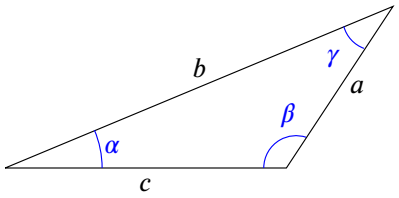
$$c^2 = 4 + 16 - 16 \cdot \frac{1}{2} = 12$$

en dus $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

4. Bereken de lengte van de zijde c *zonder* de antwoorden van de eerste deelvraag te gebruiken.

Uitwerking: De hoek β is een rechte hoek en dus kan je de stelling van Pythagoras gebruiken. De schuine zijde van de driehoek is b, en dus geldt $b^2 = a^2 + c^2$, ofwel $c^2 = b^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$. En dus is $c = \sqrt{12}$, wat overeenkomt met de waarde uit de vorige deelvraag.

Oefening 4.1.12. Bereken alle zijden en hoeken van een driehoek met gegeven zijde $a = 3$ en hoeken $\alpha = \frac{\pi}{4}$ en $\beta = \frac{\pi}{3}$. De notatie is als volgt:



Je mag een rekenmachine gebruiken.

1. Bereken de hoek $\gamma \approx 1.309$ rad.

Uitwerking: De hoek γ kan direct berekend worden uit $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, dus $\gamma = \pi - \frac{\pi}{4} - \beta = \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12} = 1,309\ldots$.

2. Bereken de lengte van $b \approx 3.67$.

Uitwerking: De lengte van b kan je berekenen met de **sinusregel** $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$, die je kan schrijven als $b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. De hoeken α en β zijn standaardhoeken met $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, en dus volgt dat $b = 3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{3/2} = 3,67\ldots$.

3. Bereken de lengte van $c \approx 4.098$.

Uitwerking: De lengte van c kan je zowel met de sinusregel als met de cosinusregel berekenen:
De **cosinusregel** zegt dat $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$, waarbij $\cos\gamma = \cos\frac{5\pi}{12} \approx 0,2588\ldots$, $b^2 = 9\frac{3}{2} = \frac{27}{2}$ en $2ab = 2 \cdot 3 \cdot 3\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{6}$, en dus

$$c = \sqrt{9 + \frac{27}{2} - 9\sqrt{6} \cdot \cos\frac{5\pi}{12}} \approx \sqrt{16,7946} \approx 4,098$$

CC BY-NC-SA 4.0

4.1 Oefeningen Goniometrie

De **sinusregel** geeft verbanden tussen c en γ enerzijds en de gekende a en α of b en β anderzijds. Omdat zowel a als α gegeven zijn, kies je hier best voor a en α.

Uit $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ volgt dat $c = \sin\gamma \frac{a}{\sin\alpha} \approx 0.9659 \cdot 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \approx 4,098.$

Oefening 4.1.13. Vereenvoudig (dit wil zeggen, schrijf met behulp van één goniometrisch getal).

1. $\cos^2 3 - \sin^2 3$

Uitwerking: $\cos^2 3 - \sin^2 3 = \cos 6$ (dubbele hoek formule)

2. $2 \sin 3 \cos 3$

Uitwerking: $2 \sin 3 \cos 3 = \sin 6$ (dubbele hoek formule)

3. $\sin(5\alpha)\cos(3\alpha) + \cos(5\alpha)\sin(3\alpha)$

Uitwerking: $\sin(5\alpha)\cos(3\alpha) + \cos(5\alpha)\sin(3\alpha) = \sin(8\alpha)$ (somformule)

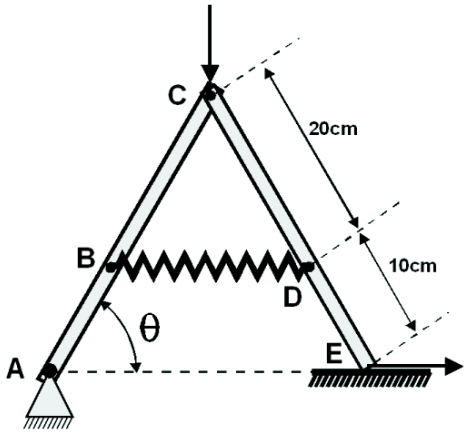
4. $\cos(5\alpha)\cos(3\alpha) + \sin(5\alpha)\sin(3\alpha)$

Uitwerking: $\cos(5\alpha)\cos(3\alpha) + \sin(5\alpha)\sin(3\alpha) = \cos(2\alpha)$ (verschilformule)

4.1.3 Niveau 3

Oefening 4.1.14.

Twee even lange staven AC en CE zijn met elkaar verbonden via een veer BD. Druk de lengte van de veer BD uit in functie van de hoek θ.



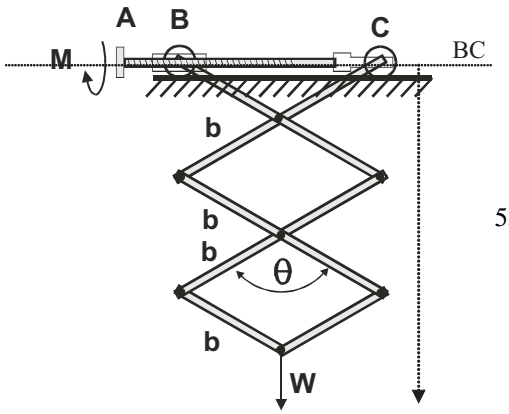
40

cm $\cos\theta$

Oefening 4.1.15.

4.1 Oefeningen Goniometrie

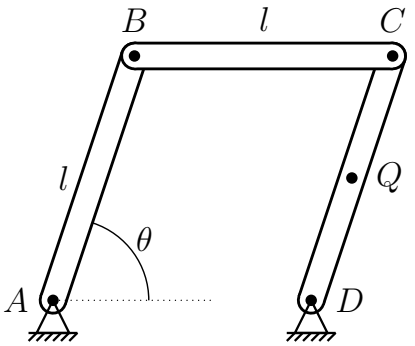
Een meetapparaat met een gewicht W is opgehangen aan het dispositief voorgesteld in de figuur. Het meetapparaat wordt gepositioneerd door de afstand BC te regelen. Bepaal de afstand tussen de staaf BC en het punt W als functie van de hoek θ en lengte b.



$5b\cos(\frac{\theta}{2})$

Oefening 4.1.16.

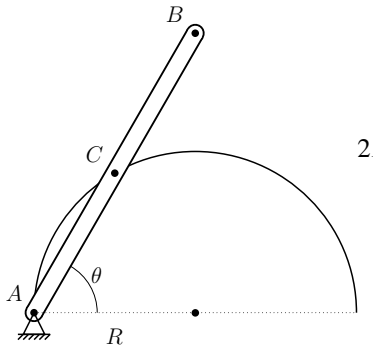
De staven AB, BC en CD van het voorgestelde stangensysteem hebben een lengte l. De staaf AB is evenwijdig met de staaf CD. Bepaal de verticale afstand tussen de rechte AD en het punt Q als functie van de hoek θ en de lengte van de staven l. Q ligt in het midden tussen C en D.



$\frac{l}{2}\sin\theta$

Oefening 4.1.17.

De staaf AB roteert in het verticaal vlak rond zijn uiteinde A. De puntmassa C glijdt tegelijkertijd over de staaf en de cirkelvormige geleiding met straal R. Bepaal de afstand tussen A en C als functie van R en θ.



$2R\cos\theta$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/20.38)

5.1 Oefeningen ongelijkheden

5.1.1 Niveau 1

Oefening 5.1.1. Los volgende ongelijkheden op:

1. Welke reële getallen x voldoen aan $2x+5 \geq 4x+3$. Antwoord: $x \in]-\infty, 1]$

Uitwerking: $2x+5 \geq 4x+3 \Leftrightarrow 5-3 \geq 4x-2x \Leftrightarrow 2 \geq 2x$, en beide leden delen door 2 geeft $1 \geq x$.

2. Welke reële getallen x voldoen aan $-2x \leq -4$. Antwoord: $x \in [2, +\infty[$

Oefening 5.1.2. Onderzoek voor welke $x \in \mathbb{R}$ volgende ongelijkheden gelden.

1. $x^2 - 4 < 0 \iff x \in]-2, 2[$

2. $\dfrac{1}{x^2-4} < 0 \iff x \in]-2, 2[$

3. $\dfrac{1}{4-x^2} > 0 \iff x \in]-2, 2[$

4. $100 - x < 0 \iff x \in]100, +\infty[$

5. $\dfrac{100-x}{x^2-4} < 0 \iff x \in]-2, 2[\cup]100, +\infty[$

6. $\dfrac{100+x}{x^2-4} < 0 \iff x \in]-\infty, -100[\cup]-2, 2[$

7. $-x < 0 \iff x \in]0, +\infty[$

8. $\dfrac{-x}{x^2-4} < 0 \iff x \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[$

5.1.2 Niveau 2

Oefening 5.1.3. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid.

1. $\dfrac{x^2+5x+6}{8-4x} < 0 \iff x \in]-3, -2[\cup]2, +\infty[$

2. $\dfrac{-3x+6}{x^2-x} < 0 \iff x \in]0, 1[\cup]2, +\infty[$

3. $\dfrac{2-x^2}{5(x^2+3)} > 0 \iff x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

Oefening 5.1.4. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid.

1. $2(x^2+1) \leqslant 5x \iff x \in [1/2, 2]$

2. $x^2(x^2+3) < (x+6)(x^2+3) \iff x \in]-2, 3[$

Uitwerking: Omdat $x^2+3 > 0$ kunnen we beide leden van de ongelijkheid hierdoor delen (want $\neq 0$) en blijft de orde bewaard (want > 0). Zo herleiden we de opgave tot de ongelijkheid

$$x^2 - x - 6 < 0.$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Oefeningen ongelijkheden

De nulpunten zijn $x_1 = -2$ en $x_2 = 3$.

x		$x_1 = -2$		$x_2 = -3$	
$x^2 - x - 6$	$+$	0	$-$	0	$+$

De oplossingsverzameling is dus $V =]-2, 3[$

Oefening 5.1.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|x - 4| < 2$. $x \in]2, 6[$

2. $|4 - x| \leq 2$. $x \in [2, 6]$

3. $|3x| < 6$. $x \in]-2, 2[$

4. $|3x - 4| < 5$. $x \in]-\frac{1}{3}, 3[$

5. $|11 - 2x| < 5$. $x \in]3, 8[$

Uitwerking:

$$\begin{array}{rcl} |11 - 2x| & < & 5 \\ & \Updownarrow & \\ -5 < & 11 - 2x & < 5 \\ & \Updownarrow & \\ -16 < & -2x & < -6 \\ & \Updownarrow & \\ 8 > & x & > 3 \end{array}$$

De oplossingsverzameling is dus $V =]3, 8[$.

Als alternatief kan je ook de opgave herschrijven als $|2x - 11| < 5$, dan moet je tijdens de berekening niet delen door het negatieve getal -2.

6. $|3(x - 1)| < 2$. $x \in]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}[$

7. $\left|\frac{1}{3}(1 - x)\right| < 1$. $x \in]-2, 4[$

Uitwerking: De absolute waarde van een product is het product van de absolute waarden: $\left|\frac{1}{3}(1 - x)\right| = \frac{1}{3}|1 - x|$. Bijgevolg kunnen we de hele ongelijkheid met 3 vermenigvuldigen om te vinden dat $|1 - x| < 3$. De eigenschap uit de hint zegt dan dat dit overeenkomt met $-3 < 1 - x < 3 \Leftrightarrow -4 < -x < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 4$.

Oefening 5.1.6. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan de gegeven ongelijkheid.

1. $\frac{1}{x} < 3 \iff x \in]-\infty, 0[\cup]1/3, +\infty[$

Uitwerking:

- Ofwel brengen we de term uit het rechterlid naar het linkerlid zodat we vergelijken met nul en lossen de oefening verder op door het tekenverloop van een rationale functie uit te voeren:

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Oefeningen ongelijkheden

$\frac{1}{x} < 3 \iff \frac{1-3x}{x} < 0$

x		0		$\frac{1}{3}$	
$1-3x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{1-3x}{x}$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$

We lezen af dat de oplossingsverzameling $V =]-\infty, 0[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ is.

- Ofwel beginnen we met beide leden te vermenigvuldigen met x. De eerste belangrijke stap is de bestaansvoorwaarde opschrijven. Omdat de noemer gelijk is aan x moet x verschillend zijn van 0: Dit is de bestaansvoorwaarde. We mogen niet zomaar beide leden vermenigvuldigen met x, omdat we het teken van x niet kennen. Hiervoor moeten we een gevalsonderscheid maken.
  Bekijk eerst het geval $x > 0$. In dit geval kunnen we de ongelijkheid herschrijven als $\frac{1}{3} < x$ (aangezien het teken niet verandert). Dus er moet gelden dat $x > \frac{1}{3}$ en $x > 0$ (het huidige geval). Dit levert het interval $\left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ als eerste deel van de oplossingsverzameling.
  Bekijk nu het geval $x < 0$. Dan wisselt het teken en vinden we $\frac{1}{3} > x$. Dus nu moet $x < \frac{1}{3}$ en $x < 0$ (het huidige geval). Dit levert het interval $]-\infty, 0[$ als deel van de oplossingsverzameling.
  We hebben alle mogelijke gevallen gehad, en de oplossingsverzameling is de unie van de halfrechten die we hebben gevonden
  $$V =]-\infty, 0[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[.$$

2. $\frac{x}{x+1} \geq -2 \iff x \in]-\infty, -1[\cup \left[\frac{-2}{3}, +\infty\right[$

Uitwerking: We geven enkel de uitwerking die begint met beide leden vermenigvuldigen met $x+1$, maar je kan de oefening ook oplossen door het tekenverloop te zoeken van een rationale functie. We mogen *niet* zomaar linker- en rechterlid vermenigvuldigen met $x+1$, want we kennen het teken niet van $x+1$. We maken dus een *gevalsonderscheid*:

- Bestaansvoorwaarde: $x \neq -1$.
- $x+1 > 0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x+1$. De ongelijkheid blijft behouden omdat $x+1$ positief is.
  $$\begin{array}{rcll} x & \geq & -2(x+1) & \\ & \Updownarrow & & (\ 2x \text{ optellen}) \\ 3x & \geq & -2 & \\ & \Updownarrow & & (\ \text{delen door } 3) \\ x & \geq & -\frac{2}{3} & \end{array}$$
- $x+1 < 0$: We vermenigvuldigen links en rechts met $x+1$. De ongelijkheid keert om omdat $x+1$ negatief is.
  $$\begin{array}{rcll} x & \leq & -2(x+1) & \\ & \Updownarrow & & (\ 2x \text{ optellen}) \\ 3x & \leq & -2 & \\ & \Updownarrow & & (\ \text{delen door } 3) \\ x & \leq & -\frac{2}{3} & \end{array}$$

Dus

- in het geval dat $x+1 > 0$ (of $x > -1$), dan wordt de ongelijkheid $x \geq -\frac{2}{3}$. Dit levert het interval $\left[\frac{-2}{3}, +\infty\right[$ als eerste deel van de oplossingsverzameling.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Oefeningen ongelijkheden

- in het geval dat $x+1<0$ (of $x<-1$), dan wordt de ongelijkheid $x \leq -\frac{2}{3}$. Dat is natuurlijk automatisch het geval: Als $x<-1$ dan is ook $x \leq -\frac{2}{3}$. Dus, als $x<-1$ dan is automatisch $\frac{x}{x+1} \geq -2$. Dit levert het interval $]-\infty,-1[$ als tweede deel van de oplossingsverzameling.

Dus is de oplossingsverzameling is $V =]-\infty,-1[\cup \left[\frac{-2}{3},+\infty\right[$.

3. $\frac{(x-5)^2}{x-4} < \frac{x-5}{x-4} \iff x \in]-\infty,4[\cup]5,6[$

Uitwerking: Als je de factoren $x-4$ en $x-5$ wil schrappen moet je gevalsonderscheidingen maken. Eenvoudiger is

$$\frac{(x-5)^2}{x-4} < \frac{x-5}{x-4} \iff \frac{(x-5)^2-(x-5)}{x-4} < 0 \iff \frac{(x-5)(x-5-1)}{(x-4)} < 0$$

x		4		5		6	
$x-5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-6$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(x-5)(x-6)}{x-4}$	$-$	|	$+$	0	$-$	0	$+$

De oplossingsverzameling is $V =]-\infty,4[\cup]5,6[$

4. $\frac{2x}{x-1} \leqslant \frac{x}{x-2} \iff x \in [0,1[\cup]2,3]$

5.1.3 Niveau 3

Oefening 5.1.7. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $|\sqrt{x}+3|<9$. $x \in [0,36[$

Uitwerking: De bestaansvoorwaarde is $x \geq 0$. De eenvoudigste manier om deze ongelijkheid op te lossen is opmerken dat we de absolute waardetekens kunnen laten vallen omdat $\sqrt{x}+3$ altijd groter dan nul is, aangezien een vierkantswortel altijd positief is. De ongelijkheid wordt dus eigenlijk $\sqrt{x}<6$, en aangezien beide leden positief zijn kunnen we kwadrateren. Dit geeft dan $x<36$, en zo wordt de oplossingsverzameling $[0,36[$ (waar we de bestaansvoorwaarde ook hebben gebruikt).

2. $|3-\sqrt{x}|<1$. $x \in]4,16[$

Uitwerking: Omdat de vierkantswortel van x genomen wordt hebben we de bestaansvoorwaarde $x \geq 0$. We gebruiken de eigenschap $|x|<r \Leftrightarrow -r<x<r$ en herschrijven de ongelijkheid met de absolute waarde als

$$-1 < 3-\sqrt{x} < 1\,.$$

We trekken van elk lid 3 af

$$-4 < -\sqrt{x} < -2\,.$$

en vermenigvuldigen alles met -1 (let er op dat alle tekens wisselen)

$$4 > \sqrt{x} > 2\,.$$

Dit kunnen we splitsen in 2 ongelijkheden: enerzijds hebben we dat $4>\sqrt{x}$, en anderzijds hebben we dat $\sqrt{x}>2$. In beide gevallen zijn de twee leden positief, zodat we mogen kwadrateren. Dit geeft de twee ongelijkheden $16>x$ en $x>4$. Aan de bestaansvoorwaarde $x \geq 0$ is al zeker voldaan als $x>4$, en dus vinden we als uiteindelijke oplossing $4<x<16$, dus de oplossingsverzameling is $]4,16[$.

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Oefeningen ongelijkheden

3. $\left|\frac{1-\sqrt{4x+1}}{4}\right| < 1.$ $x \in [-\frac{1}{4}, 6[$

Uitwerking: De bestaansvoorwaarde voor de wortel is $4x+1 \geq 0$, oftewel $x \geq -\frac{1}{4}$. We gebruiken $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$, en herschrijven de ongelijkheid hiermee dan als

$$-1 < \frac{1-\sqrt{4x+1}}{4} < 1\,.$$

We vermenigvuldigen elk lid met 4

$$-4 < 1-\sqrt{4x+1} < 4\,,$$

trekken van elk lid 1 af

$$-5 < -\sqrt{4x+1} < 3\,,$$

en vermenigvuldigen alles met -1 (let er op dat alle tekens wisselen)

$$-3 < \sqrt{4x+1} < 5\,.$$

De vierkantswortel is altijd positief, zodat de linkerongelijkheid overbodig wordt. De rechterongelijkheid blijft, maar we kunnen beide leden dan kwadrateren om te vinden dat $4x+1 < 25$, wat herleid kan worden tot $x < 6$. Dit combineren met de bestaansvoorwaarde $\left(x \geq -\frac{1}{4}\right)$ levert dan de oplossingsverzameling $[-\frac{1}{4}, 6[$.

4. $\left|\frac{3+\sqrt{1-x}}{2}\right| < 1$ geen oplossingen

Uitwerking: De bestaansvoorwaarde drukt uit dat wat onder de vierkantswortel positief moet zijn. Dit betekent dat $1-x \geq 0$, oftewel $x \leq 1$. We herschrijven de ongelijkheid met de absolute waarde m.b.v. de eigenschap $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$ als

$$-1 < \frac{3+\sqrt{1-x}}{2} < 1\,,$$

wat we dan kunnen herleiden tot

$$-5 < \sqrt{1-x} < -1\,,$$

door eerst alles te vermenigvuldigen met 2 en er vervolgens 3 van af te trekken. We vinden dus dat de vierkantswortel van een zekere uitdrukking kleiner moet zijn dan een negatief getal, wat uiteraard niet kan aangezien een vierkantswortel altijd positief is. Er voldoet dus geen enkele $x \in \mathbb{R}$ aan de ongelijkheid, en we zeggen dus dat de oplossingsverzameling de lege verzameling $\emptyset$ is.

Je had al direct kunnen zien dat deze ongelijkheid nooit op zou gaan: Wat binnen de absolute waardetekens staat is altijd positief, zodat we deze absolute waardetekens kunnen laten vallen. De ongelijkheid is dan eigenlijk

$$\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{1-x}}{2} < 1\,.$$

Maar hier tellen we iets positief (de wortel gedeeld door 2) op bij $3/2 = 1.5$. De som is dus altijd groter dan 1.5, en dus nooit kleiner dan 1.

Oefening 5.1.8. Onderzoek welke $p > 0$ voldoen aan $\left|\frac{1}{12}\left(7-\sqrt{1+48p}\right)\right| < 1.$ $p \in]0, \frac{15}{2}[$

Uitwerking: Omdat $p > 0$ is $1+48p > 0$ en is er geen bestaansvoorwaarde nodig. We gebruiken de eigenschap $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$ en herschrijven de ongelijkheid als

$$-1 < \frac{1}{12}\left(7-\sqrt{1+48p}\right) < 1$$

CC BY-NC-SA 4.0

5.1 Oefeningen ongelijkheden

We vermenigvuldigen elk lid met 12

$$-12 < 7 - \sqrt{1+48p} < 12$$

en trekken van elk lid 7 af

$$-19 < -\sqrt{1+48p} < 5$$

De rechterongelijkheid is automatisch voldaan. Bij het kwadrateren van de linkerongelijkheid draait het ongelijkheidsteken om (we kwadrateren twee negatieve waarden) en dit geeft

$$1+48p < 361$$
$$p < \frac{15}{2}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Oefeningen logaritme

6.1.1 Niveau 1

Oefening 6.1.1. Bereken (tot 3 cijfers na de komma) met rekenmachine.

1. $\log_2 7 = 2.807$

2. $\log_{0,3} 4 = -1.151$

Oefening 6.1.2. Bereken indien mogelijk de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel. Sommige van deze logaritmen bestaan niet.

1. $\log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = -2$

Uitwerking: $\log_3\left(\frac{1}{3^2}\right) = \log_3\left(3^{-2}\right) = -2$

2. $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

Uitwerking: $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} 2^2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$

3. $\log_1 1 =$ bestaat niet (grondtal=1)

4. $\log \frac{1}{1000} = -3$

Uitwerking: $\log \frac{1}{1000} = \log_{10} \frac{1}{1000} = \log_{10} \frac{1}{10^3} = \log_{10} 10^{-3} = -3$

5. $\ln \sqrt[3]{e^2} = \frac{2}{3}$

Uitwerking: $\ln \sqrt[3]{e^2} = \log_e \sqrt[3]{e^2} = \log_e e^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

6. $\log_6 1 = 0$

Uitwerking: $6^0 = 1$

7. $\log_4 8 = \frac{3}{2}$

Uitwerking: $\log_4 8 = \log_4(4 \cdot 2) = \log_4(4^1 \cdot 4^{\frac{1}{2}}) = \log_4 4^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

8. $\log_3(-3)^6 = 6$

Uitwerking: $\log_3(-3)^6 = \log_3 3^6 = 6$ (Merk op dat $(-3)^6 = 3^6$ een strikt positief getal is.)

9. $\log_{-3}(-3)^6 =$ bestaat niet (grondtal< 0)

Oefening 6.1.3. Zij $a, b, c > 0$. Schrijf in functie van $\log a$, $\log b$ en $\log c$.

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Oefeningen logaritme

1. $\log \dfrac{a}{b^4} = \log a - 4\log b$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\log \frac{a}{b^4} &= \log a - \log b^4 \\ &= \log a - 4 \cdot \log b\end{aligned}$$

2. $\log\left(c^3\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right) = 3\log c + \dfrac{1}{2}\log a - \dfrac{1}{2}\log b$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\log\left(c^3\sqrt{\frac{a}{b}}\right) &= \log c^3 + \log\sqrt{\frac{a}{b}} \\ &= 3 \cdot \log c + \frac{1}{2} \cdot \log \frac{a}{b} \\ &= 3 \cdot \log c + \frac{1}{2} \cdot \log a - \frac{1}{2} \cdot \log b\end{aligned}$$

3. $\log \dfrac{a^4bc}{\sqrt{bc^2}} = 4\log a + \dfrac{1}{2}\log b$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\log \frac{a^4bc}{\sqrt{bc^2}} &= \log(a^4bc) - \log\sqrt{bc^2} \\ &= \log a^4 + \log b + \log c - \frac{1}{2} \cdot \log(bc^2) \\ &= \log a^4 + \log b + \log c - \frac{1}{2}(\log b + \log c^2) \\ &= 4 \cdot \log a + \log b + \log c - \frac{1}{2} \cdot \log b - \frac{1}{2} \cdot \log c^2 \\ &= 4 \cdot \log a + \log b + \log c - \frac{1}{2} \cdot \log b - \log c \\ &= 4 \cdot \log a + \frac{1}{2} \cdot \log b\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}\log \frac{a^4bc}{\sqrt{bc^2}} &= \log \frac{a^4bc}{\sqrt{b}\,c} \qquad (\text{omdat } c > 0) \\ &= \log(a^4\sqrt{b}) \\ &= \log a^4 + \log\sqrt{b} \\ &= 4 \cdot \log a + \frac{1}{2} \cdot \log b\end{aligned}$$

Oefening 6.1.4. Schrijf als één logaritme. $(x > 0, y > 0, z > 0)$

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Oefeningen logaritme

1. $2 \cdot \log x - 3 \cdot \log(xy^2) + 5 \cdot \log y = \log \dfrac{1}{xy}$

Uitwerking:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \log x - 3 \cdot \log(xy^2) + 5 \cdot \log y &= \log x^2 - \log(xy^2)^3 + \log y^5 \\ &= \log(x^2y^5) - \log(xy^2)^3 \\ &= \log \frac{x^2y^5}{(xy^2)^3} \\ &= \log \frac{x^2y^5}{x^3y^6} \\ &= \log \frac{1}{xy} \end{aligned}$$

2. $\dfrac{1}{2} \cdot \log_3\left(\dfrac{y}{x}\right) - \log_3 \sqrt{\dfrac{x}{y}} = \log_3 \dfrac{y}{x}$

Uitwerking:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \log_3\left(\frac{y}{x}\right) - \log_3 \sqrt{\frac{x}{y}} &= \log_3 \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - \log_3 \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_3 \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \log_3 \left(\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \log_3 \frac{y}{x} \end{aligned}$$

3. $\log_5(xy) - \log_5(yz) + \log_5(zx) = \log_5 x^2$

Uitwerking:

$$\begin{aligned} \log_5(xy) - \log_5(yz) + \log_5(zx) &= \log_5(x^2yz) - \log_5(yz) \\ &= \log_5 \frac{x^2yz}{yz} \\ &= \log_5 x^2 \end{aligned}$$

6.1.2 Niveau 2

Oefening 6.1.5. Bereken zonder rekenmachine.

1. $\log_2 64 = 6$

2. $\log_5 125 = 3$

3. $\log_2 \dfrac{1}{32} = -5$

4. $\log_6(36\sqrt{6}) = \dfrac{5}{2}$

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Oefeningen logaritme

5. $\log 0,00001 = -5$

6. $\log_4\left(\log_4 \sqrt[4]{4}\right) = -1$

Uitwerking: $\log_4\left(\log_4 \sqrt[4]{4}\right) = \log_4\left(\log_4 4^{\frac{1}{4}}\right) = \log_4\left(\frac{1}{4}\right) = \log_4 4^{-1} = -1$

Oefening 6.1.6. Schrijf elke uitdrukking in functie van $\log x$, $\log(x-5)$ en $\log(x+1)$.

1. $\log \dfrac{x(x+1)}{x-5} = \log x + \log(x+1) - \log(x-5)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\log \frac{x(x+1)}{x-5} &= \log\big(x(x+1)\big) - \log(x-5)\\ &= \log x + \log(x+1) - \log(x-5)\end{aligned}$$

2. $\log\left((x+1)^2\sqrt{x-5}\right) = 2\log(x+1) + \dfrac{1}{2}\log(x-5)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\log\left((x+1)^2\sqrt{x-5}\right) &= \log(x+1)^2 + \log\sqrt{x-5}\\ &= 2\cdot\log(x+1) + \frac{1}{2}\cdot\log(x-5)\end{aligned}$$

3. $\log\sqrt{\dfrac{x-5}{x^3(x+1)}} = \dfrac{1}{2}\log(x-5) - \dfrac{3}{2}\log x - \dfrac{1}{2}\log(x+1)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\log\sqrt{\frac{x-5}{x^3(x+1)}} &= \frac{1}{2}\cdot\log\frac{x-5}{x^3(x+1)}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\log(x-5) - \frac{1}{2}\cdot\log(x^3(x+1))\\ &= \frac{1}{2}\cdot\log(x-5) - \frac{1}{2}\cdot\log x^3 - \frac{1}{2}\cdot\log(x+1)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\log(x-5) - \frac{3}{2}\cdot\log x - \frac{1}{2}\cdot\log(x+1)\end{aligned}$$

4. $\log\dfrac{1}{(x+1)^2} = -2\log(x+1)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\log\frac{1}{(x+1)^2} &= \log 1 - \log(x+1)^2\\ &= -2\cdot\log(x+1)\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}\log\frac{1}{(x+1)^2} &= \log(x+1)^{-2}\\ &= -2\cdot\log(x+1)\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/20.38)

6.1 Oefeningen logaritme

Oefening 6.1.7. Schrijf elke uitdrukking als één enkele logaritme.

1. $\log(x+1) - \log x^2 + \frac{1}{2}\log(x-3) = \log\left(\frac{(x+1)\cdot\sqrt{x-3}}{x^2}\right)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\log(x+1) - \log x^2 + \frac{1}{2}\log(x-3) &= \log(x+1) - \log x^2 + \log\sqrt{x-3} \\ &= \log\left((x+1)\cdot\sqrt{x-3}\right) - \log x^2 \\ &= \log\left(\frac{(x+1)\cdot\sqrt{x-3}}{x^2}\right)\end{aligned}$$

2. $3 - \log x = \log\frac{10^3}{x}$

Uitwerking:

$$3 - \log x = \log 10^3 - \log x = \log\frac{10^3}{x}$$

3. $5\log(x-1) - \frac{1}{2}\log(x+3) = \log\left(\frac{(x-1)^5}{\sqrt{x+3}}\right)$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}5\log(x-1) - \frac{1}{2}\log(x+3) &= \log(x-1)^5 - \log\sqrt{x+3} \\ &= \log\left(\frac{(x-1)^5}{\sqrt{x+3}}\right)\end{aligned}$$

Oefening 6.1.8. Bereken de volgende logaritmen zonder gebruik te maken van een rekentoestel.

1. $\log 25 + \log 40 = 3$

Uitwerking: $\log 25 + \log 40 = \log(25\cdot 40) = \log 1000 = \log 10^3 = 3$

2. $\log_3 36 - \log_3 4 = 2$

Uitwerking: $\log_3 36 - \log_3 4 = \log_3\frac{36}{4} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

3. $\log_9 25 - \log_3 15 = -1$

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Oefeningen logaritme

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\log_9 25 - \log_3 15 &= \frac{\log_3 25}{\log_3 9} - \log_3 15\\ &= \frac{\log_3 25}{\log_3 3^2} - \log_3 15\\ &= \frac{\log_3 25}{2} - \log_3 15\\ &= \log_3 25^{\frac{1}{2}} - \log_3 15\\ &= \log_3 5 - \log_3 15 = \log_3 \frac{5}{15}\\ &= \log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1}\\ &= -1\end{aligned}$$

Alternatief:
We kunnen de oefening ook oplossen door alle logaritmes te schrijven met grondtal 9:

$\log_3 15 = \dfrac{\log_9 15}{\log_9 3} = \dfrac{\log_9 15}{\log_9 9^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\log_9 15}{\frac{1}{2}} = 2\log_9 15 = \log_9 15^2 = \log_9 225$ zodat

$$\begin{aligned}\log_9 25 - \log_3 15 &= \log_9 25 - \log_9 225\\ &= \log_9 \frac{25}{225}\\ &= \log_9 \frac{1}{9}\\ &= \log_9 9^{-1} = -1\end{aligned}$$

4. $\ln 108 - 2\cdot \ln 6 + \ln\left(\dfrac{e}{3}\right) = 1$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\ln 108 - 2\cdot \ln 6 + \ln\left(\frac{e}{3}\right) &= \ln 108 - \ln 6^2 + \ln\left(\frac{e}{3}\right)\\ &= \ln 108 - \ln 36 + \ln\left(\frac{e}{3}\right)\\ &= \ln\left(\frac{108}{36}\right) + \ln\left(\frac{e}{3}\right)\\ &= \ln\left(\frac{108}{36}\cdot\frac{e}{3}\right)\\ &= \ln e = 1\end{aligned}$$

Oefening 6.1.9. Bereken zonder gebruik te maken van een rekentoestel.

1. $e^{3\ln 2} = 8$

Uitwerking: $e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = 2^3 = 8$

2. $4^{\log_2 3} = 9$.

Uitwerking: $4^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3} = 2^{2\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9$ want $2^{\log_2 3} = 3$

3. $27^{\log_3 2} = 8$.

Uitwerking: $27^{\log_3 2} = 3^{3\log_3 2} = 2^3 = 8$

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Oefeningen logaritme

Oefening 6.1.10. Schrijf als één logaritme. Je mag het grondtal zelf kiezen. $(x > 0, y > 0)$

1. $\log_3 x + \log_9 x + \log_{\frac{1}{3}} x = \log_3 \sqrt{x}$

Uitwerking: Met grondtal 3:

$$\begin{aligned}\log_3 x + \log_9 x + \log_{\frac{1}{3}} x &= \log_3 x + \frac{\log_3 x}{\log_3 9} + \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} \\ &= \log_3 x + \frac{\log_3 x}{2} - \log_3 x \\ &= \frac{\log_3 x}{2} = \log_3 \sqrt{x}\end{aligned}$$

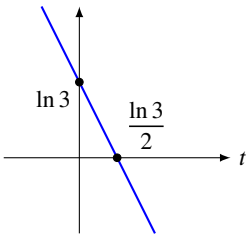
2. $\log_5(4xy) - \log_{\frac{1}{5}}(4xy) = \log_5(16x^2y^2)$

Uitwerking: Met grondtal 5:

$$\begin{aligned}\log_5(4xy) - \log_{\frac{1}{5}}(4xy) &= \log_5(4xy) - \frac{\log_5(4xy)}{\log_5 \frac{1}{5}} \\ &= \log_5(4xy) + \log_5(4xy) \\ &= 2 \cdot \log_5(4xy) = \log_5(16x^2y^2)\end{aligned}$$

Oefening 6.1.11. Schets de grafiek van de functie $\ln C(t)$ met $C(t) = 3e^{-2t}$.

Uitwerking: $\ln C(t) = \ln(3e^{-2t}) = \ln 3 + \ln e^{-2t} = \ln 3 - 2t$. Dit is een lineaire functie van de vorm $f(t) = at + b$, met richtingscoëfficiënt $a = -2$ en nulpunt $-\frac{b}{a} = \frac{\ln 3}{2}$.



Oefening 6.1.12. Een geluid, geproduceerd met een intensiteit van I watt/m^2, levert volgend geluidsniveau

$$\text{dB-niveau} = 10\ \log_{10}(10^{12} I)\ \text{dB}.$$

1. Toon aan dat als je de intensiteit van je stereo verdubbelt, het geluidsniveau slechts met ongeveer 3 dB verhoogt.

Uitwerking: $10\log(2I10^{12})$ dB $= 10\log 2$ dB $+ 10\log(I10^{12})$ dB $= 3$ dB $+ 10\log(I10^{12})$ dB

2. Met welke factor moet je de intensiteit vermenigvuldigen opdat het geluidsniveau met 10 dB vermeerdert.

I moet met een factor 10 vermenigvuldigd worden.

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Oefeningen logaritme

6.1.3 Niveau 3

Oefening 6.1.13.

1. Schrijf onderstaande uitdrukking in functie van $\log(k-1)$, $\log k$ en $\log(k+1)$.

$$\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \log(k-1)+\log(k+1)-2\log k$$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \log\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)\\ &= \log(k^2-1)-\log k^2\\ &= \log((k-1)\cdot(k+1))-2\cdot\log k\\ &= \log(k-1)+\log(k+1)-2\cdot\log k\end{aligned}$$

Oefening 6.1.14.

1. Stel dat y impliciet gegeven is als functie van t door volgende formule:

$$k\cdot t = \frac{1}{3}[\ln(y-2)-\ln(y-5)]$$

Hierin is k een strikt positieve parameter.
Toon aan dat $y = \dfrac{5-2e^{-3kt}}{1-e^{-3kt}}$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}k\cdot t &= \frac{1}{3}[\ln(y-2)-\ln(y-5)]\\ 3k\cdot t &= \ln\left(\frac{y-2}{y-5}\right)\\ e^{3k\cdot t} &= \frac{y-2}{y-5}\\ (y-5)\cdot e^{3k\cdot t} &= y-2\\ y\cdot(e^{3k\cdot t}-1) &= 5\cdot e^{3k\cdot t}-2\\ y &= \frac{5\cdot e^{3k\cdot t}-2}{e^{3k\cdot t}-1}\\ y &= \frac{5-2e^{-3kt}}{1-e^{-3kt}}\end{aligned}$$

Oefening 6.1.15.

1. Zij $a,b,c,d>0$. Toon aan dat $\log\frac{a}{b}-\log\frac{c}{d} = -\log\frac{b}{d}+\log\frac{a}{c}$

Uitwerking: Om deze gelijkheid aan te tonen vertrekken we van het linkerlid en passen hierop achtereen-

CC BY-NC-SA 4.0

6.1 Oefeningen logaritme

volgens rekenregels toe om zo aan te tonen dat dit gelijk is aan het rechterlid.

$$\begin{aligned}\log\frac{a}{b}-\log\frac{c}{d} &= \log a-\log b-\log c+\log d\\ &= -(\log b-\log d)+(\log a-\log c)\\ &= -\log\frac{b}{d}+\log\frac{a}{c}\end{aligned}$$

2. Zij $a,b>0$. Toon aan dat $-\log\frac{2}{a}+\log\frac{2}{b}=-\log\frac{b}{a}$

Uitwerking: Om deze gelijkheid aan te tonen vertrekken we van het linkerlid en passen hierop achtereenvolgens rekenregels toe om zo aan te tonen dat dit gelijk is aan het rechterlid.

$$\begin{aligned}-\log\frac{2}{a}+\log\frac{2}{b} &= -\log 2+\log a+\log 2-\log b\\ &= \log a-\log b\\ &= -(\log b-\log a)\\ &= -\log\frac{b}{a}\end{aligned}$$

Alternatief:

$$\begin{aligned}-\log\frac{2}{a}+\log\frac{2}{b} &= \log\frac{\frac{2}{b}}{\frac{2}{a}}\\ &= \log\frac{a}{b}\\ &= \log\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}\\ &= -\log\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

7.1 Oefeningen groeimodellen en exponentiële en logaritmische functies

7.1.1 Niveau 1

CC BY-NC-SA 4.0

7.1 Oefeningen groeimodellen en exponentiële en logaritmische functies

Oefening 7.1.1. Elk schooljaar daalt de prijswaarde van een handboek wiskunde. Concreet verkoopt een leerling zijn handboek aan een leerling van een lager jaar voor $\frac{2}{3}$ van de prijs die hijzelf een jaar voordien voor het boek heeft betaald. Met andere woorden, de prijs daalt per jaar met $\frac{1}{3}$. Stel dat het handboek wiskunde oorspronkelijk voor 16 euro aangekocht werd in de boekhandel.

1. De groeifactor per tijdseenheid van een jaar $= \frac{2}{3}$

Uitwerking: De beginwaarde is 16 euro. Elk jaar wordt het handboek doorverkocht voor $2/3$ van de prijs. Dat betekent dat na een jaar het handboek doorverkocht wordt voor $16 \cdot \frac{2}{3} \approx 10.66$ euro. De 'groeifactor' is dus $2/3$. Omdat de groeifactor kleiner is dan 1 noemen we dit negatieve groei.

2. Het functievoorschrift voor de prijs p van het handboek in functie van de tijd t in jaren is

$$p(t) = 16\left(\frac{2}{3}\right)^t$$

3. Het handboek wordt na 5 jaar verkocht aan $16\left(\frac{2}{3}\right)^5 \approx 2.11$ euro.

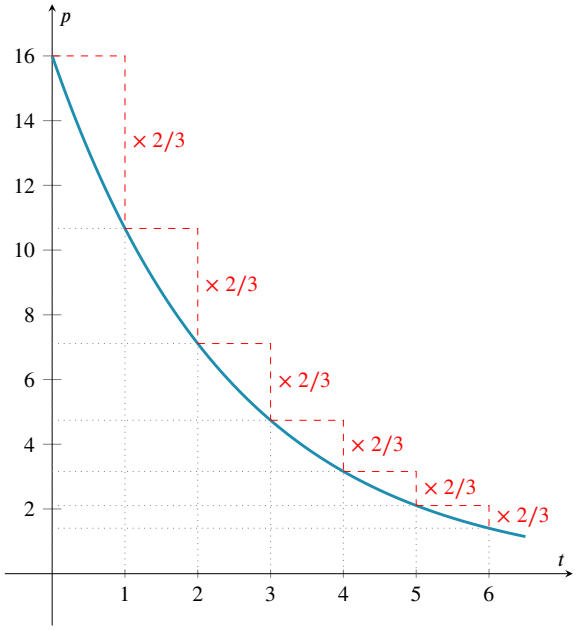
Uitwerking: Om dit te berekenen vullen we $t = 5$ (jaar) in in de formule uit de vorige oefening. We vinden zo dat

$$p(5) = 16\left(\frac{2}{3}\right)^5 \approx 2.11\,.$$

Na 5 jaar wordt het handboek dus doorverkocht voor slechts iets meer dan 2 euro, ten opzichte van de 16 euro waarvan we vertrokken.

4. Maak een grafiek van deze functie voor de 5 eerst jaren.

Uitwerking: De grafiek ziet er uit als volgt. Merk op dat de functie nu dalend is.



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/20.38)

7.1 Oefeningen groeimodellen en exponentiële en logaritmische functies

7.1.2 Niveau 2

Oefening 7.1.2. Men maakt een studie over de bevolking van de stad Oostende. Het stadsbestuur neemt aan dat de bevolking exponentieel groeit. De tellingen zijn begonnen in 1995, maar deze resultaten zijn verloren gegaan. In 1997 waren er ongeveer 68000 inwoners; in 2001 is dit gegroeid tot 73000. Hoeveel mensen waren er, op basis van de gegevens, vermoedelijk in 1995?65630

Uitwerking:

Aangezien de bevolking f exponentieel groeit, zoeken we een voorschrift van de vorm: $f(t) = b \cdot g^t$.
Stel $t = 0$ in 1997. We kiezen 1997 dus als referentiejaar. We drukken t uit in jaren (dit kan je kiezen, maar je moet consequent zijn). Dan volgt dat $b = f(0) = 68000$.
We kennen ook het aantal inwoners (73000) in 2001, 4 jaar na 1997, zodat $f(4) = 68000 \cdot g^4 = 73000$. Hieruit volgt dat $g = \sqrt[4]{\frac{73}{68}}$.
Om nu het aantal inwoners in 1995 te berekenen, moeten we 2 jaar vroeger dan 1997 gaan kijken. We berekenen dus het aantal inwoners op het tijdstip $t = -2$ (jaar). Het aantal inwoners in 1995 komt dan overeen met $f(-2) = 68000 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{73}{68}}\right)^{-2} = 65630$.
Merk op dat we dus met een groeiproces ook 'het verleden kunnen reconstrueren'. We kunnen niet alleen voorspellingen doen over de toekomst, maar onder de veronderstelling dat het groeiproces altijd van dezelfde aard is geweest kunnen we ook de situatie een tijd terug berekenen.

Oefening 7.1.3. Op een spaarrekening met samengestelde intrest - waarbij de intrest dus maandelijks wordt toegevoegd aan het kapitaal - hebben je ouders bij je geboorte een startkapitaal van 20000 euro gezet. De rente bedroeg $0,12\%$ per maand.

1. Hoeveel geld stond er na 6 maanden op die rekening? 20144.43

Uitwerking: We hebben de procentuele toename gegeven per maand, en kunnen dus de groeifactor per maand berekenen:

$$g = \left(1 + \frac{0.12}{100}\right) = 1 + 0.0012 = 1.0012$$

Als we t in maanden uitdrukken en $f(t)$ het kapitaal voorstelt op ogenblik t, hebben we:

$$f(t) = 20000 \cdot (1.0012)^t$$

Dan kunnen we ook het kapitaal na 6 maand berekenen als $20000 \cdot (1.0012)^6 = 20144.43$.

2. Hoeveel bedroeg de rentevoet (procentueel) per jaar? 1.45

Uitwerking: De rentevoet per jaar komt overeen met de procentuele groei over 12 maanden.

Als het kapitaal over één tijdseenheid (= 1 maand) groeit met een groeifactor $g = 1.0012$, dan groeit het met een factor $g^{12} = (1.0012)^{12} \approx 1.0145$ over 1 jaar.
We kunnen 1.0145 schrijven als $1 + \frac{1.45}{100}$. De (procentuele) rentevoet per jaar is dus 1.45%.

3. Hoeveel stond er op de spaarrekening na 10 jaar? 23095.69

Uitwerking: 10 jaar komt overeen met 120 maanden. Bijgevolg is het kapitaal na 10 jaar gelijk aan $f(120) = 20000 \cdot (1.0012)^{120} \approx 23095.69$ euro.
We hebben hiervoor ook de rentevoet per jaar berekend, en zouden dit kapitaal na 10 jaar ook met behulp van deze rentevoet kunnen berekenen als

$$20000\left(1 + \frac{1.45}{100}\right)^{10} \approx 23096.73\,.$$

Het kleine verschil in de uitkomsten is te wijten aan het feit dat ons antwoord van 1.45 % afgerond was tot op twee cijfers na de komma, en dus niet exact.

CC BY-NC-SA 4.0

7.1 Oefeningen groeimodellen en exponentiële en logaritmische functies

Oefening 7.1.4. Los $2^{3x-5} = 5^x$ op naar x. $x \approx 7.37$

Uitwerking: We nemen van bijvoorbeeld van beide leden de ln:

$$\begin{aligned}(3x-5)\ln 2 &= x\ln 5\\ x(3\ln 2 - \ln 5) &= 5\ln 2\\ x &= \frac{5\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5}\\ &= \frac{5\ln 2}{\ln \frac{2^3}{5}}\\ &= \frac{5\ln 2}{\ln 8/5}\\ &\approx 7.37\end{aligned}$$

Oefening 7.1.5. Onderzoek welke $x \in \mathbb{R}$ voldoen aan

1. $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ $x = \ln 2$

2. $e^x - 4e^{-x} = 3$ $x = \ln 4$

Oefening 7.1.6. De vergelijking $4^x - 5 \cdot 2^x = 24$ werd opgelost naar x. Toch klopt de oplossing niet als we deze terug invullen in de vergelijking. Zoek de fout in de redenering.

$$\begin{aligned}2^{2x} - 5 \cdot 2^x &= 24\\ \log_2 2^{2x} - \log_2(5 \cdot 2^x) &= \log_2 24\\ 2x - \log_2 5 - \log_2 2^x &= \log_2 24\\ 2x - \log_2 5 - x &= \log_2 24\\ x &= \log_2 24 + \log_2 5\\ x &= \log_2(24 \cdot 5)\\ x &= \log_2 120\end{aligned}$$

Hoe kan je deze vergelijking wel oplossen? De juiste oplossing is $x = 3$

Uitwerking: Om van de eerste naar de 2de regel over te gaan heeft men op beide leden de functie $\log_2$ toegepast (maar deze stap is niet genoteerd):

$$\log_2(2^{2x} - 5 \cdot 2^x) = \log_2 24$$

Om hiervan naar de 2de regel te gaan heeft men een niet bestaande rekenregel gebruikt:

$$\log_2(2^{2x} - 5 \cdot 2^x) \neq \log_2 2^{2x} - \log_2(5 \cdot 2^x)$$

Je kan deze oefening oplossen door ze te zien als een vierkantsvergelijking: stel $y = 2^x$ dan wordt de vergelijking $y^2 - 5y - 24 = 0$. Deze heeft als oplossingen $y = 8$ en $y = -3$. We zoeken de oplossingen voor x: $2^x = 8$ geeft als oplossing $x = 3$ en $2^x = -3$ heeft geen oplossing.

Oefening 7.1.7. Jodium 131 heeft een halveringstijd van 8 dagen d.w.z. dat de hoeveelheid radioactieve massa jodium 131 na 8 dagen slechts de helft van de oorspronkelijke hoeveelheid bedraagt.

1. De groeifactor per tijdseenheid van een dag $= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}}$

CC BY-NC-SA 4.0

7.1 Oefeningen groeimodellen en exponentiële en logaritmische functies

2. Geef het functievoorschrift dat deze groeifunctie beschrijft in de vorm $f(t) = b_0 \cdot g^t$, waarbij t gemeten wordt in dagen en we de beginwaarde van de radioactieve massa noteren we met b_0.

$f(t) = b_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}} = b_0\, 2^{-\frac{t}{8}}$

3. Geef het functievoorschrift dat deze groeifunctie beschrijft in de vorm $f(t) = b_0 \cdot e^{-\lambda t}$ met $\lambda > 0$, waarbij t gemeten wordt in dagen en we de beginwaarde van de radioactieve massa noteren we met b_0.

$f(t) = b_0\, e^{-\frac{\ln 2}{8} t}$

4. Wanneer is de hoeveelheid jodium 131 gedaald tot $1/20$ van de oorspronkelijke hoeveelheid?

Na 34.5 dagen.

Oefening 7.1.8. Het CO_2 dat in de atmosfeer voorkomt, bevat het stabiele ^{12}C en de radioactieve isotoop ^{14}C die een halveringstijd van 5730 jaar heeft. Wetenschappers nemen aan dat de verhouding van de hoeveelheden ^{14}C en ^{12}C in de CO_2 van de atmosfeer nagenoeg constant is. Noem die verhouding R_0. Levende planten absorberen CO_2 uit de lucht en daarom is de verhouding tussen ^{14}C en ^{12}C in een levende plant hetzelfde als in de lucht, nl. R_0. Wanneer een plant afsterft, stopt de absorptie van CO_2. Het stabiele ^{12}C blijft in de plant, terwijl het radioactieve ^{14}C exponentieel vervalt.

1. Geef het functievoorschrift van de grootheid $R(t)$ die de verhouding is van de hoeveelheid ^{14}C t.o.v. ^{12}C in de plantenresten t jaar na het afsterven van de plant.

$R(t) = R_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = R_0 e^{-\frac{(\ln 2)\, t}{5730}}$

2. Een archeoloog vindt een fossiel waarvan de verhouding van de hoeveelheid ^{14}C t.o.v. ^{12}C 1/5 is van die in de atmosfeer. Hoe oud is dat fossiel?

13 304.6 jaar.

7.1.3 Niveau 3

Oefening 7.1.9.

1. Geef de formule voor de procentuele groei p per tijdseenheid in functie van een gegeven groeifactor g: $p = 100 \cdot (g - 1)$

Uitwerking: De formule uit vorige eigenschap $g = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ herschrijven levert $p = 100 \cdot (g - 1)$.

2. Geef de formule voor de procentuele groei q per n tijdseenheden in functie van een gegeven groeifactor g (met $n \in \mathbb{N}$). $q = 100 \cdot (g^n - 1)$

Uitwerking: De groeifactor per tijdseenheid is g, en dus groeit de functie per n tijdseenheden met factor g^n. We herschrijven de formule uit vorige eigenschap:

$$g^n = \left(1 + \frac{q}{100}\right) \Leftrightarrow q = 100 \cdot (g^n - 1).$$

3. Geef een formule voor het verband tussen een procentuele groei p per maand en q per jaar. $q = 100 \cdot \left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12} - 1\right)$

CC BY-NC-SA 4.0

7.1 Oefeningen groeimodellen en exponentiële en logaritmische functies

Uitwerking: We brengen de formules uit vorige 2 oefeningen samen. Als een functie met een factor g groeit over 1 maand, dan groeit deze met een factor g^{12} over een jaar (12 maanden). We vinden dan dat

$$g = 1 + \frac{p}{100} \qquad \text{en} \qquad g^{12} = 1 + \frac{q}{100}$$

Hieruit volgt

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12} = 1 + \frac{q}{100}.$$

Hieruit kunnen we bijvoorbeeld q afzonderen:

$$q = 100 \cdot \left(\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12} - 1\right).$$

Oefening 7.1.10. Enkele jaren geleden werd, n.a.v. een economische missie in China, in het VRT-journaal beweerd dat de economie van China jaarlijks met 14 % groeit, en dat dit betekent dat de Chinese economie dus binnen 7 jaar verdubbeld zal zijn.

1. Welke berekening werd wellicht gemaakt om van de 14 % jaarlijkse groei tot een verdubbeling na 7 jaar te komen? De VRT journalist denkt dat de procentuele groei na 7 jaar gelijk is aan $7 \cdot 14\,\% = 98\,\% \approx 100\,\%$.

2. Wat is het functievoorschrift van de groeifunctie $f(t)$ die de grootte van de Chinese economie voorstelt? Noteer hierbij de waarde van f voor $t = 0$ als $f(0)$. $f(t) = f(0) \cdot (1,14)^t$

Uitwerking: De groeifactor is $g = 1 + 14/100 = 1.14$. De groeifunctie is dus $f(t) = f(0) \cdot (1,14)^t$.

3. Wat zal - in de veronderstelling dat de groei aan hetzelfde tempo blijft toenemen - de procentuele groei werkelijk zijn na 7 jaar? Ongeveer 150%.

Uitwerking: We berekenen dat

$$f(7) = f(0)(1,14)^7 \approx f(0) \cdot 2.5\,.$$

Dus, na 7 jaar is de economie met ongeveer 2.5 vermenigvuldigd. Om de procentuele groei dan te berekenen, rekenen we

$$q = 100 \cdot (g^7 - 1) \approx 100 \cdot (2.5 - 1) = 150.$$

Bijgevolg is de economie na 7 jaar met ongeveer 150% toegenomen, eerder dan met ongeveer 100%.

4. Met welke factor groeit de economie na 4, 5, 6 en 7 jaar? Tussen welke van deze waarden treedt de verdubbeling werkelijk op?

De economie groeit na 4,5,6 en 7 jaar met een factor:
$(1,14)^4 \approx 1.69$
$(1,14)^5 \approx 1.92$
$(1,14)^6 \approx 2.19$
$(1,14)^7 \approx 2.50$
De verdubbeling gebeurt dus tussen het 5de en het 6de jaar.

Oefening 7.1.11. Je maakt een avontuurlijke reis door Afrika, in een zone met hoog risico voor malaria-besmetting en slikt daarom regelmatig pilletjes met antistoffen. Op een dag word je echter bestolen; niet alleen ben je al je geld kwijt, maar bovendien ook je hele voorraad pilletjes. Toevallig had je nog één dosis (500 mg) antistoffen in je broekzak zitten. Je hebt op dat ogenblik, als gevolg van wekenlange inname, 1000 mg antistoffen in je bloed. Laten we veronderstellen dat je pas gevaar loopt besmet te raken wanneer de hoeveelheid antistoffen in het bloed kleiner wordt dan 750 mg. Voorlopig is er dus niets aan de hand. Je lichaam verwijdert deze vreemde stoffen echter geleidelijk

CC BY-NC-SA 4.0

7.1 Oefeningen groeimodellen en exponentiële en logaritmische functies

— met een halveringstijd van 3 weken — dus vroeg of laat onstaat er een reële kans op besmetting. Beschouw de volgende twee mogelijkheden:

(a) Je neemt onmiddellijk die laatste dosis in.

1. De totale hoeveelheid antistoffen komt daarmee op 1500 mg.

2. Hiermee kan je nog gedurende 21 dagen boven de kritische drempel van 750 mg kan blijven.

(b) Je stelt de inname van die laatste dosis nog even uit: je wacht namelijk tot je de kritische waarde een eerste maal bereikt, en slikt pas dan je laatste pilletje.

3. Je bereikt de drempel van 750 mg na ongeveer 8.72 dagen.

4. Daarna kan je opnieuw een tijdje verder, nl. nog 15.48 dagen, vooraleer je antistof-peil onherroepelijk onder de 750 mg duikt.

Wat is het verstandigst, onmiddellijke of uitgestelde inname?

Uitwerking: (a) Directe inname beschermt 21 dagen.
(b) Uitgestelde inname beschermt 24,2 dagen.

CC BY-NC-SA 4.0

8.1 Oefeningen vectoren en matrices

8.1.1 Niveau 1

Oefening 8.1.1. Bereken

1. $(2,1)+(1,-1) = (3,0)$
2. $2\cdot(2,1) = (4,2)$
3. $-(1,-1) = (-1,1)$

Oefening 8.1.2.

1. $(2,1)\cdot(1,-1) = 1$
2. $(1,2,3)\cdot(-2,1,0) = 0$
3. Juist ✓ $(1,2,3)\perp(-2,1,0)$?

Oefening 8.1.3.

1. Bereken $A+B$ en $5A$ voor de matrices $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&5\\-2&3\end{bmatrix}$ en $B=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\\2&1\end{bmatrix}$.

$$A+B=\begin{bmatrix}2&-1\\2&5\\0&4\end{bmatrix},\ 5A=\begin{bmatrix}5&0\\10&25\\-10&15\end{bmatrix}.$$

Uitwerking: Beide matrices zijn 3×2 matrices, en je kan ze dus bij elkaar optellen. De optelling en scalaire vermenigvuldiging gebeuren per component.

$$A+B=\begin{bmatrix}2&-1\\2&5\\0&4\end{bmatrix},\ 5A=\begin{bmatrix}5&0\\10&25\\-10&15\end{bmatrix}.$$

2. Bereken het matrix-vector-product Ab voor $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}$ en $b=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$.

$$Ab=\begin{bmatrix}5\\14\end{bmatrix}$$

Uitwerking: Het aantal kolommen van de matrix A is gelijk aan het aantal rijen van de kolomvector b, namelijk 3, zodat we het product Ab kunnen uitwerken.

$$Ab=\begin{bmatrix}5\\14\end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Oefeningen stelsels

8.2.1 Niveau 1

Oefening 8.2.1. Schrijf de volgende lineaire stelsels in matrixvorm

1. $\begin{cases} 2u+v &= 5 \\ 4u+2v &= 1 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{cases} 2u+v &= 5 \\ 4u+2v &= u \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{cases} 2u &= 5 \\ 2v &= 1 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Oefening 8.2.2. Staan volgende matrices in rijcanonieke vorm (of ook: gereduceerde echelonvorm)?

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja ✓

Feedback: want aan alle voorwaarden voor de rijcanonieke vorm is voldaan.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Nee ✓

Feedback: want boven de spil in de derde rij zijn er nog niet-nul elementen. Voor de rijcanonieke vorm moeten alle elementen boven en onder de spilelementen nul zijn.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja ✓

Feedback: want aan alle voorwaarden voor de rijcanonieke vorm is voldaan.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ Nee ✓

Feedback: want een element onder de spil van de tweede rij is niet nul. Voor de rijcanonieke vorm moeten alle elementen boven en onder de spilelementen nul zijn.

5. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Nee ✓

Feedback: want een element onder de spil van de tweede rij is niet nul. Voor de rijcanonieke vorm moeten alle elementen boven en onder de spilelementen nul zijn.

6. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Ja ✓

Feedback: want aan alle voorwaarden voor de rijcanonieke vorm is voldaan.

8.2.2 Niveau 2

Oefening 8.2.3. Welke van de volgende stelsels zijn lineair in de onbekenden u en v?

1. Lineair✓ $\begin{cases} (u+2)u - u^2 &= 5 \\ 4u+2v &= 1 \end{cases}$

Uitwerking:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Niet lineair✓ $\begin{cases} \sin(u) + \cos(v) &= 1 \\ \sin(u) - 2\cos(v) &= 1/2 \end{cases}$

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Oefeningen stelsels

Uitwerking: Het stelsel is niet lineair omdat de sinus en cosinus van de onbekende voorkomen.

3. Niet lineair✓ $\begin{cases} u^2+v &= 1 \\ -u^2-2v &= 2 \end{cases}$

Uitwerking: Het stelsel is niet lineair omdat er kwadraten van de onbekende voorkomen.

4. Lineair✓ $\begin{cases} au+2v &= 5 \\ 4u+bv &= 1 \end{cases}$ (met $a, b \in \mathbb{R}$)

Uitwerking:

$$\begin{bmatrix} a & 2 \\ 4 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dit is een stelsel met zogenaamde *parameters* a en b.

5. Lineair✓ $\begin{cases} x^3u+\cos(y)v &= 5 \\ 4u+x^3v &= 1 \end{cases}$ (met $x, y \in \mathbb{R}$)

Uitwerking:

$$\begin{bmatrix} x^3 & \cos(y) \\ 4 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dit stelsel is lineair in u en v, maar natuurlijk niet lineair in x en y.

Oefening 8.2.4. Schrijf de volgende stelsels in matrixvorm. Bepaal de oplossingenverzameling door met de eliminatiemethode van Gauss de uitgebreide matrix in rijgereduceerde echelonvorm te brengen.

1. $S_1 = \begin{cases} 3x & -2y & +z & = 4 \\ 3x & +y & -z & = 2 \\ x & & +3z & = 1 \end{cases}$ $\text{Opl}(S_1) = \left\{ \left(\frac{25}{28}, \frac{-9}{14}, \frac{1}{28} \right) \right\}$

Uitwerking: In matrixvorm wordt het stelsel

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

met uitgebreide coëfficiëntenmatrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Oefeningen stelsels

Rijreduceren met de methode van Gauss kan als volgt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -1 \\ 0 & -2 & -8 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & -28 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{-1}{28} R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{28} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 - 3R_3]{R_2 \to R_2 + 10R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{28} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-18}{28} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{28} \end{array}\right]$$

Er is dus een unieke oplossing: $\text{Opl}(S_1) = \left\{\left(\frac{25}{28}, \frac{-9}{14}, \frac{1}{28}\right)\right\}$

2. $S_2 = \left\{\begin{array}{rl} s + 2t + 3w &= 1 \\ u + 2w &= 2 \\ v - w &= 3 \end{array}\right.$ $\text{Opl}(S_2) = \{(1-2a-3b, a, 2-2b, 3+b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{(1,0,2,3,0) + a(-2,1,0,0,0) + b(-3,0,-2,1,1) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Uitwerking: Let bij deze opgave goed op: er zijn *vijf* variabelen s, t, u, v, w. Bij het opstellen van de coëfficiëntenmatrix moet je dus opletten voor variabelen die niet aanwezig zijn in en bepaalde vergelijking, en op de juiste plaatsen een nul zetten. Hiervoor is het nuttig het stelsel opnieuw uitschrijven op de volgende manier:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrr} s & +2t & & & +3w & = & 1 \\ & & +u & & +2w & = & 2 \\ & & & +v & -w & = & 3 \end{array}\right. \quad \text{of zelfs} \quad \left\{\begin{array}{rrrrrrr} s & +2t & +0u & +0v & +3w & = & 1 \\ 0s & +0t & +u & +0v & +2w & = & 2 \\ 0s & +0t & +0u & +v & -w & = & 3 \end{array}\right.$$

In matrixvorm wordt dit:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

met uitgebreide matrix

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

Deze matrix is echter al in de echelonvorm! We kunnen dus de oplossingen rechtstreeks aflezen.
De tweede en vijfde kolom bevatten geen spil, en dit komt overeen met twee vrije variabelen t en w. Bijgevolg heeft de oplossingsverzameling twee parameters, zeg $t = a$ en $w = b$, met a, b willekeurige reële getallen. De waarden van de gebonden variabelen worden uitdrukkingen met a en b zijn, en worden bepaald door de vergelijkingen. Bijvoorbeeld halen we uit $v - w = 3$, samen met $w = b$, dat $v = 3 + b$ en zo verder. De

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Oefeningen stelsels

oplossingsverzameling is

$$\begin{aligned}\mathrm{Opl}(S_2) &= \{(1-2a-3b, a, 2-2b, 3+b, b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(1,0,2,3,0) + a(-2,1,0,0,0) + b(-3,0,-2,1,1) \mid a,b \in \mathbb{R}\}\ .\end{aligned}$$

3. $S_3 = \left\{ \begin{array}{rrrl} 2x & +y & +z & =1 \\ 4x & +y & +3z & =1 \\ -2x & +2y & +z & =7 \end{array} \right.$ $\mathrm{Opl}(S_3) = \{(-1,2,1)\}$

Uitwerking: In matrixvorm wordt het stelsel

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

met uitgebreide coëfficiëntenmatrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Volgende stappen leiden tot de gereduceerde echelonvorm:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3+2R_1]{R_2 \to R_2-4R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -1R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3-3R_2]{R_1 \to R_1-\frac{1}{2}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{5}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1-R_3]{R_2 \to R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

En dus is de oplossingsverzameling $\mathrm{Opl}(S_3) = \{(-1,2,1)\}$.

4. $S_4 = \left\{ \begin{array}{rrrrl} x & +2y & +z & +4u & =-1 \\ 2x & +4y & +2z & +u & =5 \\ -x & -2y & & -u & =0 \end{array} \right.$ $\mathrm{Opl}(S_4) = \{(1-2a, a, 2, -1) \mid a \in \mathbb{R}\} = \{(1,0,2,-1) + a(-2,1,0,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Uitwerking: In matrixvorm wordt het stelsel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Oefeningen stelsels

met uitgebreide coëfficiëntenmatrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Een mogelijke uitwerking om de gereduceerde echelonvorm te berekenen is als volgt:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to \frac{-1}{7} R_3]{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 - R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

De tweede kolom heeft geen spil, en komt dus overeen met een vrije variabele. De oplossingsverzameling heeft dus één parameter:

$$\text{Opl}(S_4) = \{(1-2a, a, 2, -1) \mid a \in \mathbb{R}\} = \{(1,0,2,-1) + a(-2,1,0,0) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

5. $S_5 = \left\{\begin{array}{rrrl} x & +2y & & = a \\ 4x & +7y & +z & = b \\ -2x & +2y & -6z & = c \end{array}\right.$

voor de gevallen

(a) $(a,b,c) = (0,0,0)$,

(b) $(a,b,c) = (-1,-2,-10)$,

(c) $(a,b,c) = (0,-2,3)$.

(a) $\text{Opl}(S_{5a}) = \{(-2a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$,

(b) $\text{Opl}(S_{5b}) = \{(3-2a, -2+a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$,

(c) $\text{Opl}(S_{5c}) = \emptyset$.

Uitwerking: In matrixvorm wordt het stelsel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Oefeningen stelsels

Je bespaart rekenwerk door eerst voor algemene a, b en c de volgende uitgebreide matrix te rijreduceren:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 4 & 7 & 1 & b \\ -2 & 2 & -6 & c \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3+2R_1]{R_2 \to R_2-4R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b-4a \\ 0 & 6 & -6 & c+2a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & 4a-b \\ 0 & 6 & -6 & c+2a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3-6R_2]{R_1 \to R_1-2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -7a+2b \\ 0 & 1 & -1 & 4a-b \\ 0 & 0 & 0 & -22a+6b+c \end{array}\right]$$

De matrix is nu in rij gereduceerde vorm en we kunnen de drie gevraagde gevallen bespreken:

Geval 1: $(a,b,c) = (0,0,0)$. Dan hebben we de matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De derde kolom heeft geen spil, en dus is z een vrije variabele. Uit bovenstaande matrix vinden we de vergelijkingen $y - z = 0$, en $x + 2z = 0$. De oplossingsverzameling wordt dus:

$$\text{Opl}(S_{51}) = \{(-2a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Geval 2: $(a,b,c) = (-1,-2,-10)$. Dan hebben we de matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

De derde kolom heeft geen spil en komt dus overeen met een vrije variabele. We lezen de vergelijkingen $x + 2z = 3$ en $y - z = -2$ af. De oplossingsverzameling is dus

$$\text{Opl}(S_{52}) = \{(3 - 2a, -2 + a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Geval 3: $(a,b,c) = (0,-2,3)$. Dan hebben we de matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right]$$

Dit is een strijdig stelsel: de laatste vergelijking zegt immers $0 = -9$.

8.2.3 Niveau 3

Oefening 8.2.5. Schrijf $(1,7,0,6)$ als een lineaire combinatie van $(0,2,3,1)$, $(1,-1,1,-1)$ en $(2,1,0,1)$.

$(1,7,0,6) = (0,2,3,1) - 3(1,-1,1,-1) + 2(2,1,0,1)$.

Uitwerking: We zoeken drie reële getallen x, y en z zodat

$$(1,7,0,6) = x(0,2,3,1) + y(1,-1,1,-1) + z(2,1,0,1)\,.$$

Dit kunnen we omzetten naar een stelsel van vier vergelijkingen in de onbekenden x, y en z. Om een vector vergelijking om te zetten naar een stelsel van vergelijkingen, moet je eisen dat de gelijkheid geldt in iedere component. *Een gelijkheid tussen n-vectoren, met onbekende coëfficiënten, kan omgezet worden in een stelsel met n vergelijkingen.* Het aantal kolommen van de coëfficiëntenmatrix hangt af van het aantal onbekenden in de lineaire combinatie.

CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Oefeningen stelsels

We vinden dan

$$S = \begin{cases} & y & +2z & = 1 \\ 2x & -y & +z & = 7 \\ 3x & +y & & = 0 \\ 1x & -y & +z & = 6 \end{cases}$$

We kunnen de oplossing bepalen door de uitgebreide matrix van dit stelsel te rijreduceren:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & -18 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_2]{R_4 \to R_4 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_3]{R_2 \to R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hieruit lezen we onmiddellijk de oplossing af: $x = 1$, $y = -3$ en $z = 2$, en de gezochte lineaire combinatie is dus

$$(1, 7, 0, 6) = (0, 2, 3, 1) - 3(1, -1, 1, -1) + 2(2, 1, 0, 1).$$

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Oefeningen som, faculteit en binomiaalgetal

9.1.1 Niveau 1

Oefening 9.1.1. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{k=2}^{5} k = 14$

Uitwerking: $\sum_{k=2}^{5} k = 2+3+4+5 = 14$

2. $\sum_{k=1}^{3} 10 = 30$

Uitwerking: $\sum_{k=1}^{3} 10 = 10+10+10 = 30$

3. $\sum_{i=2}^{5} (2i+1)^2 = 276$

Uitwerking: $\sum_{i=2}^{5} (2i+1)^2 = 5^2+7^2+9^2+11^2 = 276$

4. $\sum_{m=2}^{4} \frac{20}{m} = \frac{65}{3}$

Uitwerking: $\sum_{m=2}^{4} \frac{20}{m} = \frac{20}{2}+\frac{20}{3}+\frac{20}{4} = \frac{65}{3}$

Oefening 9.1.2. Bereken:

1. $7! = 5040$

Uitwerking: $7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 7\cdot 6\cdot \ldots \cdot 1 = 5040$

2. $6\cdot 5!\cdot 7 = 7!$ (korte formule) $= 5040$ (getal)

3. $\frac{10!}{7!} = 720$

Uitwerking: $\frac{10!}{7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$

4. $\frac{1984!}{1983!} = 1984$

Uitwerking: $\frac{1984!}{1983!} = \frac{1984\cdot \cancel{1983!}}{\cancel{1983!}} = 1984$ (Bereken NIET eerst 1984! en 1983!)

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Oefeningen som, faculteit en binomiaalgetal

Oefening 9.1.3. Vereenvoudig. ($k \in \mathbb{N}$)

1. $\dfrac{(k+1)!}{k!} = k+1$

Uitwerking: $\dfrac{(k+1)!}{k!} = \dfrac{(k+1)k!}{k!} = k+1$

2. $\dfrac{(k+3)!}{k!} = (k+3)(k+2)(k+1)$

Uitwerking: $\dfrac{(k+3)!}{k!} = \dfrac{(k+3)(k+2)(k+1)k!}{k!} = (k+3)(k+2)(k+1)$

9.1.2 Niveau 2

Oefening 9.1.4. Bereken volgende sommen:

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} 2^k = 28$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} 3 = 9$

3. $\displaystyle\sum_{l=1}^{4} (5l-1) = 46$

Oefening 9.1.5. Bereken volgende sommen:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k^3 = 36$

Uitwerking: $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$

2. $\displaystyle\sum_{k=-3}^{3} k^3 = 0$

Uitwerking: $\displaystyle\sum_{k=-3}^{3} k^3 = (-3)^3 + (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 = 0$ (want de termen vallen tegen elkaar weg)

3. $\displaystyle\sum_{k=-30}^{30} k^3 = 0$

Uitwerking: $\displaystyle\sum_{k=-30}^{30} k^3 = (-30)^3 + (-29)^3 + \cdots + 29^3 + 30^3 = 0$ (want de termen vallen tegen elkaar weg)

4. $\displaystyle\sum_{n=-k}^{k} n^3 = 0 \quad (k \in \mathbb{N})$

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Oefeningen som, faculteit en binomiaalgetal

Uitwerking: Zoals hierboven vallen alle termen tegen elkaar weg. Merk op dat hier –enkel om het moeilijk te maken– gekozen is voor n als sommatie-index, en k een willekeurig natuurlijk getal is dat de grenzen aangeeft. Dat is dus anders dan in de vorige voorbeelden.

Oefening 9.1.6. Schrijf volgende sommaties voluit.

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} 2ju_{2j}^2 = 2u_2^2 + 4u_4^2 + 6u_6^2 + 8u_8^2$

Uitwerking:

$$\sum_{j=1}^{4} 2ju_{2j}^2 = 2\cdot 1\cdot u_{2\cdot 1}^2 + 2\cdot 2\cdot u_{2\cdot 2}^2 + 2\cdot 3\cdot u_{2\cdot 3}^2 + 2\cdot 4\cdot u_{2\cdot 4}^2 = 2u_2^2 + 4u_4^2 + 6u_6^2 + 8u_8^2$$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} &= (-1)^0\frac{x^{2\cdot 0+1}}{(2\cdot 0+1)!} + (-1)^1\frac{x^{2\cdot 1+1}}{(2\cdot 1+1)!} + (-1)^2\frac{x^{2\cdot 2+1}}{(2\cdot 2+1)!}\\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5.\end{aligned}$$

Oefening 9.1.7. Schrijf met een sommatieteken:

1. $2+5+10+17+26 = \displaystyle\sum_{k=1}^{5}(k^2+1)$

2. $2+6+12+20+30 = \displaystyle\sum_{k=2}^{6} k(k-1)$

3. $1-3+5-7+9-11+13 = \displaystyle\sum_{k=1}^{7}(-1)^{(k+1)}(2k-1)$

Oefening 9.1.8. Vul aan:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k^2 = \sum_{k=1}^{2} k^2 + 9$

2. $\displaystyle\sum_{m=2}^{5} 4m = 8 + \sum_{m=3}^{5} 4m$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k^2 = \sum_{k=3}^{5}(k-2)^2$

4. $\displaystyle\sum_{k=5}^{14} k^2 = \sum_{l=1}^{10}(l+4)^2$

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Oefeningen som, faculteit en binomiaalgetal

5. $\sum_{m=2}^{5} 2^m = \sum_{p=5}^{8} 2^{p-3}$

6. $\sum_{i=3}^{5} \left(2i^2+3\right) = \sum_{i=3}^{4} \left(2i^2+3\right) + 53$

Uitwerking: Hier moet blijkbaar de laatste term ($i = 5$) worden afgezonderd. Deze term is gelijk aan $2 \cdot 5^2 + 3 = 53$, dus volgt

$$\sum_{i=3}^{5} \left(2i^2+3\right) = \sum_{i=3}^{4} \left(2i^2+3\right) + 53.$$

7. $\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 + (n+2)^2$

Uitwerking: Ook hier moet de laatste term worden afgezonderd.

$$\sum_{k=1}^{n+1}(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 + ((n+1)+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 + (n+2)^2$$

Oefening 9.1.9. Reken onderstaande sommen uit als je weet dat $\sum_{m=4}^{8} x_m = 10$, $\sum_{m=4}^{8} y_m = 15$ en $x_3 = 2$.

1. $\sum_{m=4}^{8} \left(y_m + 3\right) = 30$

Uitwerking: $\sum_{m=4}^{8} \left(y_m + 3\right) = \sum_{m=4}^{8} y_m + \sum_{m=4}^{8} 3 = \sum_{m=4}^{8} y_m + 5 \cdot 3 = 15 + 15 = 30$

2. $\sum_{m=4}^{8} \left(8x_m + 2\right) = 90$

Uitwerking: $\sum_{m=4}^{8} \left(8x_m + 2\right) = 8 \sum_{m=4}^{8} x_m + 5 \cdot 2 = 8 \cdot 10 + 10 = 90$

3. $\sum_{m=3}^{8} \frac{x_m}{4} = 3$

Uitwerking: $\sum_{m=3}^{8} \frac{x_m}{4} = \frac{x_3}{4} + \sum_{m=4}^{8} \frac{x_m}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \sum_{m=4}^{8} x_m = \frac{1}{2} + \frac{10}{4} = 3$

4. $\sum_{k=1}^{6} x_{k+2} = 12$

Uitwerking: $\sum_{k=1}^{6} x_{k+2} \overset{\text{def}}{\underset{m=k+2}{=}} \sum_{m=3}^{8} x_m = x_3 + \sum_{m=4}^{8} x_k = 2 + 10 = 12$

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Oefeningen som, faculteit en binomiaalgetal

Oefening 9.1.10. Vereenvoudig. $(k, m, n \in \mathbb{N}$ met $m \neq 0$, $n < m-1$ en $k+n \geqslant 2)$

1. $\dfrac{m!}{(m-1)!} = m$
2. $\dfrac{(m+4)!}{m!} = (m+4)(m+3)(m+2)(m+1)$
3. $\dfrac{(m-n)!}{(m-n-1)(m-n)} = (m-n-2)!$
4. $\dfrac{(k+n)!}{k+n-1} = (k+n)(k+n-2)!$

Uitwerking: $\dfrac{(k+n)!}{k+n-1} = \dfrac{(k+n)(k+n-1)(k+n-2)!}{k+n-1} = (k+n)(k+n-2)!$

Oefening 9.1.11. Bereken volgende uitdrukkingen.

1. $\binom{5}{1} = 5$
2. $\binom{20}{19} = 20$
3. $\binom{2019}{1302} + \binom{2019}{1301} = \binom{2020}{1302}$
4. $\binom{42}{20} - \binom{42}{22} = 0$

Oefening 9.1.12. Vul aan: $(k, m \in \mathbb{N})$

1. $(k+1)! + k! = (k+2)k!$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}(k+1)! + k! &= (k+1)k! + k! \\ &= ((k+1)+1)\,k! \\ &= (k+2)k!\end{aligned}$$

2. $\dfrac{4}{(m+1)!} - \dfrac{1}{m!} = \dfrac{3-m}{(m+1)!}$
3. $(m+2)! + (m+3)! = (m+2)!(m+4)$

Oefening 9.1.13. Juist of fout? ($n, k, l \in \mathbb{N}_0$ en $l < k$)

1. $(n+4)(n+3)! \stackrel{?}{=} (n+4)!$ — Juist ✓
2. $\dfrac{(n+4)!}{(n+3)} \stackrel{?}{=} (n+3)!$ — Fout ✓
3. $\dfrac{(n+4)!}{(n+4)} \stackrel{?}{=} (n+3)!$ — Juist ✓

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Oefeningen som, faculteit en binomiaalgetal

4. $\frac{(n+4)!}{(n+3)!} \stackrel{?}{=} (n+4)!$ Fout ✓
5. $\frac{(n+4)!}{(n+3)!} \stackrel{?}{=} (n+4)$ Juist ✓
6. $\frac{(n+4)!}{4!} \stackrel{?}{=} n!$ Fout ✓
7. $\frac{(4n)!}{4} \stackrel{?}{=} n!$ Fout ✓
8. $\frac{n!4!}{5!} \stackrel{?}{=} \frac{n!}{5}$ Juist ✓
9. $\frac{n!6!}{(n-1)!5!} \stackrel{?}{=} 6n$ Juist ✓
10. $\frac{k!}{(k+2)!(k-l-1)!} \stackrel{?}{=} \frac{k!(k-l)}{(k+2)!(k-l)!}.$ Juist ✓

Oefening 9.1.14. Juist of fout? ($n,k,l \in \mathbb{N}_0$ en $a,b \in \mathbb{R}$ en $p \in \mathbb{N}$ met $n > p$ en $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$)

1. $\sum_{k=1}^{n}(2+k) \stackrel{?}{=} 2n + \sum_{k=1}^{n} k.$ Juist ✓
2. $\binom{5}{1} \stackrel{?}{=} \binom{5}{4}$ Juist ✓
3. $\binom{2}{0} \stackrel{?}{=} \binom{2}{2}$ Juist ✓
4. $\sum_{k=1}^{n}\left(ak^2+b\right) \stackrel{?}{=} a\sum_{k=1}^{n} k^2 + b$ Fout ✓
5. $\sum_{l=1}^{n+1}(l+1)^2 \stackrel{?}{=} \sum_{l=1}^{n}(l+1)^2 + (n+1)^2$ Fout ✓
6. $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \stackrel{?}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$ Fout ✓

9.1.3 Niveau 3

Oefening 9.1.15. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{k=0}^{3} \sin^2\left(k\frac{\pi}{2}\right) = 2$
2. $\sum_{k=1}^{5}(n-k) - 7 = 5n - 22 \quad (n \in \mathbb{R})$
3. $\sum_{p=0}^{8} 10^{5-p} = 111111.111$

CC BY-NC-SA 4.0

9.1 Oefeningen som, faculteit en binomiaalgetal

4. $\sum_{n=2}^{5}\left(\sum_{k=1}^{n} n\right) = 54$

5. $3\sum_{j=0}^{3} k + j = 12k + j \quad (j,k \in \mathbb{R})$

Uitwerking: $3\sum_{j=0}^{3} k + j = 3(k+k+k+k) + j = 3\cdot 4k + j = 12k + j$

Oefening 9.1.16. Bereken volgende sommen:

1. $\sum_{j=0}^{5} 2^k = 6\cdot 2^k$ met $k \in \mathbb{R}$

Uitwerking: $\sum_{j=0}^{5} 2^k = 2^k + 2^k + 2^k + 2^k + 2^k + 2^k = 6\cdot 2^k$

2. $\sum_{k=17}^{21} 5 + \sqrt[k]{1+k} = 25 + (1+k)^{1/k}$ met $k \in \mathbb{R}_0$

Uitwerking: $\sum_{k=17}^{21} 5 + \sqrt[k]{1+k} = \left(\sum_{k=17}^{21} 5\right) + \sqrt[k]{1+k} = 5+5+5+5+5+\sqrt[k]{1+k} = 25 + \sqrt[k]{1+k}$

Merk op dat de letter k in de opgave twee verschillende rollen vervult: de letter k in $\sum_{k=17}^{21} 5$ heeft niets te maken met de letter k in $\sqrt[k]{1+k}$. Dergelijke som wordt dus beter geschreven met een andere index-variabele: $\sum_{i=17}^{21} 5 + \sqrt[k]{1+k}$.

Als het toch over dezelfde k zou gaan, moeten er haakjes staan: $\sum_{k=17}^{21}\left(5 + \sqrt[k]{1+k}\right)$. Die som kan je eventueel verder uitschrijven als $25 + \sqrt[17]{18} + \sqrt[18]{19} + \sqrt[19]{20} + \sqrt[20]{21} + \sqrt[21]{22}$, maar niet verder vereenvoudigen. Je kan ze wel een rekenmachine of computer uitrekenen.

Oefening 9.1.17. Vul aan. ($l \in \mathbb{N}$ en $l \geqslant 3$)

1. $3(l-2)! + 2(l-3)! = (3l-4)(l-3)!$

Uitwerking:

$$\begin{aligned} 3(l-2)! + 2(l-3)! &= 3(l-2)(l-3)! + 2(l-3)! \\ &= (3(l-2)+2)\,(l-3)! \\ &= (3l-4)(l-3)! \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.1 Oefeningen limieten

Bij de oefeningen op limieten is het niet enkel van belang de uitkomst te vinden, maar ook om correct te kunnen uitleggen **hoe** je deze uitkomst vindt.

10.1.1 Niveau 1

Oefening 10.1.1. Bereken volgende limieten in $\pm\infty$ met behulp van de rekenregels:

1. $\lim_{x\to+\infty}(-4x^5+7x^4-11)=$ $-\infty$✓

Uitwerking: De rekenregel 'limiet van som is som van limieten' levert een onbepaaldheid:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-4x^5+7x^4-11\right)=-4\cdot(+\infty)^5+7\cdot(+\infty)^4-11=-4\cdot(+\infty)+7\cdot(+\infty)-11=\text{onbepaald},$$

We kunnen de hoogste macht van x buiten haken brengen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x^5\left(-4+\frac{7}{x}-\frac{11}{x^5}\right)&=\left(\lim_{x\to+\infty}x^5\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\left(-4+\frac{7}{x}-\frac{11}{x^5}\right)\right)\\&=(+\infty)\cdot(-4)\\&=-\infty\end{aligned}$$

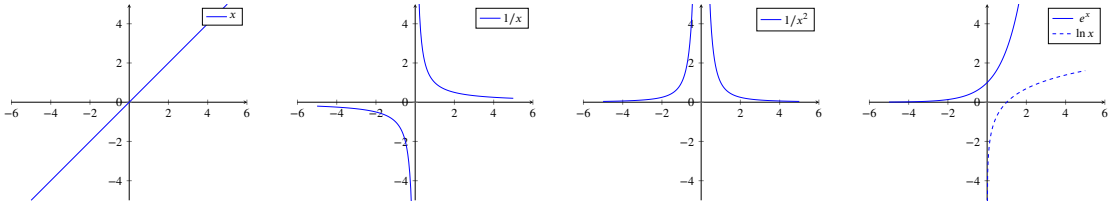
2. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+42x-12}{2x^2-17}=$ 1✓

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+42x-12}{2x^2-17}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(2+\frac{42}{x}-\frac{12}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{17}{x}\right)}\\&=\frac{2}{2}=1\end{aligned}$$

10.1.2 Niveau 2

Oefening 10.1.2. Bepaal de limieten op basis van de grafieken:



1. $\lim_{x\to+\infty}x=$ $+\infty$✓

2. $\lim_{x\to-\infty}x=$ $-\infty$✓

3. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=$ 0✓

4. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=$ 0✓

CC BY-NC-SA 4.0

10.1 Oefeningen limieten

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} =$ $+\infty$✓

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} =$ $-\infty$✓

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} =$ 0✓

8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} =$ $+\infty$✓

9. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x =$ $+\infty$✓

10. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x =$ 0✓

11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x =$ $+\infty$✓

12. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln x =$ bestaat niet✓

Uitwerking: Voor negatieve x bestaat $\ln x$ niet, en dus bestaat $\ln x$ niet *in de buurt van* $-\infty$

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x =$ $-\infty$✓

14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \ln x =$ bestaat niet✓

15. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x =$ bestaat niet✓

Uitwerking: De *linker*limiet bestaat niet, en dus bestaat (per afspraak) ook de limiet niet.

Oefening 10.1.3. Bepaal deze limieten via een redenering op basis van de grafieken van de functies $e^x, \ln x$ en $\frac{1}{x}$. Je hoeft de grafieken van $e^{1/x}$ en $\ln(1+\frac{1}{x})$ hiervoor niet te kennen.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} =$ 1✓

Uitwerking: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, dus gaat $e^{1/x}$ naar $e^0 = 1$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} =$ 1✓

Uitwerking: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, dus gaat $e^{1/x}$ naar 1

3. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} =$ bestaat niet✓

Uitwerking: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ bestaat niet dus bestaat $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ ook niet.

CC BY-NC-SA 4.0

10.1 Oefeningen limieten

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{\frac{1}{x}} =$ $+\infty$✓

Uitwerking: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ en $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ dus gaat ook $e^{1/x}$ naar $+\infty$.

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} e^{\frac{1}{x}} =$ 0✓

Uitwerking: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$ en $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ dus gaat $e^{1/x}$ naar 0.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{x}) =$ 0✓

Uitwerking: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, dus gaat $\ln(1+\frac{1}{x})$ dan naar $\ln(1+0) = \ln(1) = 0$.

7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1+\frac{1}{x}) =$ 0✓

Uitwerking: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, dus gaat $\ln(1+\frac{1}{x})$ naar $\ln(1+0) = \ln(1) = 0$

8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln(1+\frac{1}{x}) =$ $+\infty$✓

Uitwerking: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ en $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ dus gaat ook $\ln(1+\frac{1}{x})$ naar $+\infty$.

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \ln(1+\frac{1}{x}) =$ bestaat niet✓

Uitwerking: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$ en $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x)$ bestaat niet dus bestaat $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \ln(1+\frac{1}{x})$ ook niet.

Oefening 10.1.4. Bereken volgende limieten in $\pm\infty$ met behulp van de rekenregels:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(12x^{503} + 7x^{404} + 25x^{200}\right) =$ $-\infty$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \left(12x^{503} + 7x^{404} - 25x^{200}\right) &= \lim_{x\to-\infty} x^{503}\left(12 + 7x^{404-503} + 25x^{200-503}\right)\\ &= (-\infty)\cdot(12+0+0) = -\infty\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) =$ 0

CC BY-NC-SA 4.0

10.1 Oefeningen limieten

Uitwerking: We berekenen eerst $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{1+0} \\ &= 1\end{aligned}$$

Omdat $\ln 1 = 0$ is $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$.

3. $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+3x-2}{3x-7} = \boxed{+\infty}$

Uitwerking: We brengen de hoogste macht van x buiten haken in teller en noemer:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+3x-2}{3x-7} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(3-\frac{7}{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{3-\frac{7}{x}} \\ &= \frac{(-\infty)\cdot(-1)}{3} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3}{x^3-x+2} = \boxed{0}$

Uitwerking: We brengen de hoogste macht van x buiten haken in teller en noemer:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3}{x^3-x+2} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{3}{x^2}}{x\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)} \\ &= \frac{2}{(+\infty)\cdot 1} \\ &= 0\end{aligned}$$

5. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-1}{x-1} = \boxed{+\infty}$

Uitwerking: We brengen de hoogste macht van x buiten haken in teller en noemer:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-1}{x-1} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{1-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{(+\infty)\cdot 1}{1} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.1 Oefeningen limieten

6. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^6+5x^2+1}{x^4-x^6} = -1$

Uitwerking: We brengen de hoogste macht van x buiten haken in teller en noemer (let op: in de noemer heeft de tweede term de hoogste macht)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^6+5x^2+1}{x^4-x^6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6\left(1+\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x^6}\right)}{x^6\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x^6}}{-1+\frac{1}{x^2}} = -1$$

Oefening 10.1.5. Bereken de volgende limieten in een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt is van de teller:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{1}{x-2} = \boxed{-\infty}$

Uitwerking: We nemen de limiet naar een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt is van de teller, en aangezien $x-2$ negatief is voor $x<2$, zal de limiet $-\infty$ zijn.

2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \boxed{+\infty}$

Uitwerking: We nemen de limiet naar een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt is van de teller, en aangezien $(x-2)^2$ positief is overal in een omgeving rond 2, zal de limiet $+\infty$ zijn.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = \boxed{+\infty}$

Uitwerking: Let op dat er enkel een rechterlimiet genomen kan worden, en geen linkerlimiet, omdat deze functie niet is gedefinieerd voor $x\le 2$: we zouden delen door nul voor $x=2$, en voor $x<2$ zou de wortel niet gedefinieerd zijn. We nemen de limiet naar een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt is van de teller, en aangezien de vierkantswortel positief is, zal deze limiet $+\infty$ zijn.

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \dfrac{4x-20}{2x-6} = \boxed{+\infty}$

Uitwerking: We nemen de limiet naar een nulpunt van de noemer, dat geen nulpunt is van de teller. We schrijven eerst als een product van limieten:

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{4x-20}{2x-6} = \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} (4x-20)\cdot \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{1}{2x-6} = (-8)\cdot \lim_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{1}{2x-6}$$

Om te weten te komen of de overblijvende limiet $+\infty$ dan wel $-\infty$ is, moeten we het tekenverloop van noemer bepalen. De noemer is negatief voor $x<3$. Omdat we de limiet voor x gaande naar 3 van links nemen, is $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \dfrac{1}{2x-6} = -\infty$ Het resultaat is dan $+\infty$.

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right) = \boxed{-\infty}$

Uitwerking: Rechtstreeks invullen gaat niet: dan komen we op de onbepaaldheid $(+\infty)-(+\infty)$ uit. We zetten beide termen op dezelfde noemer om één grote breuk te vormen:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{2x-1}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} (2x-1)\cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^2} = (-1)(+\infty) = -\infty$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.1 Oefeningen limieten

6. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{x-3}{x^2-1} =$ $-\infty$

7. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{x-3}{x^2-1} =$ $+\infty$

8. $\lim\limits_{\substack{x\to \pi\\ <}} \dfrac{x}{\sin x} =$ $+\infty$

Oefening 10.1.6. Bereken de volgende limieten in een nulpunt van teller en noemer:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^3} =$ $+\infty$

Uitwerking: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2} =$ bestaat niet

Uitwerking: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ en die limiet bestaat niet.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \dfrac{x-3}{|x-3|} = -1$

Uitwerking: We gebruiken de definitie van de absolute waarde: deze functie is gelijk aan de constante functie 1 voor $x > 3$, en gelijk aan de constante functie -1 voor $x < 3$, en in 3 is de functie niet gedefinieerd. Daarom is de linkerlimiet voor x gaande naar 3 gelijk aan -1.

10.1.3 Niveau 3

Oefening 10.1.7. Bereken volgende limieten in $\pm\infty$:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2-7x}+3x) =$ $+\infty$

Uitwerking: We zonderen de x^2 af in de wortel en brengen de hoogste macht van x buiten haken:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{4x^2-7x}+3x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2\left(4-\frac{7}{x}\right)}+3x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(|x|\sqrt{4-\frac{7}{x}}+3x\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(x\sqrt{4-\frac{7}{x}}+3x\right) \\
&= \left(\lim_{x\to+\infty} x\right) \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4-\frac{7}{x}}+3\right) \\
&= (+\infty)(\sqrt{4}+3) = +\infty
\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{2x^2+3}-x) =$ $+\infty$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/20.38)

10.1 Oefeningen limieten

Uitwerking: We zonderen de x^2 af in de wortel en brengen de hoogste macht van x buiten haken:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+3}-x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}-x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(|x|\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-x\right)\\ &= \left(\lim_{x\to+\infty}x\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-1\right)\\ &= (+\infty)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right),\end{aligned}$$

en aangezien $\sqrt{2}>1$, is het resultaat $+\infty$.

3. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+3}-x) = \boxed{+\infty}$

Uitwerking: We zonderen de x^2 af in de wortel en brengen de hoogste macht van x buiten haken:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{2x^2+3}-x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(2+\frac{3}{x^2}\right)}-x\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-x\right)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-x\right)\\ &= \left(\lim_{x\to-\infty}x\right)\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-1\right)\\ &= (-\infty)\cdot\left(-\sqrt{2}-1\right),\end{aligned}$$

en aangezien $-\sqrt{2}-1<0$, is het resultaat $+\infty$.

4. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{16x^2+9x}+4x) = -\frac{9}{8}$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{16x^2+9x}+4x\right) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{16x^2+9x}+4x\right)\left(\sqrt{16x^2+9x}-4x\right)}{\sqrt{16x^2+9x}-4x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{16x^2+9x-16x^2}{\left(|x|\sqrt{16+\frac{9}{x}}-4x\right)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{9x}{\left(-x\sqrt{16+\frac{9}{x}}-4x\right)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{9}{-\sqrt{16+\frac{9}{x}}-4}\\ &= \frac{9}{-4-4}=-\frac{9}{8}\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.1 Oefeningen limieten

5. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x-1} = \boxed{1}$

Uitwerking: We zonderen eerst de x^2 af in de wortel:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x-1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}+2x}{3x-1}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2x}{3x-1}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2x}{3x-1}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2\right)}{3x-1}\end{aligned}$$

Nu kunnen we in de noemer ook de hoogste macht van x buiten haken brengen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2\right)}{3x-1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2\right)}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2}{3-\frac{1}{x}}\\ &= \frac{\sqrt{1}+2}{3} = 1\end{aligned}$$

6. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x-1} = \dfrac{1}{3}$

Uitwerking: We zonderen allereerst de x^2 af in de wortel:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x-1} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}+2x}{3x-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2x}{3x-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2x}{3x-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2\right)}{3x-1}\end{aligned}$$

Nu kunnen we in de noemer ook de hoogste macht van x buiten haken brengen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2\right)}{3x-1} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2\right)}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2}{3-\frac{1}{x}}\\ &= \frac{-\sqrt{1}+2}{3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

10.1 Oefeningen limieten

Oefening 10.1.8. Bereken:

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \dfrac{x^3-1}{x-1} = 3$

Uitwerking: We gebruiken de identiteit $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \left(x^2+x+1\right) = 3$$

2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \dfrac{1}{4}$

Uitwerking: Bij invullen van 3 in het functievoorschrift krijgen we de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$. We vermenigvuldigen daarom teller en noemer met de toegevoegde tweeterm van de teller, om vervolgens de identiteit $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ te gebruiken:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\\ &= \frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\end{aligned}$$

Van deze uitdrukking kan de limiet rechtstreeks bepaald worden:

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{\sqrt{3+1}+2} = \frac{1}{4}$$

3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9} = \dfrac{1}{18}$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9} &= \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{2x+3}-3\right)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}{(x^2-9)(\sqrt{2x+3}+3)}\\ &= \lim_{x\to 3} \frac{2x+3-9}{(x-3)\,(x+3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}\\ &= \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)\,(x+3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}\\ &= \lim_{x\to 3} \frac{2}{(x+3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}\end{aligned}$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}-\sqrt{2-\dfrac{3}{x^2}}\right) = \boxed{0}$

Uitwerking: We zouden kunnen schrijven dat

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} x\right)\cdot \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right),$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/20.38)

10.1 Oefeningen limieten

maar dit levert een onbepaaldheid van de vorm $(+\infty)\cdot 0$ op. We herschrijven de uitdrukking waarvan we de limiet zullen nemen, door teller en noemer te vermenigvuldigen met $\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}$ en de rekenregel $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ te gebruiken in de teller:

$$\begin{aligned} x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right) &= \frac{x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right)\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right)}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}} \\ &= \frac{x\left(2+\frac{3}{x^2}-\left(2-\frac{3}{x^2}\right)\right)}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}} \\ &= \frac{x\cdot\frac{6}{x^2}}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}} \end{aligned}$$

En dus is

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{6}{x}}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x\left(\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}\right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

5. $\lim_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}=3$

Uitwerking: We nemen de limiet naar een nulpunt van teller en noemer. We moeten dus zowel teller en noemer ontbinden in factoren: hiervoor zoeken we de nulpunten van teller en noemer, aan de hand van de discriminantmethode, aangezien teller en noemer tweedegraadsvergelijkingen zijn van de vorm $ax^2+bx+c=0$.

Voor de teller: $a=1$, $b=1$ en $c=-2$. Dan is $D=b^2-4ac=9$ en dus

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=1, x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-2$$

Voor de noemer: $a=1$, $b=3$ en $c=2$. Dan is $D=b^2-4ac=1$ en dus

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=-1, x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-2$$

Dus kunnen we schrijven dat

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{x-1}{x+1}=3$$

6. $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}\dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^3}=-\infty$

Uitwerking: Door in te vullen vinden we dat 1 een nulpunt is van zowel de teller als de noemer. Met behulp van de Euclidische deling of Horner vinden we $x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$. Door ook nog de tweedegraadsterm te ontbinden in factoren (bijvoorbeeld met de discriminantmethode), vinden we $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$. De limiet kan nu berekend worden:

$$\lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{x^3-3x+2}{(x-1)^3}=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^3}=\lim_{x\overset{<}{\to}1}\frac{x+2}{x-1}$$

Dit is de limiet in een nulpunt van de noemer dat geen nulpunt is van de teller.

CC BY-NC-SA 4.0

10.1 Oefeningen limieten

7. $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{6x^2-7x}+20x) =$ $\boxed{-\infty}$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{6x^2-7x}+20x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(6-\frac{7}{x}\right)}+20x\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{6-\frac{7}{x}}+20x\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{6-\frac{7}{x}}+20x\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{6-\frac{7}{x}}+20\right)\\
&= (-\infty)\cdot(-\sqrt{6}+20)\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

8. $\lim_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x-2} =$ $\boxed{0}$

Uitwerking: We kunnen -2 gewoon invullen in het functievoorschrift. $\lim_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{0}{-4} = 0$

CC BY-NC-SA 4.0

11.1 Oefeningen Goniometrische functies

11.1.1 Niveau 1

Oefening 11.1.1. Bepaal de samenstellingen van volgende reële functies.

1. Als $f : x \mapsto \cos(x)$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $f \circ g : x \mapsto \cos(x^2)$
2. Als $f : x \mapsto \cos(x)$ en $g : x \mapsto x^2$, dan is $g \circ f : x \mapsto \cos^2(x)$

11.1.2 Niveau 2

Oefening 11.1.2.

1. $\tan x = 0$ heeft als oplossingsverzameling

$\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$✓

2. $\sin 2x = 1$ heeft als oplossingsverzameling

$\{\pi/4 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$✓

Uitwerking:

De oplossingen voor $2x$ zijn $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Delen we de getallen $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ door twee dan krijgen we de getallen $\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$. De oplossingsverzameling is dus $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. $\cos 7x = \cos\frac{\pi}{6}$ heeft als oplossingsverzameling

$\left\{\pm\frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}\right\}$✓

Uitwerking:

De oplossingen voor $7x$ zijn $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, en dus geldt $x \in \left\{\pm\frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

4. $\cos 2x = 0$ heeft als oplossingsverzameling

$\{\pi/4 + k\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$✓

Oefening 11.1.3.

1. $\sin x < 0$, met $x \in [0, 4\pi]$ heeft als oplossingsverzameling: $]\pi, 2\pi[\cup]3\pi, 4\pi[$
2. $\sin 2x < 0$, met $x \in [0, 2\pi]$ heeft als oplossingsverzameling: $]\frac{\pi}{2}, \pi[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$

Oefening 11.1.4.

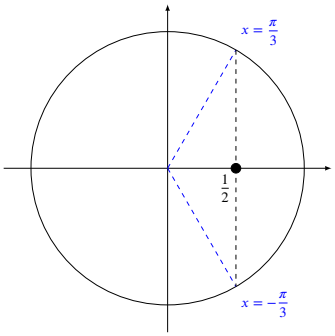
1. Voor welke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $\sin x = \sin y$, met $y \in [0, 2\pi]$? $\{y + 2k\pi, \pi - y + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
2. $\cos x = \frac{1}{2}$ heeft als oplossingverzameling: $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Uitwerking: In de tabel met de standaardhoeken vinden we terug dat $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Volgens de eigen-

CC BY-NC-SA 4.0

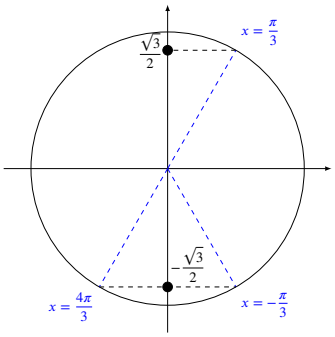
11.1 Oefeningen Goniometrische functies

schap $\cos(-x) = \cos x$ is ook $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Alle oplossingen van de vergelijking worden gegeven door $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.



3. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ heeft als oplossingsverzameling: $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Uitwerking: In de tabel met de standaardhoeken vinden we terug dat $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. De vraag is van welke hoeken de sinus gelijk is aan $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Volgens de eigenschappen van verwante hoeken geldt dat $\sin(x+\pi) = -\sin x$ en $\sin(-x) = -\sin x$, dus $\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alle oplossingen van de vergelijking worden gegeven door $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.



4. $\sin(\frac{\pi}{2}x) = 0$ heeft als oplossingsverzameling: $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Uitwerking: Een oplossing van de vergelijking $\sin x = 0$ is van de vorm $x = k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$. Een oplossing van de vergelijking $\sin(\frac{\pi}{2}x) = 0$ is bijgevolg van de vorm $\frac{\pi}{2}x = k\pi$, of $x = 2k$, met $k \in \mathbb{Z}$.

5. $\sin x = \cos x$ heeft als oplossingsverzameling: $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

6. $\sin x = -\cos x$ heeft als oplossingsverzameling: $\left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

CC BY-NC-SA 4.0

11.2 Oefeningen Even, oneven en periodieke functies

11.2.1 Niveau 1

Oefening 11.2.1. Welke functies zijn periodisch?

1. periodisch✓ $x \mapsto 2\cos(x)$
2. niet periodisch✓ $x \mapsto x^2$
3. periodisch✓ $x \mapsto \cos(2x)$
4. periodisch✓ $x \mapsto \sin(4x)$
5. periodisch✓ $x \mapsto 4$

11.2.2 Niveau 2

Oefening 11.2.2. Welke van de volgende functies zijn even/oneven of geen van beide?

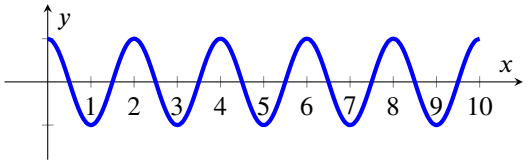
1. Even✓ $x \mapsto x^2$
2. Oneven✓ $x \mapsto x^3$
3. Geen van beiden✓ $x \mapsto x+1$
4. Oneven✓ $x \mapsto x$
5. Oneven✓ $x \mapsto \sin x$
6. Even✓ $x \mapsto \cos x$
7. Oneven✓ $x \mapsto \tan x$
8. Even✓ $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ als f, g even zijn
9. Even✓ $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ als f, g oneven zijn
10. Oneven✓ $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ als f even en g oneven is

Oefening 11.2.3. Voor welk van de volgende functies geldt dat $f(x+2) = f(x)$ voor elke $x \in \mathbb{R}$? We veronderstellen hierbij dat de functies gedefinieerd zijn op heel $\mathbb{R}$.

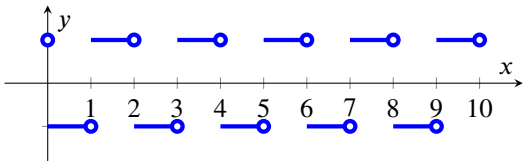
CC BY-NC-SA 4.0

11.2 Oefeningen Even, oneven en periodieke functies

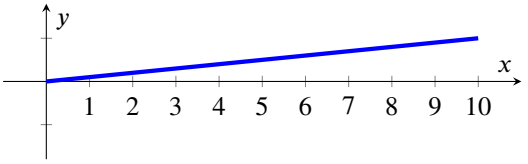
1. Juist ✓



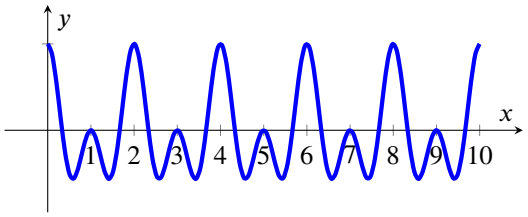
2. Juist ✓



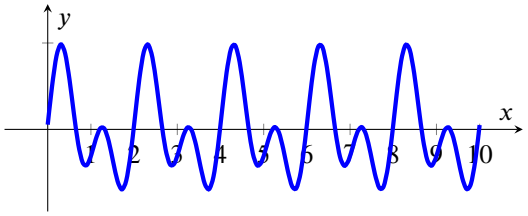
3. Fout ✓



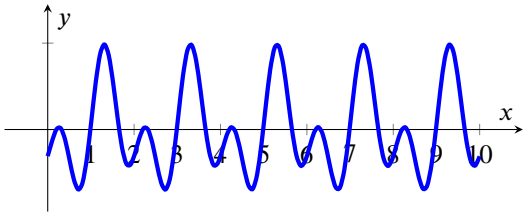
4. Juist ✓



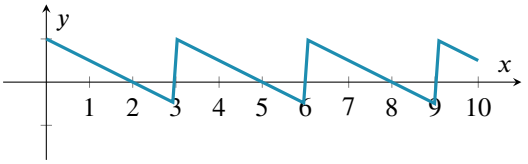
5. Juist ✓



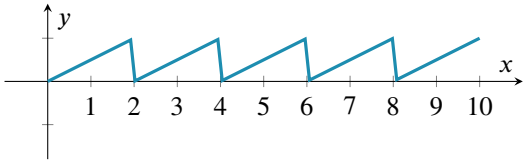
6. Juist ✓



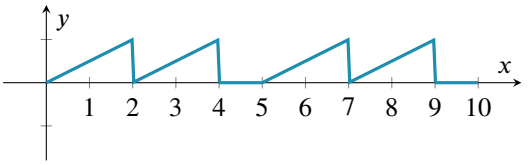
7. Fout ✓



8. Juist ✓



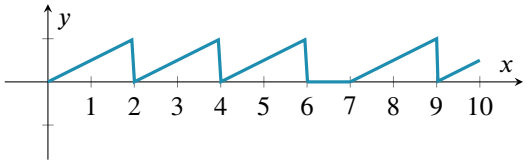
9. Fout ✓



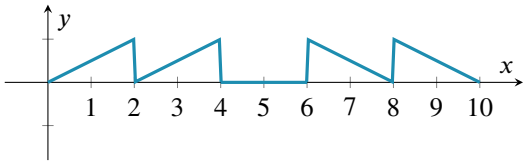
CC BY-NC-SA 4.0

11.2 Oefeningen Even, oneven en periodieke functies

10. Fout ✓



11. Fout ✓

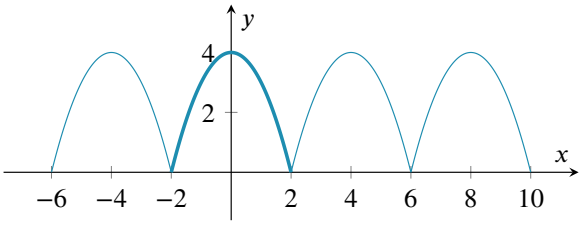


Oefening 11.2.4. Beschouw de functie $f : [-2,2[\to \mathbb{R} : x \mapsto 4 - x^2$. Teken de grafiek van de periodiek uitgebreide functie van deze f tot $\mathbb{R}$, en bereken volgende functiewaarden:

1. $f(0) = 4$ **3.** $f(6) = 0$ **5.** $f(12) = 4$ **7.** $f(2^{2020}) = 4$

2. $f(2) = 0$ **4.** $f(10) = 0$ **6.** $f(120) = 4$ **8.** $f(2^{2021}) = 4$

Uitwerking:



$f(0)$ kunnen we rechtstreeks aflezen van de grafiek in het interval $[-2,2[$. De overige functiewaarden $f(x)$ kunnen we bepalen door bij x een geheel veelvoud van de periode af te trekken, zodanig dat we een x_0 in het interval $[-2,2[$ vinden zodat $f(x_0) = f(x)$.

De periode van de uitbreiding is gelijk aan vier. Als x deelbaar is door 4, met andere woorden als x te schrijven is als $x = 4k$ voor een $k \in \mathbb{Z}$, dan is $f(x) = f(4k) = f(0+4k) = f(0) = 4$. Als de deling van x door 4 rest gelijk aan 2 heeft, dan kunnen we x schrijven als $x = 2+4k$ voor een $k \in \mathbb{Z}$. Bijgevolg is $f(2+4k) = f(2) = 0$.

Bijvoorbeeld is dan $f(2^{2020}) = 4$, omdat $2^{2020} = 4^{1010}$ en dus in het bijzonder deelbaar is door 4. Ook $2^{2021} = 2 \cdot 2^{2020}$ is deelbaar door 4. Omdat $f(10) = f(2+8)$, is $f(10) = 2$, enzoverder.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/20.38)

12.1 Oefeningen functies deel 2

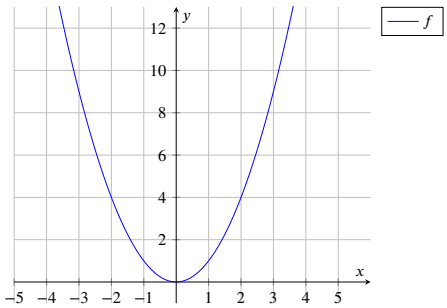
12.1.1 Niveau 2

Oefening 12.1.1.

Gegeven zijn de drie reële functies:
$$\begin{aligned} f &: x \mapsto x^2 \\ g &: x \mapsto x+2 \\ h &: x \mapsto 2x \end{aligned}$$

1. Schets op papier de grafiek van de functie f.

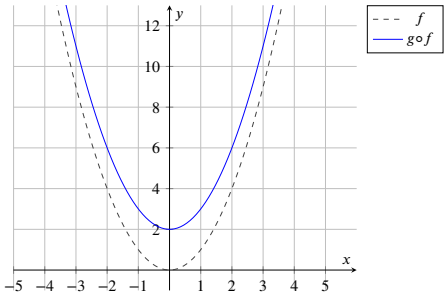
Uitwerking: De grafiek van x^2:



2. Schets op papier de grafiek van de functie $g \circ f$.

Uitwerking: $g(x)$ is van de vorm $x+a$ wat betekent dat het een verschuiving is. g komt na f waardoor de grafiek die we moeten tekenen die van $f(x)+a$ is. Dit betekent dat de verschuiving volgens de y-as is.

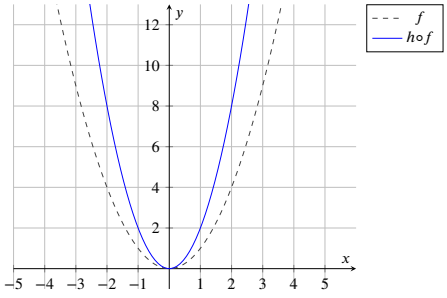
De grafiek van $g \circ f$:



3. Schets op papier de grafiek van de functie $h \circ f$.

Uitwerking: $h(x)$ is van de vorm ax wat betekent dat het een herschaling is. h komt na f waardoor de grafiek die we moeten tekenen die van $af(x)$ is. Dit betekent dat de schaling volgens de y-as is.

De grafiek van $h \circ f$:



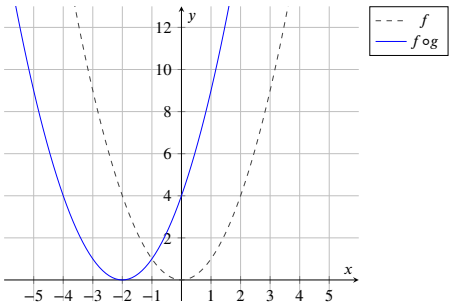
CC BY-NC-SA 4.0

12.1 Oefeningen functies deel 2

4. Schets op papier de grafiek van de functie $f \circ g$.

Uitwerking: $g(x)$ is van de vorm $x + a$ wat betekent dat het een verschuiving is. f komt na g waardoor de grafiek die we moeten tekenen die van $f(x + a)$ is. Dit betekent dat de verschuiving volgens de x-as is. $f(x + a)$ betekent dat met $x = -a$ de waarde $f(0)$ overeenkomt, dit betekent dus dat de grafiek over a eenheden naar *links* verschuift (want 0 verschuift naar $-a$).

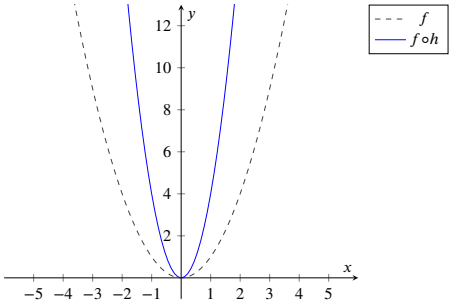
De grafiek van $f \circ g$:



5. Schets op papier de grafiek van de functie $f \circ h$.

Uitwerking: $h(x)$ is van de vorm ax wat betekent dat het een herschaling is. f komt na h waardoor de grafiek die we moeten tekenen die van $f(ax)$ is. Dit betekent dat de herschaling volgens de x-as is en de functie dus wordt samengedrukt met een factor 2 volgens de x-as.

De grafiek van $f \circ h$:



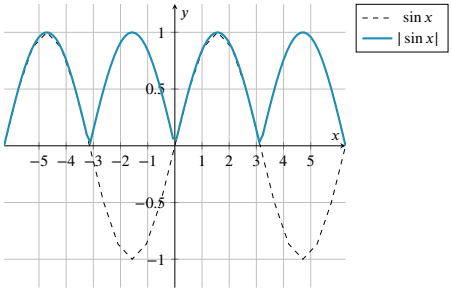
Oefening 12.1.2. Teken (zonder gebruik van een grafisch rekenmachine) de grafiek van de functies met volgende voorschriften

1. $f(x) = |\sin x|$

Uitwerking: Noem $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ en $g : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin x$. Dan is $f = T \circ g$. De grafiek van f is dan de grafiek van g, waarbij stukken van de grafiek met negatieve functiewaarden worden gespiegeld rond de x-as. Hieronder is de sinusfunctie getekend in stippellijnen, en de functie f in het blauw. Merk op dat de functies gelijk zijn aan elkaar waar de sinusfunctie positieve waarden bereikt: als $\sin x > 0$, dan is $|\sin x| = \sin x$ per definitie van de absolute waarde functie.

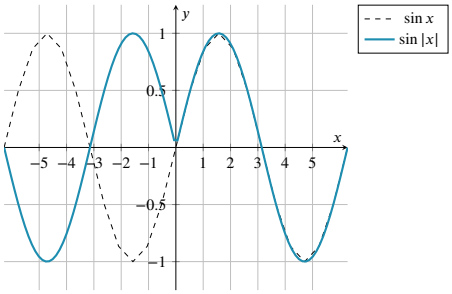
CC BY-NC-SA 4.0

12.1 Oefeningen functies deel 2



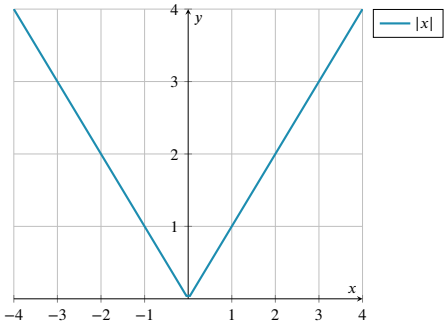
2. $f(x) = \sin|x|$

Uitwerking: Noem $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ en $g : \mathbb{R} \to [-1,1] : x \mapsto \sin x$. Dan is $f = g \circ T$. De grafiek van f is voor $x > 0$ dezelfde als de grafiek van g. Voor $x < 0$ bekomen we de grafiek van g door de grafiek van $x > 0$ te spiegelen rond de y-as. Inderdaad, als $x < 0$ dan is $\sin|x| = \sin(-x)$. De grafiek van f is dus symmetrisch ten opzichte van de y-as.



Oefening 12.1.3. Teken (zonder gebruik van een grafisch rekenmachine) de grafiek van de functies met volgend voorschrift. Vertrek telkens van de grafiek van de absolute waarde functie $|x|$.

Uitwerking: De grafiek van de functie $g(x) = |x|$:

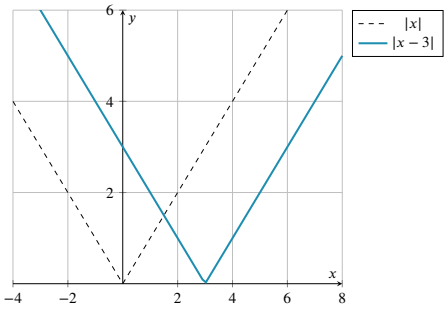


1. $f(x) = |x - 3|$

Uitwerking: Noem $g : x \mapsto |x|$ en $T : x \mapsto x - 3$, dan is $f = g \circ T$. De grafiek van de functie f is dus de grafiek van de functie g drie eenheden naar rechts opgeschoven.

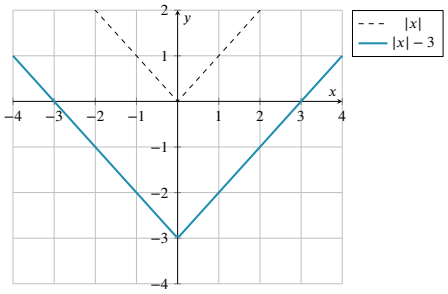
CC BY-NC-SA 4.0

12.1 Oefeningen functies deel 2



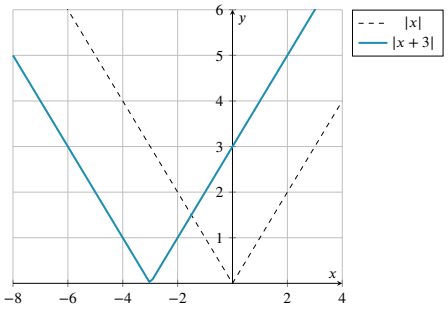
2. $f(x) = |x| - 3$

Uitwerking: Noem $g : x \mapsto |x|$ en $T : x \mapsto x - 3$, dan is $f = T \circ g$. De grafiek van de functie f is dus de grafiek van de functie g drie eenheden naar beneden opgeschoven.



3. $f(x) = |x + 3|$

Uitwerking: Noem $g : x \mapsto |x|$ en $T : x \mapsto x + 3$, dan is $f = g \circ T$. De grafiek van de functie f is dus de grafiek van de functie g drie eenheden naar links opgeschoven.



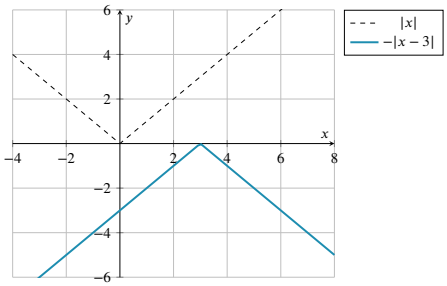
4. $f(x) = -|x - 3|$

Uitwerking: Noem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$, $T_1 : x \mapsto x - 3$ en $T_2 : x \mapsto -x$. Dan is $f = T_2 \circ g \circ T_1$. Aangezien de functie g na de functie T_1 komt, zal de grafiek van de functie g verschoven worden met drie eenheden naar rechts.

Als we een functie samenstellen met de transformatie T_2 langs links, dan zal de grafiek gespiegeld worden langs de x-as. Het uiteindelijke resultaat is dus de grafiek van g, met drie eenheden verschoven naar rechts, en vervolgens gespiegeld rond de x-as.

CC BY-NC-SA 4.0

12.1 Oefeningen functies deel 2



Oefening 12.1.4. Ga na welke van de volgende functies inverteerbaar zijn. Indien een functie niet inverteerbaar is, bepaal dan het grootst mogelijke domein waarop een beperking van de functie wel inverteerbaar is. Bepaal, eventueel na het domein te beperken, de inverse functie en maak telkens een schets van de functie en haar inverse.

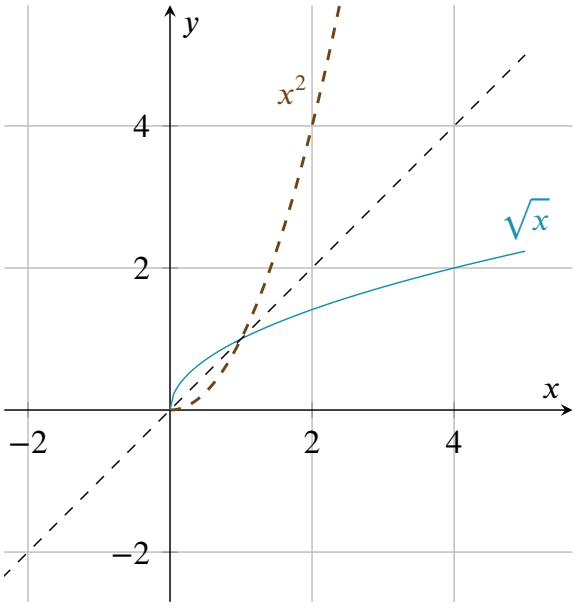
1. Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$. Is deze functie inverteerbaar? De functie is inverteerbaar: $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$

Uitwerking: De functie is inderdaad inverteerbaar. De inverse functie kan gevonden worden door uit $y = f(x) = \sqrt{x}$ een verband van de vorm $x = g(y)$ te vinden. Dit kan gedaan worden door te kwadrateren, dus $x = y^2$.

Om de inverse functie te definiëren, moeten we nog het domein en codomein bepalen. Herinner dat als $f : A \mapsto B$, dan zal $f^{-1} : B \mapsto A$. De inverse functie is dus

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$$

Je kan zelf eenvoudig nagaan dat $f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x))$.



2. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$. Is deze functie inverteerbaar? De functie is niet inverteerbaar.

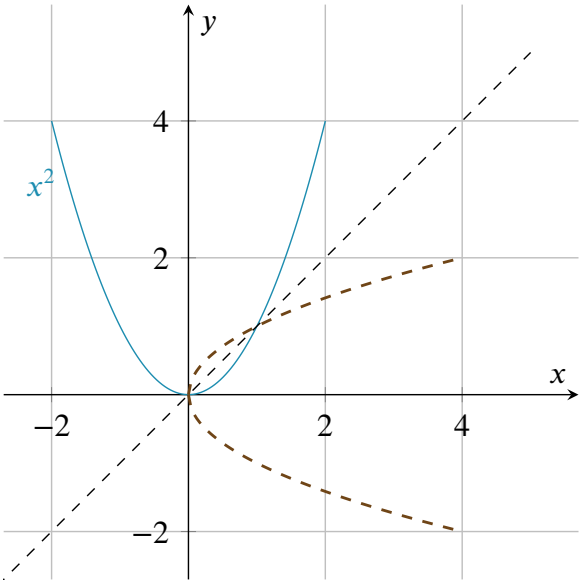
De inverse van $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ is $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$.

De inverse van $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$ is $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : x \mapsto -\sqrt{x}$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/20.38)

12.1 Oefeningen functies deel 2

Uitwerking: De functie is niet inverteerbaar. Indien de functie wel inverteerbaar zou zijn, dan bekomen we de grafiek van de inverse functie door de grafiek van f te spiegelen om de eerste bissectrice. Het resultaat, de rode curve in de figuur hieronder, is echter duidelijk **niet** de grafiek van een functie: voor elke $x > 0$ vinden we twee verschillende functiewaarden.

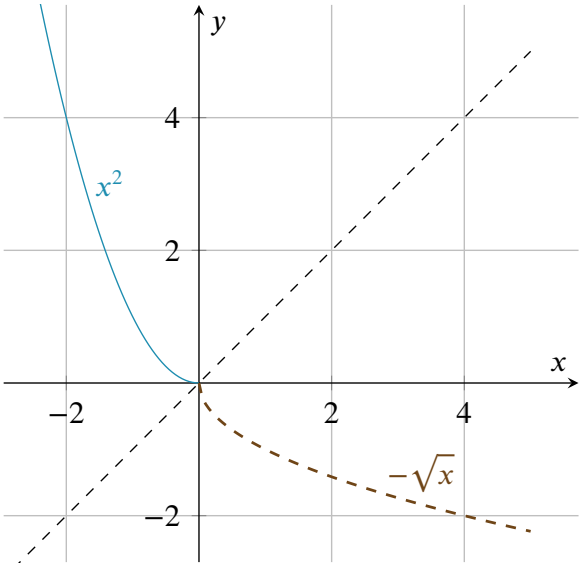


Er bestaat wel een beperking van de functie die wel inverteerbaar is. Er zijn hiervoor zelfs twee keuzes.
De **eerste** is de beperking tot het domein $\mathbb{R}^-$. Uit $y = x^2$ halen we dat het voorschrift van de inverse voldoet aan $x = -\sqrt{y}$, aangezien $x \in \mathbb{R}^-$.

Om de inverse functie te definiëren, moeten we nog het domein en codomein bepalen. Herinner dat als $f : A \mapsto B$, dan zal $f^{-1} : B \mapsto A$. De inverse functie is dus

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : x \mapsto -\sqrt{x}$$

Je kan zelf eenvoudig nagaan dat $f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x))$.



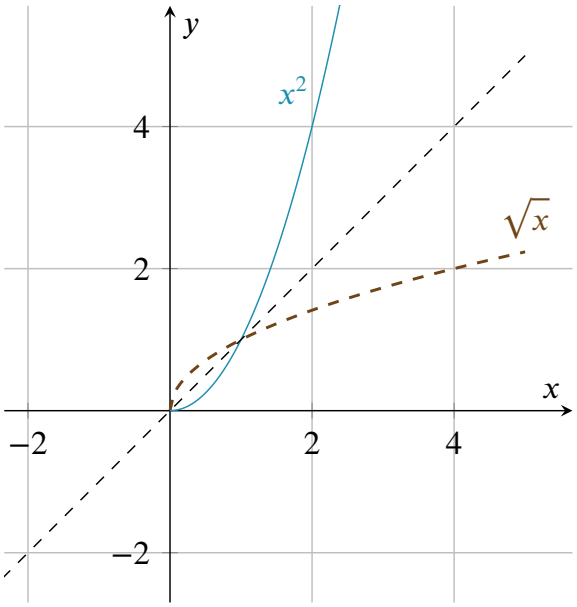
De **tweede** keuze is de beperking tot het domein $\mathbb{R}^+$. Op een geheel analoge wijze vinden we dan dat de inverse functie gegeven wordt door:

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto \sqrt{x}$$

CC BY-NC-SA 4.0

12.1 Oefeningen functies deel 2

Je kan zelf eenvoudig nagaan dat $f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x))$.

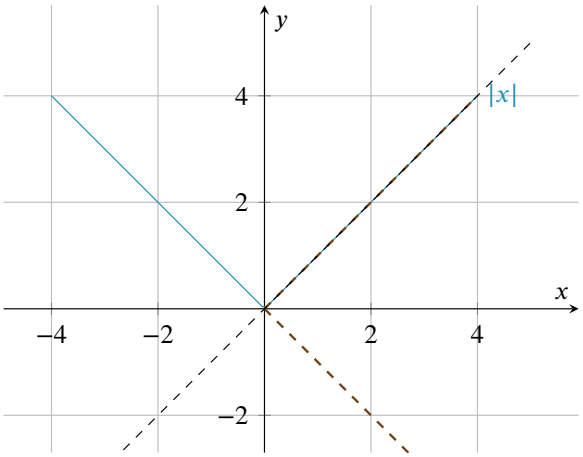


3. Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto |x|$. Is deze functie inverteerbaar? De functie is niet inverteerbaar.

De inverse van $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto |x|$ is $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x$.

De inverse van $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto |x|$ is $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : x \mapsto -x$.

Uitwerking: De functie is niet inverteerbaar. Indien de functie wel inverteerbaar was, dan zou de grafiek van de inverse functie gevonden kunnen worden door de grafiek van de functie f te spiegelen om de eerste bissectrice. Het resultaat is dan duidelijk **niet** de grafiek van een functie.



Opnieuw zijn er twee keuzes mogelijk om het domein te beperken zodat we de functie wel kunnen inverteren: $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^-$.
Voor $\mathbb{R}^+$ wordt de beperking de identieke functie op $\mathbb{R}^+$, namelijk $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x$. Deze functie is haar eigen inverse, dus $f^{-1} = f$.
Voor $\mathbb{R}^-$ wordt de beperking de tegengestelde functie van de identieke functie, namelijk $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto -x$. Deze functie heeft als inverse de functie $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : x \mapsto -x$. Let op: $f^{-1} \neq f$, omdat het domein van beide functies verschillend is.

CC BY-NC-SA 4.0

12.1 Oefeningen functies deel 2

Oefening 12.1.5. Bereken de inverse van volgende inverteerbare functies.

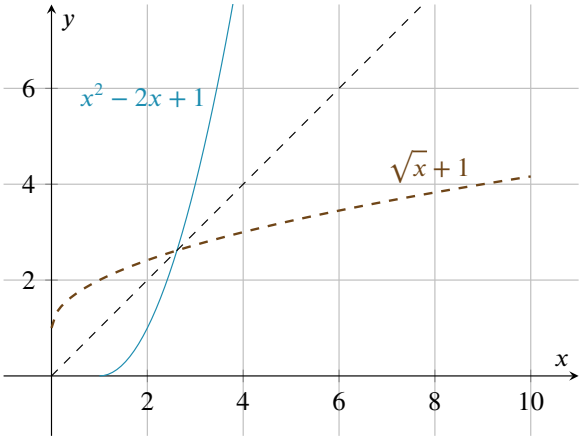
1. $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2 - 2x + 1$. $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to [1,+\infty[: x \mapsto \sqrt{x} + 1$

Uitwerking: We herschrijven het functievoorschrift: $f(x) = (x-1)^2$.

We bepalen de inverse functie $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto (x-1)^2$. Als $x \in [1,+\infty[$, dan is $x - 1 \geq 0$. Uit $y = (x-1)^2$ halen we dan dat $x - 1 = \sqrt{y}$, en dus $x = \sqrt{y} + 1$. Dus is de inverse functie van f gegeven door

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to [1,+\infty[: x \mapsto \sqrt{x} + 1$$

Je kan zelf eenvoudig nagaan dat $f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x))$.



2. $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\} : x \mapsto \dfrac{x+2}{x-3}$.

$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\} : x \mapsto \dfrac{3x+2}{x-1}$

Uitwerking: De functie is inverteerbaar. Uit $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ vinden we dat $y(x-3) = x+2$, en dus $x(y-1) = 3y+2$ oftewel $x = \dfrac{3y+2}{y-1}$. Indien we de functie f^{-1} definiëren als

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\} : x \mapsto \frac{3x+2}{x-1}$$

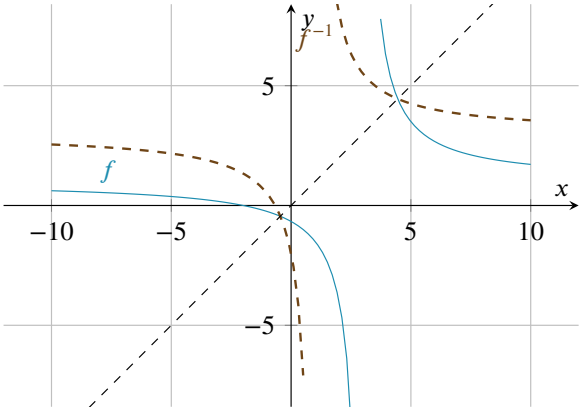
dan is dit de inverse functie van f. We kunnen dit nagaan door $f(f^{-1}(x))$ te bepalen:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{3x+2}{x-1}\right) \\ &= \frac{\frac{3x+2}{x-1} + 2}{\frac{3x+2}{x-1} - 3} \\ &= \frac{3x+2+2(x-1)}{3x+2-3(x-1)} \\ &= x \end{aligned}$$

Analoog vinden we $f^{-1}(f(x)) = x$.

CC BY-NC-SA 4.0

12.1 Oefeningen functies deel 2



Let op het domein van f^{-1}: de functie is namelijk niet gedefinieerd in 1.

Oefening 12.1.6. Bereken volgende uitdrukkingen.

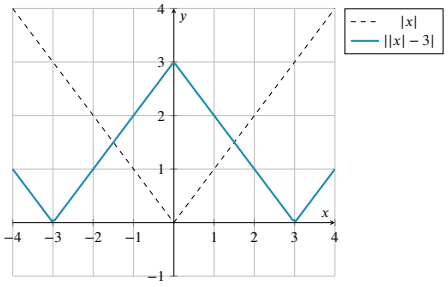
1. $\text{bgtan}(\tan\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$
2. $\text{bgtan}(\tan\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\pi}{3}$
3. $\text{bgtan}(\tan\frac{3\pi}{3}) = 0$
4. $\text{bgtan}(\tan\frac{4\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$
5. $\text{bgtan}(\tan\frac{5\pi}{3}) = -\frac{\pi}{3}$
6. $\text{bgtan}(\tan\frac{6\pi}{3}) = 0$
7. $\text{bgtan}(\tan\frac{7\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$
8. $\text{bgtan}(\tan\frac{8\pi}{3}) = -\frac{\pi}{3}$

12.1.2 Niveau 3

Oefening 12.1.7. Teken (zonder gebruik van een grafisch rekenmachine) de grafiek van de functies met volgend voorschrift.

1. $f(x) = ||x| - 3|$

Uitwerking: Noem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ en $T : x \mapsto x - 3$. Dan is $f = g \circ T \circ g$. De grafiek van $T \circ g$ is de grafiek van g met drie eenheden naar onder verschoven. Als we vervolgens de functie g hierop toepassen langs links, dan worden alle stukken van de grafiek van $T \circ g$ die in de helft onder de x-as liggen, gespiegeld rond de x-as naar de helft boven de x-as. Inderdaad, g is niets anders dan de absolute waarde functie, en de grafiek van $|f(x)|$ voor eender welke functie f is gelijk aan de grafiek van f waar de functiewaarden positief zijn, en is het spiegelbeeld van de grafiek van f rond de x-as waar de functiewaarden negatief zijn: als $f(x) < 0$, dan is $|f(x)| = -f(x)$. Concreet voor dit geval is $|x| - 3 \leq 0$ als en slechts als $x \in [-3, 3]$: het stuk van de grafiek van $T \circ g$ in de strook $x \in [-3, 3]$ wordt dus gespiegeld rond de x-as.



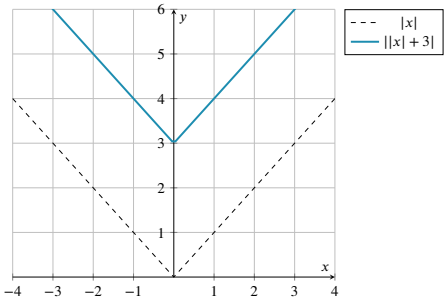
2. $f(x) = ||x| + 3|$

CC BY-NC-SA 4.0

12.1 Oefeningen functies deel 2

Uitwerking: Noem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ en $T : x \mapsto x+3$. Dan is $f = g \circ T \circ g$. De grafiek van $T \circ g$ is de grafiek van g met drie eenheden naar boven verschoven. Als we vervolgens de functie g hierop toepassen langs links, dan worden alle stukken van de grafiek van $T \circ g$ die in de helft onder de x-as liggen, gespiegeld rond de x-as naar de helft boven de x-as. Inderdaad, g is niets anders dan de absolute waarde functie, en de grafiek van $|f(x)|$ voor eender welke functie f is gelijk aan de grafiek van f waar de functiewaarden positief zijn, en is het spiegelbeeld van de grafiek van f rond de x-as waar de functiewaarden negatief zijn: als $f(x) < 0$, dan is $|f(x)| = -f(x)$. Maar in dit geval is nooit voldaan aan $|x| + 3 \leq 0$ zodat er geen spiegeling rond de x-as plaatsvindt. Inderdaad, deze ongelijkheid is equivalent met $|x| \leq -3$, maar dit kan niet aangezien de absolute waarde van een reëel getal per definitie positief is.

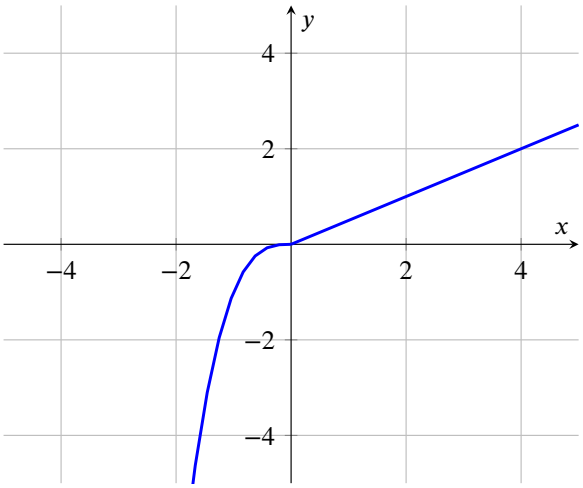
Je kan deze oefening sneller oplossen door het volgende te realiseren: omdat per definitie $|x| \geq 0$, is $|x| + 3$ zeker groter dan nul, en hebben we $||x| + 3| = |x| + 3$. Dus $f(x) = |x| + 3$. Definieer nu $T : x \mapsto x + 3$: dan is $f = T \circ g$. De grafiek van g is dus de grafiek van f met drie eenheden naar boven verschoven.



Oefening 12.1.8. Zijn de volgende functies met meervoudig functievoorschrift inverteerbaar? Zo ja, bepaal dan de inverse functie. Maak om te beginnen een grafiek van de gegeven functie.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^3 & \text{als } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{als } x > 0 \end{cases}$ De functie is inverteerbaar: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^{1/3} & \text{als } x \leq 0 \\ 2x & \text{als } x > 0 \end{cases}$

Uitwerking: Voor meervoudige functievoorschriften kan het helpen om de grafiek te schetsen.Voor de gegeven functie f, vinden we dan dat deze inderdaad inverteerbaar is. Iedere horizontale rechte snijdt de grafiek in slechts één punt.



De inverse functie kan gevonden worden door de delen $x \leq 0$ en $x > 0$ apart te beschouwen. Voor $x \leq 0$ is de inverse operatie die f ongedaan maakt de derdemachtswortel, voor $x > 0$ is dit de operatie 'vermenigvuldigen

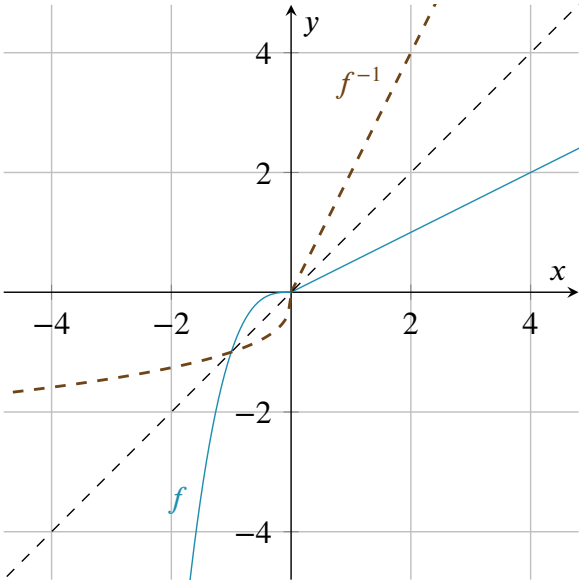
CC BY-NC-SA 4.0

12.1 Oefeningen functies deel 2

met twee'. Samen geven ze de inverse functie als volgt:

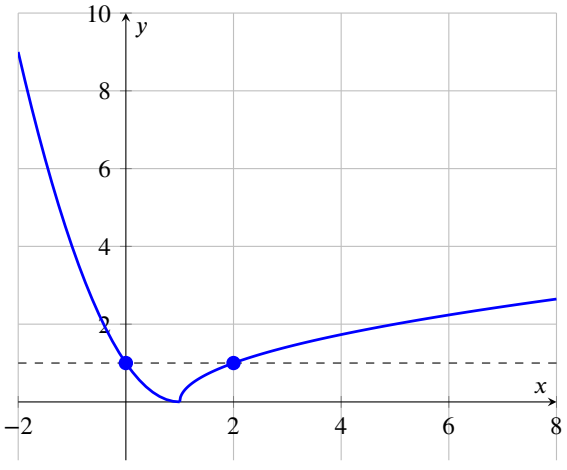
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^{1/3} & \text{als } x \leq 0 \\ 2x & \text{als } x > 0 \end{cases}$$

Hieronder schetsen we de grafiek van f en haar inverse:



2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{als } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{als } x > 1 \end{cases}$ De functie is niet inverteerbaar.

Uitwerking: De grafiek van f is hieronder geschetst. De functie is niet inverteerbaar: voor elke $c > 0$ zal de horizontale rechte door $y = c$ de grafiek snijden op twee verschillende punten. Dit is geïllustreerd voor het specifieke geval $c = 1$.

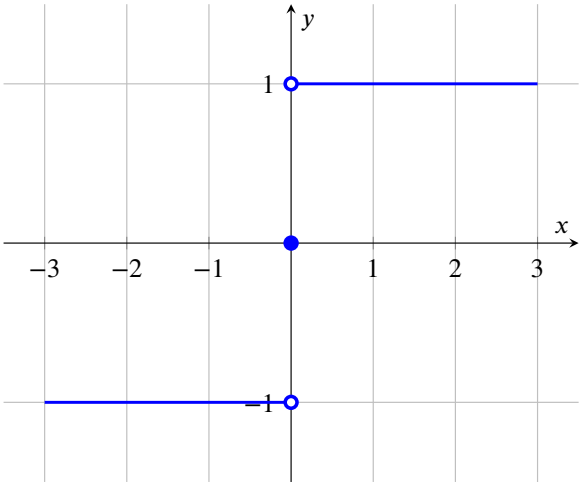


3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$ De functie is niet inverteerbaar.

Uitwerking: Na het tekenen van de grafiek is het duidelijk dat de functie niet inverteerbaar is: de horizontale rechten op hoogtes 1 en -1 snijden de grafiek van de functie in oneindig veel punten.

CC BY-NC-SA 4.0

12.1 Oefeningen functies deel 2



Oefening 12.1.9.

1. $\tan\left(\text{bgcos}\left(\frac{-1}{2}\right)\right) = \boxed{-\sqrt{3}}$

Uitwerking: $\text{bgcos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ want $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ en $\frac{2\pi}{3}$ ligt tussen 0 en π.
Om $\tan 2\pi/3$ te bepalen, gebruiken we achtereenvolgens de rekenregels voor anti-supplementaire en tegengestelde hoeken, en gebruiken we dat $\tan\pi/3 = \sqrt{3}$.

$$\tan\frac{2\pi}{3} = \tan\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

(Bron: IJkingstoets burgerlijk ingenieur, september 2013)

2. $\sin\left(\text{bgcos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$

Uitwerking: $\text{bgcos}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$ want $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $\frac{5\pi}{6}$ ligt tussen 0 en π.
Om $\sin\frac{5\pi}{6}$ te berekenen, werken we opnieuw met supplementaire hoeken:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

(Bron: IJkingstoets burgerlijk ingenieur, september 2014)

CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Oefeningen Afgeleiden

13.1.1 Niveau 1

Oefening 13.1.1. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$

Uitwerking: $\left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}\cdot x^{1/3-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

2. $\left(x^{-1/3}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-4/3}$

Uitwerking: $\left(x^{-1/3}\right)' = -\frac{1}{3}\cdot x^{-1/3-1} = -\frac{1}{3}x^{-4/3} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

3. $\left(x^4\right)' = 4x^3$

4. $\left(9x^9\right)' = 81x^8$

5. $\left(x^4 - 4x\right)' = 4x^3 - 4$

6. $(x + \sin x)' = 1 + \cos x$

7. $(x - \cos x)' = 1 + \sin x$

8. $(7e^x)' = 7e^x$

9. $(7 + e^x)' = e^x$

10. $(\sin x + e^x)' = \cos x + e^x$

Oefening 13.1.2. Bereken de afgeleide van volgende rationale functies.

1. $\left(\frac{x-4}{x}\right)' = \frac{4}{x^2}$

Uitwerking: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x-4}{x}\right) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-4)\cdot x - (x-4)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x}{x^2} = \frac{1\cdot x - (x-4)\cdot 1}{x^2} = \frac{x - x + 4}{x^2} = \frac{4}{x^2}$

2. $\left(\frac{x}{x+3}\right)' = \frac{3}{(x+3)^2}$

Uitwerking: $\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)\cdot(x+3) - x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{1\cdot(x+3) - x\cdot 1}{(x+3)^2} = \frac{x+3-x}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+3)^2}$

3. $\left(\frac{1}{x+5}\right)' = \frac{-1}{(x+5)^2}$

Uitwerking: $\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1)\cdot(x+5) - 1\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+5)}{(x+5)^2} = \frac{0\cdot(x+5) - 1\cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{0-1}{(x+5)^2} = \frac{-1}{(x+5)^2}$

4. $\left(\frac{4-x}{3-x}\right)' = \frac{1}{(3-x)^2}$

Uitwerking:

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4-x)\cdot(3-x) - (4-x)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3-x)}{(3-x)^2} = \frac{(-1)\cdot(3-x) - (4-x)\cdot(-1)}{(3-x)^2} = \frac{x-3+(4-x)}{(3-x)^2} = \frac{1}{(3-x)^2}$$

CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Oefeningen Afgeleiden

13.1.2 Niveau 2

Oefening 13.1.3. Bereken de afgeleide van volgende functies:

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((1+x)\ln x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1$

Uitwerking: Via productregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((1+x)\ln x) = \ln x + (1+x)\cdot\frac{1}{x} = \ln x + \frac{1}{x} + 1$

Of eerst haakjes uitwerken en dan productregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((1+x)\ln x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x + x\ln x) = \frac{1}{x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ln x) = \frac{1}{x} + 1 + \ln x$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2\cos t) = 2t\cos t - t^2\sin t$

Uitwerking: Via productregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2\cos t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^2)\cos t + t^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t)$

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{-1}{t^2}\right) = \frac{2}{t^3}$

Uitwerking: Via formule voor machten: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{-1}{t^2}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^{-2}) = -(-2)t^{-3} = 2t^{-3}$

Via quotiëntregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{-1}{t^2}\right) = -\frac{-2t}{t^4} = \frac{2}{t^3}$

4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{3t-1}{2t+2}\right) = \frac{2}{(t+1)^2}$

Uitwerking: Via quotiëntregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{3t-1}{2t+2}\right) = \frac{3(2t+2)-(3t-1)2}{(2t+2)^2} = \frac{8}{2^2(t+1)^2} = \frac{2}{(t+1)^2}$

5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(4x+5) = 4\cos(4x+5)$

Uitwerking: Via kettingregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(4x+5) = \cos(4x+5)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(4x+5) = 4\cos(4x+5)$

6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(7t^2) = \frac{2}{t}$

Uitwerking: Via kettingregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(7t^2) = \frac{1}{7t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(7t^2) = \frac{14t}{7t^2} = \frac{2}{t}$

Via rekenregels logaritme: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(7t^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln 7 + \ln t^2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln 7 + 2\ln t) = \frac{2}{t}$

7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{4x^3+1}{3x} = \frac{8x^3-1}{3x^2}$

Uitwerking: Via quotiëntregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{4x^3+1}{3x} = \frac{12x^2\cdot 3x - (4x^3+1)3}{9x^2} = \frac{8x^3-1}{3x^2}$

8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan\frac{1}{x} = -\frac{1}{(x\cos(x^{-1}))^2}$

Uitwerking: Via kettingregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan\frac{1}{x} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot = \frac{-1}{x^2\cos^2\frac{1}{x}} = \frac{-1}{(x\cos\frac{1}{x})^2}$

CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Oefeningen Afgeleiden

9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(-8x^2-1) = 16x\sin(-8x^2-1)$

Uitwerking: Via kettingregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(-8x^2-1) = (-\sin(-8x^2-1))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-8x^2-1) = 16x\sin(-8x^2-1)$

10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^3 3x = 9\sin^2(3x)\cos(3x)$

Uitwerking: We moeten de kettingregel 2 maal toepassen: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^3 3x = 3\sin^2(3x)\cdot\cos(3x)\cdot 3 = 9\sin^2(3x)\cos(3x)$

Alternatief: gebruik de productregel $(\sin^3 3x = \sin 3x\cdot\sin 3x\cdot\sin 3x)$.

11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2-7x+8} = \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+8}}$

Uitwerking: Via kettingregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2-7x+8} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-7x+8}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2-7x+8) = \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+8}}$

12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln t\ \sin(t^2)) = \frac{\sin(t^2)}{t} + 2t\ln t\ \cos(t^2)$

Uitwerking: Eerst gebruiken we de productregel en daarna de kettingregel:
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln t\ \sin(t^2)) = \frac{1}{t}\cdot\sin(t^2) + \ln t\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin(t^2)) = \frac{\sin(t^2)}{t} + \ln t\cdot\cos(t^2)\cdot(2t) = \frac{\sin(t^2)}{t} + 2t\ln t\ \cos(t^2)$

13. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1-t^2) = \frac{-2t}{1-t^2}$.

Uitwerking: Via kettingregel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1-t^2) = \frac{1}{1-t^2}\cdot(-2t) = \frac{-2t}{1-t^2}$

14. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[3]{(x^2+3)^4} = \frac{8}{3}x(x^2+3)^{1/3}$

Uitwerking: Je herschrijft best eerst de wortel als een macht $\sqrt[3]{(x^2+3)^4} = \left(x^2+3\right)^{4/3}$. Dan krijg je een samengestelde functie van $f(x) = x^{4/3}$ en $g(x) = x^2+3$: $f(g(x)) = \left(x^2+3\right)^{4/3}$
De afgeleiden van f en g zijn gegeven door respectievelijk $f'(x) = (4/3)\,x^{1/3}$ en $g'(x) = 2x$.
Met behulp van de kettingregel bekomen we dan:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f\left(g(x)\right)\right] &= f'\left(g(x)\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[g(x)\right]\\ &= \frac{4}{3}(x^2+3)^{1/3}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^2+3\right]\\ &= \frac{4}{3}(x^2+3)^{1/3}\cdot 2x\\ &= \frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2+3}.\end{aligned}$$

Oefening 13.1.4. Stel dat g een afleidbare functie is. Geef de afgeleide van de functie f in termen van g en van de afgeleide van de functie g voor volgende functies f:

1. Als $f(x) = 2g(x)$, dan is $f'(x) = 2g'(x)$

Uitwerking: Gebruik de regel voor afgeleide van een scalair veelvoud: $f'(x) = (2g(x))' = 2g'(x)$

2. Als $f(x) = (g(x))^2$, dan is $f'(x) = 2g(x)g'(x)$

CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Oefeningen Afgeleiden

Uitwerking: Gebruik de kettingregel: $f'(x) = (g^2(x))' = (2g(x)) \cdot g'(x)$ Alternatief: Gebruik de productregel: $f'(x) = (g^2(x))' = (g(x) \cdot g(x))' = g'(x)g(x) + g(x)g'(x) = 2g(x)g'(x)$

3. Als $f(x) = g(x^2)$, dan is $f'(x) = 2xg'(x^2)$

Uitwerking: Gebruik de kettingregel: $f'(x) = (g(x^2))' = g'(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \cdot g'(x^2)$

4. Als $f(x) = \operatorname{bgtan} g(x)$, dan is $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{1 + g^2(x)}$

Uitwerking: Gebruik de kettingregel: $f'(x) = (\operatorname{bgtan} g(x))' = \dfrac{1}{1 + g(x)^2} \cdot g'(x)$

5. Als $f(x) = g(3x) + 3g(x) + (g(x))^3 + g(x) + g(3) + xg(3) + g(3^x) + 3^{g(x)}$,
dan is $f'(x) = 3g'(3x) + 3g'(x) + 3g^2(x)g'(x) + g'(x) + g(3) + 3^x g'(3^x) \ln 3 + 3^{g(x)} g'(x) \ln 3$

Uitwerking: Gebruik dat de afgeleide van een som de som van de afgeleiden is. Dan leiden we term per term af: $(g(3x))' = 3g'(3x)$ (kettingregel), $(3g(x))' = 3g'(x)$ (afgeleide van een scalair product), $(g(x))^3 = 3g^2(x)g'(x)$ (kettingregel, of eventueel productregel twee keer toegepast), $(g(x))' = g'(x)$, $(g(3))' = 0$ (want dit is een constante functie), $(xg(3))' = g(3)$ (afgeleide van een eerstegraadsfunctie), $(g(3^x))' = 3^x g'(3^x) \ln 3$ (kettingregel) en $3^{g(x)} = 3^{g(x)} g'(x) \ln 3$ (kettingregel).

Oefening 13.1.5. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de functie f in het gegeven punt.

1. $f(x) = 4x^{-4} - 1$ in het punt met als x-coördinaat 1. $y = -16x + 19$

Uitwerking: De afgeleide van f wordt gegeven door $f'(x) = -16x^{-5}$. We zoeken de raaklijn in het punt met als x-coördinaat 1. Dit punt heeft als y-coördinaat $f(1) = 4 \cdot 1 - 1 = 3$. De afgeleide (rico van de raaklijn) voor de x-waarde 1 is $f'(1) = -16 \cdot 1 = -16$. Dan wordt de vergelijking van de raaklijn gegeven door

$$y - 3 = -16(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad y = -16x + 19.$$

2. $f(x) = 1 - \cos x$ in het punt met als x-coördinaat $\dfrac{\pi}{2}$. $y = x - \dfrac{\pi}{2} + 1$

3. $f(x) = 1 - x^2$ in het punt met als x-coördinaat 2. $y = -4x + 5$

Oefening 13.1.6. Bereken volgende afgeleiden:

1. $\dfrac{d^2}{dx^2} x^3 = 6x$

2. $\dfrac{d^3}{dx^3} 6x^3 = 36$

3. $\dfrac{d^{13}}{dx^{13}} (314x^9 + x^5 + \dfrac{\pi}{2}) = 0$

4. $\dfrac{d^{13}}{dx^{13}} 314^{15} = 0$

5. $\dfrac{d}{dx} \sin x = \cos x$

6. $\dfrac{d^2}{dx^2} \sin x = -\sin x$

CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Oefeningen Afgeleiden

7. $\frac{d^3}{dx^3}\sin x = -\cos x$
8. $\frac{d^4}{dx^4}\sin x = \sin x$
9. $\frac{d^{12}}{dx^{12}}\sin x = \sin x$
10. $\frac{d^{13}}{dx^{13}}\sin x = \cos x$
11. $\frac{d^{120}}{dx^{120}}\sin x = \sin x$
12. $\frac{d^n}{dx^n}x^n = n!$
13. $\frac{d}{dx}x^{n+1} = (n+1)\cdot x^n$
14. $\frac{d^n}{dx^n}x^{n+1} = (n+1)!\cdot x$
15. $\frac{d}{dx}x^{n!} = (n!)\cdot x^{n!-1}$

13.1.3 Niveau 3

Oefening 13.1.7. Bereken volgende limieten.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2+x} = 1.$

Uitwerking: Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$ dus kunnen we de regel van de l'Hôpital toepassen.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2+x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2x+1} = \frac{e^0}{1} = 1$$

2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x-1}{3e^x} = 1.$

Uitwerking: Onbepaaldheid $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x-1}{3e^x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x}{3e^x} = 1$$

3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(7x)}{x^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{7}{\pi}.$

Uitwerking: Onbepaaldheid $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(7x)}{x^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-7\sin(7x)}{2x} = \frac{-7\sin(7\frac{\pi}{2})}{2\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{\pi}$$

4. $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = 4a^{3/2}$ met $a>0$

CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Oefeningen Afgeleiden

Uitwerking: Deze limiet leidt tot de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$. De afgeleide van de teller is $2x$, en de afgeleide van de noemer is $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to a}\frac{2x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to a} 4x\sqrt{x} = \lim_{x\to a} 4x^{\frac{3}{2}}\,.$$

Oefening 13.1.8. Bereken volgende limieten.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 e^{-x^2} = 0$

Uitwerking: Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $\infty\cdot 0$, waarop de l'Hopital niet rechtstreeks van toepassing is. Maar je kan de limiet herschrijven als:

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^{x^2}}$$

en dat leidt tot de onbepaaldheid $\frac{\infty}{\infty}$, zodat we wel de regel van de l'Hôpital kunnen toepassen. De verhouding van de afgeleiden is

$$\frac{4x^3}{e^{x^2}2x} = \frac{2x^2}{e^{x^2}}\,.$$

De limiet van deze uitdrukking voor x naar oneindig is nog steeds de onbepaalde vorm $\frac{\infty}{\infty}$. We passen dus nog eens de regel van de l'Hôpital toe, en vinden uiteindelijk

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^4 e^{-x^2} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{e^{x^2}}\\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{e^{x^2}}\\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{e^{x^2}2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x^2}}\\ &= 0\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} 2x\ln x = 0$

Uitwerking: Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $0\cdot(-\infty)$, waarop de l'Hopital niet rechtstreeks van toepassing is. Maar je kan de limiet herschrijven als:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2x\ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}$$

en dat leidt tot de onbepaaldheid $\frac{-\infty}{\infty}$, zodat we wel de regel van de l'Hôpital kunnen toepassen.

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2x\ln x &= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}}\\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(-2x)\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = -1$

Uitwerking: Deze limiet leidt tot de onbepaaldheid $+\infty\cdot 0$, waarop de l'Hopital niet rechtstreeks van toepassing is. Maar je kan de limiet herschrijven als:

CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Oefeningen Afgeleiden

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}}$$

en dat leidt tot de onbepaaldheid $\frac{0}{0}$, zodat we wel de regel van de l'Hôpital kunnen toepassen.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{x+1} \\ &= -1\,.\end{aligned}$$

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} = -1/3$

Uitwerking: Deze limiet leidt tot de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$. We maken bij de berekening gebruik van de identiteit $2\sin x\cos x = \sin 2x$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4} &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x - \cos(x^2)2x}{4x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - \cos(x^2)2x}{4x^3} \\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - \left(-\sin(x^2)4x^2 + 2\cos(x^2)\right)}{12x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x + \sin(x^2)2x^2 - \cos(x^2)}{6x^2} \\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 2x + 4\sin(x^2)x + 4\cos(x^2)x^3 + \sin(x^2)2x}{12x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin 2x + 2x\sin(x^2) + 2x^3\cos(x^2) + x\sin(x^2)}{6x} \\ &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos 2x + 2\sin(x^2) + 4x^2\cos(x^2) + 6x^2\cos(x^2) - 4x^4\sin(x^2) + \sin(x^2) + 2x^2\cos(x^2)}{6} \\ &= \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}\end{aligned}$$

We hebben 4 keer de regel van de l'Hôpital toegepast. Controleer dat de regel van de l'Hôpital telkens werd toegepast bij de onbepaalde vorm $\dfrac{0}{0}$.

5. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1/3$

Uitwerking: We kunnen de regel dat de limiet van een verschil, het verschil van de limieten is niet gebruiken want dit zal resulteren in de onbepaalde vorm $\infty - \infty$. We kunnen de breuken op gelijke noemer zetten en

CC BY-NC-SA 4.0

13.1 Oefeningen Afgeleiden

krijgen zo de onbepaalde vorm $\frac{0}{0}$. We maken bij de berekening gebruik van de identiteit $2\sin x\cos x = \sin 2x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{2x\sin^2 x+2x^2\sin x\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x}\\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{2\sin^2 x+2x\sin 2x+2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{2\sin^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}\\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{2\sin 2x+4\sin 2x+8x\cos 2x+4x\cos 2x-4x^2\sin 2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{3\sin 2x+6x\cos 2x-2x^2\sin 2x}\\
&\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4\cos 2x}{12\cos 2x-16x\sin 2x-4x^2\cos 2x}\\
&= \frac{4}{12}=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

We komen pas na de vierde keer geen onbepaalde vorm meer uit. Controleer dat de regel van de l'Hôpital telkens werd toegepast bij de onbepaalde vorm $\dfrac{0}{0}$.

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

14.1.1 Niveau 1

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

Oefening 14.1.1. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + c$

Uitwerking: Basisintegraal $\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$ voor $r = -2$

2. $\int e^x\,dx = e^x + c$

Uitwerking: Dit is een basisintegraal.

3. $\int 8^x\,dx = \frac{8^x}{\ln 8} + c$

Uitwerking: Dit is een basisintegraal.

4. $\int \frac{3}{1+x^2}\,dx = 3\,\mathrm{bgtan}\,x + c$

Uitwerking: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a = 3$ en $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{bgtan}\,x + c$ is een basisintegraal.

5. $\int \frac{1}{2\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\tan x + c$

Uitwerking: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a = \frac{1}{2}$ en $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$ is een basisintegraal.

6. $\int 2^8 x\,dx = 2^7x^2 + c$

Uitwerking: $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met $a = 2^8$ en $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$.

7. $\int \left(3x^2 + 2x + 1\right)\,dx = x^3 + x^2 + x + c$

8. $\int 2y\,dy = y^2 + c$

Uitwerking: De naam van de integratievariabele heeft geen belang: $\int f(x)dx = \int f(u)du = \int f(y)dy$. We hebben hier enkel de letter x vervangen door y.

9. $\int \cos y\,dy = \sin y + c$

Uitwerking: Want $(\sin y)' = \cos y$. Dit is een basisintegraal.

10. $\int \sin t\,dt = -\cos t + c$

Uitwerking: Want $(\cos t)' = -\sin t$. Dit is een basisintegraal.

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

Oefening 14.1.2. Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

Uitwerking: Schrijfwijze 1:

Stel $u = 2x$, dan is $du = d(2x) = 2\,dx$, dus $dx = \frac{1}{2}\,du$. Dit *substitueren* we in $\int e^{2x}\,dx$:

$$\int e^{2x}\,dx = \int e^u\,\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + c = \frac{1}{2}e^{2x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

2. $\int 2^{3x}\,dx = \frac{2^{3x}}{3\ln 2} + c$

Uitwerking: Schrijfwijze 1:

Stel $u = 3x$, dan is $du = d(3x) = 3\,dx$, dus $dx = \frac{1}{3}\,du$. Dit *substitueren* we in $\int 2^{3x}\,dx$:

$$\int 2^{3x}\,dx = \int 2^u\,\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int 2^u\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{2^u}{\ln 2} + c, c \in \mathbb{R} = \frac{2^{3x}}{3\ln 2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int 2^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int 2^{3x}\,d(3x) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2^{3x}}{\ln 2} + c = \frac{2^{3x}}{3\ln 2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

We hebben deze oefening ook opgelost zonder substitutie, met als resultaat $\frac{8^x}{\ln 8} + c$. Merk op dat $2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$ en $3\ln 2 = \ln 2^3 = \ln 8$.

3. $\int \frac{4}{2x-3}\,dx = 2\ln|2x-3| + c$

Uitwerking: Schrijfwijze 1:

Stel $u = 2x - 3$, dan is $du = d(2x-3) = 2\,dx$, dus $dx = \frac{1}{2}\,du$. Dit *substitueren* we in $\int \frac{4}{2x-3}\,dx$:

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{2x-3}\,dx &= 4\int \frac{1}{2x-3}\,dx \\ &= 4\int \frac{1}{u}\,\frac{1}{2}du \\ &= 2\int \frac{1}{u}\,du \\ &= 2\ln|u| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= 2\ln|2x-3| + c, \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Je kan ook anders omgaan met de constante factor:

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{2x-3}\,dx &= 2\int \frac{1}{2x-3}\,2\,dx \\ &= 2\int \frac{1}{u}\,du \\ &= 2\ln|u| + c, \quad c \in \mathbb{R} \\ &= 2\ln|2x-3| + c, \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

Schrijfwijze 2:

$$\int \frac{4}{2x-3}dx = 2\int \frac{1}{2x-3}\,d(2x-3) = 2\ln|2x-3|+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

Oefening 14.1.3. Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x-3}\,dx = \ln|x-3|+c$

Uitwerking: **Schrijfwijze 1:** Stel $u = x-3$. Dan is $du = dx$. Dit *substitueren* we in de integraal en vinden

$$\int \frac{1}{x-3}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u|+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Dan vervangen we u terug door $x-3$, en vinden het antwoord $\ln|x-3|+c$, met $c\in\mathbb{R}$.
Schrijfwijze 2:

$$\int \frac{1}{x-3}\,dx = \int \frac{1}{x-3}\,d(x-3) = \ln|x-3|+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{3-x}\,dx = -\ln|3-x|+c$

Uitwerking: De uitwerking van deze integraal is analoog aan de vorige met het verschil dat $u = 3-x$ en dus $du = -dx$. Dit veroorzaakt het extra minteken in de oplossing.

3. $\displaystyle\int \frac{x}{3-x}\,dx = -3\ln|3-x| - x + c$

Uitwerking: Als je de hints gebruikt vind je dat je de integraal kan herschrijven als

$$\int \frac{3-u}{u}(-1)\,du = \int \frac{u-3}{u}\,du = \int 1\,du - \int \frac{3}{u}\,du,$$

waarbij we ook gebruikten dat $du = -dx = (-1)dx$. Dit is dus gelijk aan $u-3\ln|u|+c$ met $c\in\mathbb{R}$, en $u = 3-x$ invullen geeft dan $3-x-3\ln|3-x|+c$. Maar c is een willekeurige reële constante, en $3+c$ dus ook, zodat we $3+c$ even goed als c kunnen schrijven. Dit geeft dan de oplossing.

14.1.2 Niveau 2

Oefening 14.1.4. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int ax\,dx = \frac{a}{2}x^2 + c$

Uitwerking: Hier is a een constante en $\displaystyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ met a een constante.

2. $\displaystyle\int tx\,dx = \frac{t}{2}x^2 + c$

Uitwerking: Hier is t is een constante.

3. $\displaystyle\int tx\,dt = \frac{x}{2}t^2 + c$

Uitwerking: Hier is t de integratievariabele en x dus een constante.

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

Oefening 14.1.5. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\int x^3 \cdot \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + c$

Uitwerking: $\int x^3 \cdot \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{7}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}} + c = \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + c$

2. $\int \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + 21}{x^3}\, dx = x^2 + x + 3\ln|x| - \frac{21}{2x^2} + c$

Uitwerking: $\int \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 + 21}{x^3}\, dx = \int 2x + 1 + \frac{3}{x} + 21x^{-3} = x^2 + x + 3\ln|x| - \frac{21}{2}x^{-2} + c$

Oefening 14.1.6. Bereken volgende onbepaalde integralen via een geschikte substitutie:

1. $\int 2x\cos(x^2)\, dx = \sin(x^2) + c$

Uitwerking: **Schrijfwijze 1:**

Stel $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x\, dx$. Dit *substitueren* we in $\int 2x\cos(x^2)\, dx$:

$$\int 2x\cos(x^2)\, dx = \int \cos(u)\, du = \sin(u) + c = \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int 2x\cos(x^2)\, dx = \int \cos(x^2)\, dx^2 = \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

2. $\int (3x+5)\sqrt{3x+4}\, dx = \frac{2}{15}\sqrt{(3x+4)^5} + \frac{2}{9}\sqrt{(3x+4)^3} + c$

Uitwerking: **Schrijfwijze 1:** Stel $u = 3x + 4$ (hetgeen onder de wortel staat). Dan is $du = 3dx$ en $3x + 5 = u + 1$. We vullen dit allemaal in in de integraal en herschrijven deze als

$$\int (u+1)\sqrt{u}\frac{1}{3}\, du = \frac{1}{3}\int (u^{3/2} + u^{1/2})\, du.$$

Herinner je nu de basisintegraal $\int x^r\, dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$ met $r, c \in \mathbb{R}$ en $r \neq -1$. Deze kunnen we hier toepassen voor $r = 3/2$ en $r = 1/2$. Dan vinden we

$$\frac{1}{3}\int (u^{3/2} + u^{1/2})\, du = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + c\right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

De haakjes uitwerken, u vervangen door $3x + 4$ en $c/3$ vervangen door c (willekeurige constante) geeft dan het antwoord.

3. $\int 4x\sqrt{x-1}\, dx = \frac{8}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{8}{3}\sqrt{(x-1)^3} + c$

Uitwerking: Deze is volledig analoog aan de vorige oefening; enkel schrijfwijze 2 wordt hier behandeld.
Schrijfwijze 2:

$$\int 4x\sqrt{x-1}\, dx = 4\int (x-1+1)\sqrt{x-1}\, d(x-1) = 4\int (x-1)^{3/2}\, d(x-1) + 4\int (x-1)^{1/2}\, d(x-1).$$

De basisintegralen geven dan dat dit gelijk is aan

$$4\frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + 4\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

4. $\displaystyle\int \cos x \sin^2 x \, dx = \frac{\sin^3 x}{3} + c$

Uitwerking: **Schrijfwijze 1:** Stel $u = \sin x$. Dan is $du = \cos x dx$, zodat we de integraal kunnen herschrijven als

$$\int u^2 \, du.$$

Dit is een basisintegraal, en is gelijk aan $\frac{u^3}{3} + c$ met $c \in \mathbb{R}$. Vervolgens u terug vervangen door $\sin x$ levert het antwoord.

5. $\displaystyle\int \cos 2x \sin^3 2x \, dx = \frac{1}{8} \sin^4 2x + c$

Uitwerking: Deze integraal gaat vrij analoog aan de vorige. Met $u = \sin 2x$ vind je dat $du = 2\cos 2x dx$, en de basisintegraal $\int u^3 \, du = \frac{u^4}{4} + c$ met $c \in \mathbb{R}$ levert het antwoord.

6. $\displaystyle\int \frac{3\tan 2x}{5\cos^2 2x} \, dx = \frac{3}{20} \tan^2 2x + c$

Uitwerking: Hier helpt het te weten dat $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ of $d\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$. Volgens de kettingregel is dan $d\tan 2x = \frac{2}{\cos^2 2x} \, dx$. We proberen de substitutie $u(x) = \tan 2x$:

Schrijfwijze 1:

Stel $u = \tan 2x$, dan is $du = d\tan 2x = \frac{2}{\cos^2 2x} \, dx$.

$$\int \frac{3\tan 2x}{5\cos^2 2x} \, dx = \frac{3}{10} \int \tan 2x \cdot \frac{2}{\cos^2 2x} \, dx = \frac{3}{10} \int u \, du = \frac{3}{10} \frac{u^2}{2} + c = \frac{3}{20} \tan^2 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \frac{3\tan 2x}{5\cos^2 2x} \, dx = \frac{3}{10} \int \tan 2x \cdot \frac{2}{\cos^2 2x} \, dx = \frac{3}{10} \int \tan 2x \, d\tan 2x = \frac{3}{10} \frac{(\tan 2x)^2}{2} + c = \frac{3}{20} \tan^2 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Merk op dat we de substitutieregel $\int f(u(x)) \cdot u'(x) \, dx = \int f(u) \, du$ hebben toegepast met $f(u) = u$. Dan wordt de substitutieregel $\int u(x) \cdot u'(x) \, dx = \int u \, du$. De integrand $\frac{3\tan 2x}{5\cos^2 2x}$ kan op een constante factor na geschreven worden als het product van $u(x) = \tan 2x$ met $u'(x) = \frac{2}{\cos^2 2x}$:

$$\int \frac{3\tan 2x}{5\cos^2 2x} \, dx = \frac{3}{10} \int \underbrace{\tan 2x}_{u(x)} \underbrace{\frac{2}{\cos^2 2x}}_{u'(x)} \, dx.$$

7. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{2 - \cos x} \, dx = \cos x + \ln(2 - \cos x)^2 + c$

Uitwerking: De hints geven eigenlijk heel de oplossingsmethode. We doen hier onder enkel de berekening. Stel $u = 2 - \cos x$. Dan

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x \cos x}{2 - \cos x} \, dx &= \int \frac{2 - u}{u} \, du \\
&= \int \frac{2}{u} \, du - \int 1 \, du \\
&= 2\ln|u| - u + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&= 2\ln|2 - \cos x| - 2 + \cos x + c \\
&= \ln(2 - \cos x)^2 + \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

Bij de laatste stap gebruikten we dat $2\ln|x| = \ln|x|^2 = \ln x^2$ en dat c een willekeurige constante is, en $c-2$ dus ook.

8. $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{bgtan}(\sqrt{2}x) + c$

Uitwerking: **Schrijfwijze 1:** Stel $u = \sqrt{2}x$. Dan is $du = \sqrt{2}dx$, en kunnen we de integraal herschrijven als $\displaystyle\int \frac{1}{u^2+1}\frac{1}{\sqrt{2}}\,du$. Dit is een basisintegraal, namelijk die voor de boogtangens, en we vinden dus dat

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{bgtan}\,u + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

We vervangen u terug door $\sqrt{2}x$ en komen tot het antwoord.

9. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{bgtan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$

10. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \ln\,(x^2+4\,) + c$

Uitwerking: **Schrijfwijze 1:** Stel $u = x^2+4$. Dan is $du = 2xdx$. Hiermee kunnen we de integraal herschrijven als $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du$, en dit is een basisintegraal. De integraal is gelijk aan $\ln|u| + c$ met $c \in \mathbb{R}$. Hierin u terug vervangen door x^2+4 geeft $\ln\,|x^2+4\,| + c$. Merk op dat $x^2+4 \geq 0$, zodat we het resultaat ook kunnen schrijven als $\ln\,(x^2+4\,) + c$.

11. $\displaystyle\int \frac{3t}{1+t^2}\,dt = \frac{3}{2}\ln\,(1+t^2\,) + c$

Uitwerking: Volledig analoog aan de vorige met de voorgestelde substitutie in de hint.

12. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln\,(x^2+4\,) + c$

Uitwerking: Volledig analoog aan de vorige twee met de voorgestelde substitutie in de hint.

13. $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = 2\,\sqrt{x^2+4} + c$

Uitwerking: We hebben twee mogelijk substituties voor deze integraal.
Substitutie 1: Stel $u = x^2+4$. Dan is $du = 2xdx$. We herschrijven de integraal dan als

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \int u^{-1/2}\,du.$$

Dit is een basisintegraal, en is gelijk aan $\dfrac{1}{1/2}u^{1/2} + c$ met $c \in \mathbb{R}$. De breuk eenvoudiger schrijven als 2 en u terug vervangen door x^2+4 levert het antwoord.

$$\frac{1}{1/2}u^{1/2} + c = 2(x^2+4)^{1/2} + c$$

Substitutie 2: We zouden ook de substitutie $u = \sqrt{x^2+4}$ kunnen doen. Dan is $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+4}}2xdx$, want

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}2x,$$

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

waar de kettingregel niet vergeten mag worden. Dan is dus $du = \frac{x}{u}dx \Leftrightarrow udu = xdx$. Dit invullen in de integraal levert dan

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int \frac{2u}{u}\,du = 2\int du = 2u + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Als we dan $u = \sqrt{x^2+4}$ terug invullen, vinden we - uiteraard - hetzelfde antwoord terug.

14. $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dx = 2\sqrt{x^2+R^2} + c$

Uitwerking: Deze is volledig analoog aan de vorige oefening. Merk op dat de wortel altijd bestaat omdat $x^2 + R^2$ altijd positief is.

15. $\displaystyle\int \frac{2R}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dR = 2\sqrt{x^2+R^2} + c$

Uitwerking: Deze is eigenlijk exact dezelfde als de vorige oefening, maar de rollen van x en R zijn omgewisseld: x is nu een vaste constante, en R is de integratievariabele. Je kan echter volledig hetzelfde rekenen als de vorige oefening, ook al voelt het misschien wat raar om bijvoorbeeld iets af te leiden naar R.

16. $\displaystyle\int \frac{R^3}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dR = \frac{1}{3}(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}} - x^2(x^2+R^2)^{\frac{1}{2}} + c$

Uitwerking: Er zijn minstens twee mogelijke substituties hier. We behandelen beiden volgens **Schrijfwijze 1**.
Substitutie 1: Stel $u = x^2 + R^2$. Dan is $du = 2RdR$ (let op dat we hier R als veranderlijke beschouwen en x als een constante). Ook is dan $R^2 = u - x^2$. We kunnen de integraal dan herschrijven en uitrekenen:

$$\begin{aligned}\int \frac{R^3}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dR &= \int \frac{R^2}{\sqrt{x^2+R^2}} R\,dR \\ &= \int \frac{u-x^2}{\sqrt{u}}\frac{1}{2}\,du \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{u}{\sqrt{u}}\,du - x^2\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int u^{1/2}\,du - x^2\int u^{-1/2}\,du\right)\end{aligned}$$

Dit zijn twee basisintegralen, en uitwerken levert (met het vervangen van u door $x^2 + R^2$)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2} - x^2\frac{1}{1/2}u^{1/2}\right) + c = \frac{1}{3}(x^2+R^2)^{3/2} - x^2(x^2+R^2)^{1/2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Substitutie 2: We gebruiken hier de substitutie $u = \sqrt{x^2+R^2}$. Dan vinden we dat $du = \frac{2R}{2\sqrt{x^2+R^2}}dR \Leftrightarrow u\,du = R\,dR$. Ook hebben we dan dat $u^2 - x^2 = R^2$. Bijgevolg kunnen we de integraal herschrijven als

$$\begin{aligned}\int \frac{R^3}{\sqrt{x^2+R^2}}\,dR &= \int \frac{R^2}{\sqrt{x^2+R^2}} R\,dR \\ &= \int \frac{u^2-x^2}{u} u\,du \\ &= \int u^2\,du - x^2\int du.\end{aligned}$$

Dit zijn twee basisintegralen, en uitwerken levert dat dit gelijk is aan

$$\frac{1}{3}u^3 - x^2u + c = \frac{1}{3}(x^2+R^2)^{3/2} - x^2(x^2+R^2)^{1/2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

Oefening 14.1.7. Bereken volgende onbepaalde integralen via partiële integratie:

1. $\int xe^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Uitwerking: We geven de uitwerking enkel in de tweede schrijfwijze

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-3x}\,dx}_{du} &= -\frac{1}{3}\int \underbrace{x}_{f(x)}\,\underbrace{de^{-3x}}_{du} \\
&\overset{P.I.}{=} -\frac{1}{3}\left(\underbrace{xe^{-3x}}_{f(x)\cdot u(x)} - \int \underbrace{e^{-3x}}_{u(x)}\,\underbrace{dx}_{df}\right) \\
&= -\frac{1}{3}\left(xe^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}\,d(-3x)\right) \\
&= -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}\int e^{-3x}\,d(-3x) \\
&= -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Om de laatste integraal uit te rekenen werd substitutie toegepast (tweede schrijfwijze).

2. $\int \left(3x + x^2\right) e^x\,dx = \left(x^2 + x - 1\right)\,e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Uitwerking: We zien een factor e^x in de integrand, dus is het een goede gok om deze in de differentiaal te verwerken.
Schrijfwijze 2:

$$\begin{aligned}
\int \left(3x + x^2\right) e^x\,dx &= \int \left(3x + x^2\right)\,d(e^x) \\
&\overset{P.I.}{=} \left(3x + x^2\right) e^x - \int e^x\,d\left(3x + x^2\right) \\
&= \left(3x + x^2\right) e^x - \int e^x(3 + 2x)\,dx \\
&= \left(3x + x^2\right) e^x - \int (3 + 2x)\,d(e^x) \\
&\overset{P.I.}{=} \left(3x + x^2\right) e^x - \left((3 + 2x)e^x - \int e^x\,d(3 + 2x)\right) \\
&= \left(3x + x^2\right) e^x - \left((3 + 2x)e^x - \int e^x 2\,dx\right) \\
&= \left(3x + x^2\right) e^x - ((3 + 2x)e^x - 2e^x) + c \\
&= \left(3x + x^2\right) e^x - (3 + 2x)e^x + 2e^x + c \\
&= \left(x^2 + x - 1\right) e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

3. $\int \operatorname{bgtan} x\,dx = x\,\operatorname{bgtan} x - \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Uitwerking: We bekijken de integrand als $\operatorname{bgtan} x \cdot 1$.
Schrijfwijze 2:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{bgtan} x\,dx &\overset{P.I.}{=} x\operatorname{bgtan} x - \int x\,d(\operatorname{bgtan} x) \\
&= x\operatorname{bgtan} x - \int x\frac{1}{1 + x^2}\,dx \\
&= x\operatorname{bgtan} x - \int \frac{1}{1 + x^2}\frac{1}{2}\,d(1 + x^2) \\
&= x\operatorname{bgtan} x - \frac{1}{2}\ln|1 + x^2| + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

Omdat $1+x^2$ altijd positief is kunnen we de absolute waardetekens nog laten vallen.

4. $\displaystyle\int \operatorname{bgsin}\theta\, d\theta = \theta\ \operatorname{bgsin}\theta + \sqrt{1-\theta^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Uitwerking: Deze gaat analoog aan de vorige oefening. De integratieveranderlijke is hier θ in de plaats van x, maar dat verandert niets aan het rekenwerk. Maak ook gebruik van het feit dat $(\operatorname{bgsin}\theta)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}$.

5. $\displaystyle\int \ln\sqrt{x}\, dx = x\ \ln\sqrt{x} - \frac{1}{2}\, x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Uitwerking: Het eenvoudigste is om te gebruiken dat $\ln\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\ln x$. Dan kan je gewoon de berekening (voorbeeld 6) van de integraal $\displaystyle\int \ln x\, dx$ volgen en gebruiken dat

$$\int \frac{1}{2}\ln x\, dx = \frac{1}{2}\int \ln x\, dx.$$

Dan vind je dat

$$\int \ln\sqrt{x}\, dx = \frac{1}{2}\int \ln x\, dx = \frac{1}{2}(x\ln x - x) + c = x\ \ln\sqrt{x} - \frac{1}{2}\, x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

De andere methode zoekt het rekenwerk op. We berekenen eerst de afgeleide van $\ln\sqrt{x}$ (denk aan de kettingregel):

$$\left(\ln\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}.$$

Dan beschouwen we de integrand als $\ln\sqrt{x}\cdot 1$. We berekenen (volgens schrijfwijze 2):

$$\begin{aligned}\int \ln\sqrt{x}\, dx &\overset{P.I.}{=} x\ln\sqrt{x} - \int x\, d\left(\ln\sqrt{x}\right)\\ &= x\ln\sqrt{x} - \int x\frac{1}{2x}\, dx\\ &= x\ln\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int 1\, dx\\ &= x\ln\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + c \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int e^x \cos 3x\, dx = \frac{e^x}{10}\,(\cos 3x + 3\sin 3x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

Uitwerking: We geven hieronder de berekening (schrijfwijze 2). Noteer de te bepalen integraal met I.

$$\begin{aligned}
I &= \int \cos 3x \; d\,(e^x) \\
&\overset{P.I.}{=} \cos 3x \cdot e^x - \int e^x \; d\,(\cos 3x) \\
&= \cos 3x \cdot e^x + \int e^x \; 3\sin 3x \; dx \\
&= \cos 3x \cdot e^x + \int 3\sin 3x \; d\,(e^x) \\
&\overset{P.I.}{=} \cos 3x \cdot e^x + \left(3\sin 3x \cdot e^x - \int e^x \; d\,(3\sin 3x) \right) \\
&= \cos 3x \cdot e^x + \left(3\sin 3x \cdot e^x - \underbrace{\int e^x \; 9\cos 3x \; dx}_{9I} \right) \\
&= \cos 3x \cdot e^x + 3\sin 3x \cdot e^x - 9I + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $10I = \cos 3x \cdot e^x + 3\sin 3x \cdot e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$, en dus dat

$$I = \frac{1}{10}\left(\cos 3x + 3\sin 3x\right) e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

7. $\displaystyle\int \frac{\ln t}{t^2}\, dt = -\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$

Uitwerking: **Schrijfwijze 2:**

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln t}{t^2}\, dt &= \int \ln t \; d\left(-\frac{1}{t}\right) \\
&\overset{P.I.}{=} -\frac{\ln t}{t} - \int -\frac{1}{t}\; d(\ln t) \\
&= -\frac{\ln t}{t} + \int \frac{1}{t}\frac{1}{t}\, dt \\
&= -\frac{\ln t}{t} + \int \frac{1}{t^2}\, dt \\
&= -\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Oefening 14.1.8. Bereken volgende bepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \; dx = 1$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x \; dx &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \; d(\cos x) \\
&\overset{P.I.}{=} -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \; dx \\
&= 0 + \sin x\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\ d\theta = 1/3$

Uitwerking: Stel $u = \sin\theta$. Dan is $du = \cos\theta\, d\theta$, en aangezien θ gaat van 0 tot $\pi/2$, gaat $\sin\theta$ van 0 tot 1. We herschrijven de integraal dan als

$$\begin{aligned}\int_0^1 u^2\ du &= \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x \sin x\ dx = \frac{1}{12}$

Uitwerking: We gebruiken eerst de goniometrische formule $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$. In het huidige geval wordt deze $\cos 2x\ \sin x = \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin(-x)) = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$. De integraal wordt dan

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)\ dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/3} \sin 3x\ dx - \int_0^{\pi/3} \sin x\ dx\right).$$

In de eerste kunnen we nu een substitutie $u = 3x$ doen (let er op dat we hier dan de integratiegrenzen aanpassen!). We rekenen verder:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/3} \sin 3x\ dx - \int_0^{\pi/3} \sin x\ dx\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\int_0^{\pi} \sin u\ du + [\cos x]_0^{\pi/3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}[-\cos u]_0^{\pi} + \cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(-\cos\pi - (-\cos 0)) + \frac{1}{2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}(1+1) + \frac{1}{2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

4. $\int_0^1 xe^{2x}\ dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

Uitwerking:

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{2x}\ dx &= \int_0^1 x\frac{1}{2}\ d\left(e^{2x}\right) \\ &\overset{P.I.}{=} x\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\ dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\int_0^1 e^{2x}\ d(2x) \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{e^0}{4}\right) \\ &= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

5. $\int_0^1 \frac{x}{(4+x^2)^2}\ dx = \frac{1}{40}$

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

Uitwerking: Stel $u = 4 + x^2$. Dan is $du = 2x\,dx$, en aangezien x gaat van 0 tot 1, gaat u van 4 tot 5. We herschrijven de integraal dan als

$$\begin{aligned}\int_4^5 \frac{1}{u^2}\frac{1}{2}\,du &= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{u}\right]_4^5 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{5} - \frac{-1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{20} = \frac{1}{40}.\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{6\sqrt{3}+2}{3}$

Uitwerking: Stel $u = x + 1$. Dan is $du = dx$, en aangezien x gaat van 0 tot 2, gaat u van 1 tot 3. Ook is $2x + 1 = 2(u - 1) + 1 = 2u - 1$. We herschrijven de integraal dan als

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{2u-1}{\sqrt{u}}\,du &= 2\int_1^3 \frac{u}{\sqrt{u}}\,du - \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du \\ &= 2\int_1^3 u^{1/2}\,du - \int_1^3 u^{-1/2}\,du \\ &= 2\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^3 - \left[2u^{1/2}\right]_1^3 \\ &= \frac{4}{3}\left(3^{3/2} - 1\right) - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) \\ &= 4\sqrt{3} - \frac{4}{3} - 2\sqrt{3} + 2 \\ &= 2\sqrt{3} + \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

7. $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}$

Uitwerking: We gebruiken de goniometrische formule $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$ om de integraal te herschrijven. Dit geeft

$$\frac{1}{2}\left(\int_0^\pi 1\,dt + \int_0^\pi \cos 2t\,dt\right).$$

Deze twee integralen kunnen we dan eenvoudig oplossen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\int_0^\pi 1\,dt + \int_0^\pi \cos 2t\,dt\right) &= \frac{1}{2}\left(t\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2t\,d(2t)\right) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} + 0 - 0 = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

8. $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \cos 3x\,dx = -\frac{2\pi}{9}$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/20.38)

14.1 Oefeningen Integralen

Uitwerking: We maken een berekening waarin we twee keer partieel integreren

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2\cos 3x\,dx &= \frac{1}{3}\int_0^\pi x^2\,d(\sin 3x)\\ &\overset{P.I.}{=} \frac{1}{3}\left(x^2\sin 3x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin 3x\,d(x^2)\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\pi^2\sin 3\pi - 2\int_0^\pi x\sin 3x\,dx\right)\\ &= \frac{2}{9}\int_0^\pi x\,d(\cos 3x)\\ &\overset{P.I.}{=} \frac{2}{9}\left(x\cos 3x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos 3x\,dx\right)\\ &= \frac{2}{9}\left(\pi\cos 3\pi - \frac{1}{3}\sin 3x\Big|_0^\pi\right)\\ &= -\frac{2}{9}\pi - \frac{2}{27}(0-0) = -\frac{2\pi}{9}\end{aligned}$$

9. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = 4-\ln 9$

Uitwerking:

Stel $u = 1+\sqrt{x}$. Dan is $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx = \dfrac{1}{2(u-1)}dx$. Aangezien x gaat van 0 tot 4 gaat u van $1+\sqrt{0}=1$ tot $1+\sqrt{4}=3$. We herschrijven de integraal dus als

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{1}{u}2(u-1)\,du &= 2\left(\int_1^3 1\,du - \int_1^3 \frac{1}{u}\,du\right)\\ &= 2\left([u]_1^3 - [\ln|u|]_1^3\right)\\ &= 2\big((3-1)-(\ln 3-\ln 1)\big)\\ &= 4-2\ln 3 = 4-\ln 9.\end{aligned}$$

Merk op: je kan ook eerst de *onbepaalde* integraal uitrekenen tot $2(1+\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x}))$, en dan de grenzen invullen:

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \Big[2(1+\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x}))\Big]_0^4\\ &= 2(1+\sqrt{4}-\ln(1+\sqrt{4})) - 2(1+0-\ln(1+0))\\ &= 2(3-\ln(3)) - 2 = 4-2\ln 3\end{aligned}$$

Met deze methode moet je de grenzen niet omrekenen naar de nieuwe variabele u.

10. $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{e}$

Uitwerking: Stel $u = x^2$. Dan is $du = 2x\,dx$, en aangezien x gaat van 0 tot 1 gaat u ook van 0 tot 1. Bijgevolg kunnen we de integraal herschrijven als

$$\frac{1}{2}\int_0^1 ue^{-u}\,du.$$

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

Deze kunnen we oplossen met partiële integratie.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1 u\,e^{-u}\,du &= -\frac{1}{2}\int_0^1 u\,d\left(e^{-u}\right)\\ &\overset{P.I.}{=} -\frac{1}{2}u\,e^{-u}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-u}\,du\\ &= -\frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-u}\Big|_0^1\\ &= -\frac{1}{2e} - \frac{1}{2e} + \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{e}\end{aligned}$$

14.1.3 Niveau 3

Oefening 14.1.9. Bereken volgende onbepaalde integralen

1. $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}\,dx = x + \cos x + c$

Uitwerking: Met de goniometrische formule $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ en het merkwaardig product $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ kunnen we de integrand herschrijven:

$$\frac{\cos^2 x}{1+\sin x} = \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x} = \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1+\sin x} = 1 - \sin x.$$

We krijgen nu basisintegralen:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}\,dx &= \int (1-\sin x)\,dx\\ &= \int 1\,dx + \int (-\sin x)\,dx\\ &= x + \cos x + c \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + c$

Uitwerking: We stellen eerst $u = x^2$, dan is $du = 2x\,dx$. We herschrijven de integraal:

$$\begin{aligned}\int x^2\,x\,e^{x^2}\,dx &= \int u\,e^u \frac{1}{2}\,du\\ &= \frac{1}{2}\int u\,d\left(e^u\right)\\ &\overset{P.I.}{=} \frac{1}{2}\left(u\,e^u - \int e^u\,du\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(u\,e^u - e^u - c\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(We hebben hier $-c/2$ vervangen door c.)

3. $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(\ln x) - \frac{1}{2}x\cos(\ln x) + c$

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

Uitwerking: We beschouwen de integrand als $\sin(\ln x)\cdot 1$. We zullen twee keer partiële integratie toepassen tot we de te berekenen integraal zelf terug vinden. Vergeet de kettingregel niet toe te passen, en vind de volgende berekening:

$$\begin{aligned} I = \int \sin(\ln x)\,dx &\overset{P.I.}{=} x\,\sin(\ln x) - \int x\,d\big(\sin(\ln x)\big) \\ &= x\,\sin(\ln x) - \int x\,\cos(\ln x)\frac{1}{x}\,dx \\ &= x\,\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx \\ &\overset{P.I.}{=} x\,\sin(\ln x) - \left(x\,\cos(\ln x) - \int x\,d\big(\cos(\ln x)\big)\right) \\ &= x\,\sin(\ln x) - x\,\cos(\ln x) - \underbrace{\int x\,\sin(\ln x)\frac{1}{x}\,dx}_{I} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $2I = x\,\sin(\ln x) - x\,\cos(\ln x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$, en dus dat

$$I = \frac{1}{2}x\,\sin(\ln x) - \frac{1}{2}x\,\cos(\ln x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Oefening 14.1.10. Bereken volgende onbepaalde integralen

1. $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+1}{2x^2+1}\,dx = -\frac{3}{4}\ln(2x^2+1) + x + c \quad c \in \mathbb{R}$

Uitwerking: We splitsen de breuk als volgt:

$$\frac{2x^2-3x+1}{2x^2+1} = \frac{2x^2+1}{2x^2+1} - \frac{3x}{2x^2+1} = 1 - \frac{3x}{2x^2+1}.$$

We kunnen de integraal dan splitsen, en gebruiken dat $(2x^2+1)' = 4x$, en dus $d\left(2x^2+1\right) = 4dx$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2-3x+1}{2x^2+1}\,dx &= \int 1\,dx - 3\int \frac{x}{2x^2+1}\,dx \\ &= \int 1\,dx - 3\int \frac{1}{2x^2+1}\,\frac{1}{4}d\left(2x^2+1\right) \\ &= x - \frac{3}{4}\ln\left|2x^2+1\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Omdat $2x^2+1$ altijd positief is mogen we de absolute waardetekens ook vervangen door haakjes.

2. $\displaystyle\int \frac{4}{x^2-4x+4}\,dx = \frac{-4}{x-2} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$

Uitwerking: Merk op dat $x^2-4x+4 = (x-2)^2$. Met behulp van substitutie en een basisintegraal vinden we dan

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{x^2-4x+4}\,dx &= \int \frac{4}{(x-2)^2}\,d(x-2) \\ &= 4\int (x-2)^{-2}\,d(x-2) \\ &= 4\frac{1}{-2+1}(x-1)^{-2+1} + c \\ &= \frac{-4}{x-2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

14.1 Oefeningen Integralen

Wie de substitutie liever expliciet opschrijft met $u = x - 2$, en dus $du = dx$ krijgt

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{x^2-4x+4}\,dx &= \int \frac{4}{u^2}\,du \\ &= \frac{-4}{u} + c \\ &= \frac{-4}{x-2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int \frac{3t+1}{1+t^2}\,dt = \frac{3}{2}\ln|1+t^2| + \operatorname{bgtan} t + c, \qquad c \in \mathbb{R}$

Uitwerking: We splitsen de integraal en passen een substitutie toe:

$$\begin{aligned}\int \frac{3t+1}{1+t^2}\,dt &= \int \frac{3t}{1+t^2}\,dt + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= 3\int \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{2}\,d\left(1+t^2\right) + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= \frac{3}{2}\ln|1+t^2| + \operatorname{bgtan} t + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Omdat $1+t^2$ altijd positief is kunnen we de absolute waardetekens vervangen door gewone haakjes.

4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+7}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{bgtan}\frac{x-2}{\sqrt{3}} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$

Uitwerking: De uitwerking is volledig hetzelfde als het analoge voorbeeld. We geven hier enkel de resultaten van de berekeningen.
De discriminant is $(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 7 = -12 < 0$. We kunnen de tweedegraads veelterm herschrijven zonder lineaire term via

$$x^2-4x+7 = x^2-4x+4+3 = (x-2)^2+3 = 3\left(\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right).$$

De substitutie $u = \dfrac{x-2}{\sqrt{3}}$ levert dan het antwoord.

5. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$

Uitwerking: De oplossing is volledig analoog aan de eerste oefening.

6. $\displaystyle\int \frac{3x+3}{x^2+2x+1}\,dx = 3\ln|x+1| + c, \qquad c \in \mathbb{R}$

Uitwerking: Merk op dat de noemer gelijk is aan $x^2+2x+1 = (x+1)^2$. Dan kunnen we narekenen dat

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+3}{x^2+2x+1}\,dx &= 3\int \frac{x+1}{(x+1)^2}\,dx \\ &= 3\int \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= 3\int \frac{1}{x+1}\,d(x+1) \\ &= 3\ln|x+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

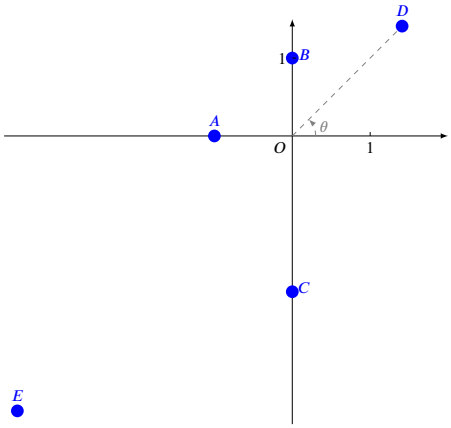
15.1 Oefeningen poolcoördinaten

15.1.1 Niveau 2

Oefening 15.1.1. Omrekenen van poolcoördinaten naar cartesische coördinaten.

1. Het punt A met poolcoördinaten $(1, \pi)$ heeft cartesische coördinaten $(x, y) = (-1, 0)$.
2. Het punt B met poolcoördinaten $(1, \frac{\pi}{2})$ heeft cartesische coördinaten $(x, y) = (0, 1)$.
3. Het punt C met poolcoördinaten $(2, -\frac{\pi}{2})$ heeft cartesische coördinaten $(x, y) = (0, -2)$.
4. Het punt D met poolcoördinaten $(2, \frac{\pi}{4})$ heeft cartesische coördinaten $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
5. Het punt E met poolcoördinaten $(5, \frac{5\pi}{4})$ heeft cartesische coördinaten $(x, y) = (-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2})$.

Uitwerking:



Voor punten A tot en met C kan je de oplossing eenvoudig aflezen van een schets zoals hierboven getoond. Voor D en E is het wellicht beter een korte berekening te maken aan de hand van de formules $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Om de cosinus en sinus uit te rekenen, kan je best beroep doen op de formules voor verwante hoeken en gekende waardes voor standaardhoeken.

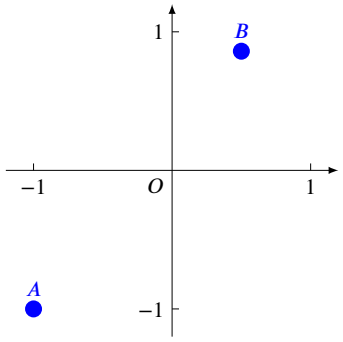
Oefening 15.1.2. Omrekenen van cartesische coördinaten naar poolcoördinaten. (Kies de hoek θ tussen 0 en 2π).

1. Het punt A met cartesische coördinaten $(-1, -1)$ heeft poolcoördinaten $(r, \theta) = (\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$.
2. Het punt B met cartesische coördinaten $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ heeft poolcoördinaten $(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{3})$.

Uitwerking:

CC BY-NC-SA 4.0

15.1 Oefeningen poolcoördinaten



Begin allereerst door $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ uit te rekenen. Voor punt A kan je θ aflezen op de figuur. Voor punt B gebruik je de formules $x = r\cos\theta$ en $y = r\sin\theta$ om de hoek θ eenduidig te bepalen. Dit kan je uiteraard ook doen voor punt A.

CC BY-NC-SA 4.0

15.2 Oefeningen Vectoren in de Fysica

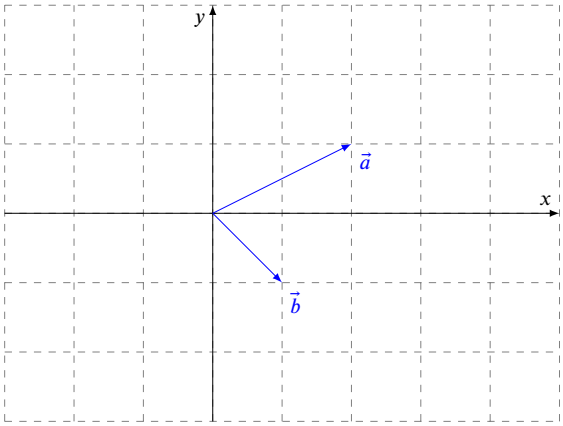
We werken steeds in een gegeven xy-assenstelsel, en noteren $\vec{\mathbf{e}}_x$ en $\vec{\mathbf{e}}_y$ voor de eenheidsvectoren op respectievelijk de x- en de y-as. We tekenen vrije vectoren door ze te laten aangrijpen in de oorsprong.

15.2.1 Niveau 1

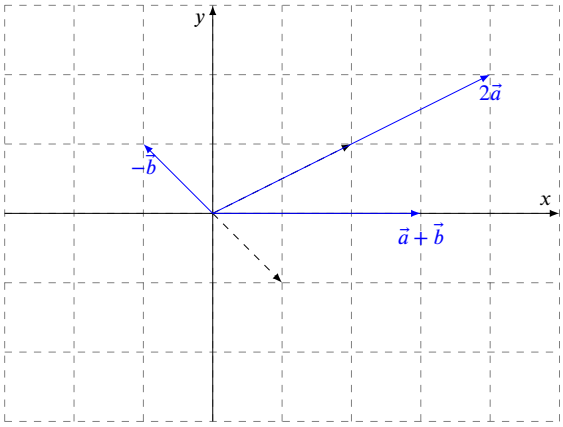
Oefening 15.2.1. Duid op een tekening de vectoren $\vec{a} = 2\vec{\mathbf{e}}_x + \vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{b} = \vec{\mathbf{e}}_x - \vec{\mathbf{e}}_y$ aan.

Duid daarna ook de vectoren $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a}$ en $-\vec{b}$ aan.

Uitwerking:



De vectoren $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a}$ en $-\vec{b}$ zijn dan:



15.2.2 Niveau 2

Oefening 15.2.2. Teken de vectoren $\vec{a} = \vec{\mathbf{e}}_x + 2\vec{\mathbf{e}}_y$, $\vec{b} = -2\vec{\mathbf{e}}_x + 3\vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{c} = \vec{\mathbf{e}}_x - \vec{\mathbf{e}}_y$. Bereken en construeer daarna ook de vectoren

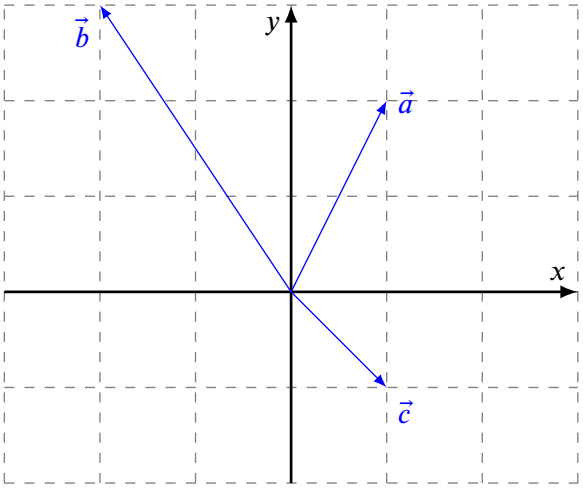
- $\vec{s} = 2\vec{a} - \vec{b}$
- $\vec{t} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - 2\vec{c}\right)$

CC BY-NC-SA 4.0

15.2 Oefeningen Vectoren in de Fysica

$\vec{s} = 4\vec{\mathbf{e}}_x + \vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{t} = -3\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{e}}_y$

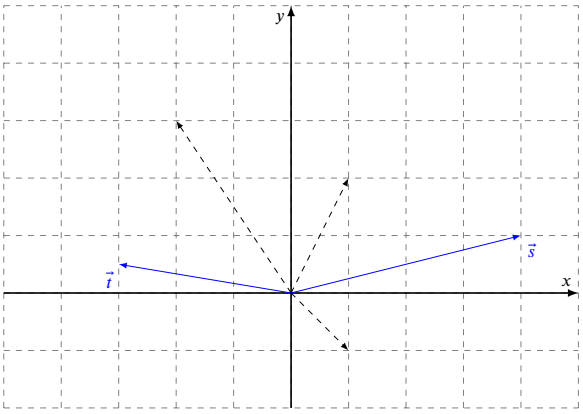
Uitwerking: De vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ zijn hieronder getekend:



Je kan de vectoren $\vec{s}$ en $\vec{t}$ bepalen door met componenten te rekenen, of ze tekenen aan de hand van de constructies voor sommen en veelvouden van vectoren en vervolgens de componenten af te lezen.

Voor de **eerste** methode berekenen we de componenten van de twee vectoren:

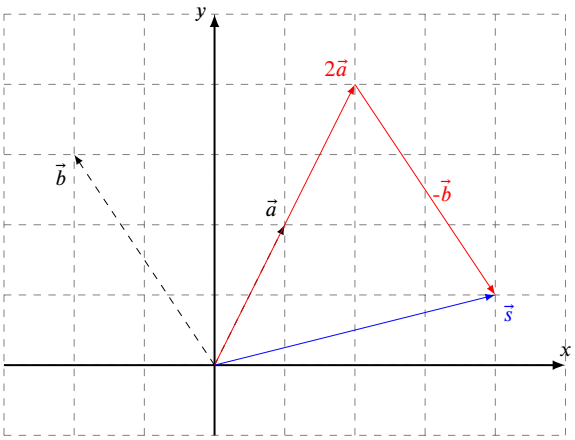
$$\vec{s} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2(\vec{\mathbf{e}}_x + 2\vec{\mathbf{e}}_y) - (-2\vec{\mathbf{e}}_x + 3\vec{\mathbf{e}}_y) = 4\vec{\mathbf{e}}_x + \vec{\mathbf{e}}_y$$
$$\frac{1}{2}\left(\vec{b} - 2\vec{c}\right) = \frac{1}{2}\left[-2\vec{\mathbf{e}}_x + 3\vec{\mathbf{e}}_y - 2(\vec{\mathbf{e}}_x - \vec{\mathbf{e}}_y)\right] = -2\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{5}{2}\vec{\mathbf{e}}_y$$
$$\vec{t} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - 2\vec{c}\right) = -\vec{\mathbf{e}}_x - 2\vec{\mathbf{e}}_y + (-2\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{5}{2}\vec{\mathbf{e}}_y) = -3\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{e}}_y$$



De **tweede** methode is handig om de vector $\vec{s}$ te bepalen, de vector $\vec{t}$ bepaal je best aan de hand van de eerste methode.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/20.38)

15.2 Oefeningen Vectoren in de Fysica



Oefening 15.2.3. $\vec{a} = \vec{\mathbf{e}}_x - \sqrt{3}\vec{\mathbf{e}}_y$

1. $\vec{a}$ heeft grootte $||\vec{a}|| = 2$

Uitwerking: De grootte van de vector is $||\vec{a}|| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$.

2. $\vec{a}$ maakt een hoek van $-\pi/3$ radialen met de positieve x-as.

Uitwerking: Om de hoek θ tussen de vector en de positieve x-as te bepalen, zijn er twee methodes.

Voor de **eerste methode** kunnen we gebruiken dat $\tan\theta = \dfrac{a_y}{a_x} = -\sqrt{3}$. Aangezien $\tan\pi/3 = \sqrt{3}$, is $\tan(-\pi/3) = -\sqrt{3}$ maar ook $\tan(-\pi/3+\pi) = \tan 2\pi/3 = -\sqrt{3}$: de eerste hoek ligt in het vierde kwadrant, de tweede hoek in het tweede kwadrant. Aangezien $a_x > 0$ en $a_y < 0$, zal de hoek in het vierde kwadrant liggen: we besluiten dus dat $\theta = -\pi/3$.

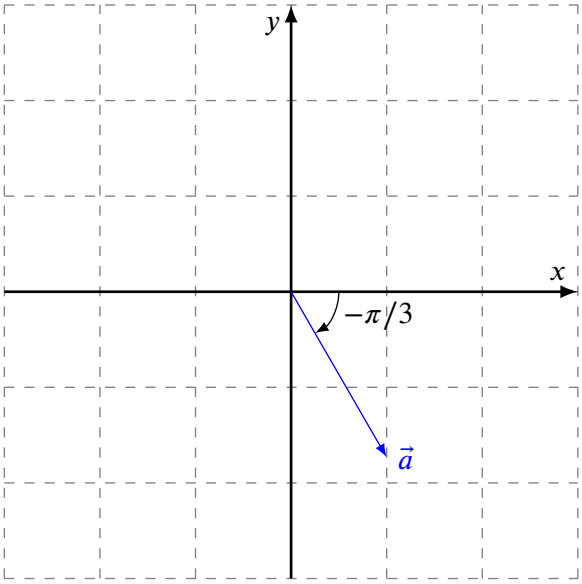
De **tweede methode** maakt gebruik van sinus en cosinus: als θ de hoek is tussen de vector en de positieve x-as, dan is $a_x = ||\vec{a}||\cos\theta$ en $a_y = ||\vec{a}||\sin\theta$. Dus bekomen we volgend stelsel:

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta &= -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Dan vinden we dat $\theta = -\pi/3$.

CC BY-NC-SA 4.0

15.2 Oefeningen Vectoren in de Fysica



Oefening 15.2.4. Een gegeven vector $\vec{a}$ met lengte 10 maakt een hoek van $5\pi/4$ met de x-as.

1. Bereken de vectorcomponenten volgens $\vec{\mathbf{e}}_x$: $a_x = -5\sqrt{2}$

2. Bereken de vectorcomponenten volgens $\vec{\mathbf{e}}_y$: $a_y = -5\sqrt{2}$

Oefening 15.2.5. Bereken de grootte van de vectoren $\vec{a} = 3\vec{\mathbf{e}}_x + 4\vec{\mathbf{e}}_y$, $\vec{b} = 4\vec{\mathbf{e}}_x - 3\vec{\mathbf{e}}_y$ en $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Geef ook eenheidsvectoren met dezelfde richting en zin als deze vectoren.$||\vec{a}|| = 5$, $||\vec{b}|| = 5$, $||\vec{c}|| = \sqrt{50}$, $\hat{a} = \frac{3}{5}\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{4}{5}\vec{\mathbf{e}}_y$, $\hat{b} = \frac{4}{5}\vec{\mathbf{e}}_x - \frac{3}{5}\vec{\mathbf{e}}_y$, $\hat{c} = \frac{7}{\sqrt{50}}\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{1}{\sqrt{50}}\vec{\mathbf{e}}_y$

Uitwerking: Merk op dat $\vec{c} = 7\vec{\mathbf{e}}_x - \vec{\mathbf{e}}_y$.

$$||\vec{a}|| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$
$$||\vec{b}|| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$
$$||\vec{c}|| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

Om eenheidsvectoren met dezelfde richting en zin te vinden, volstaat het om de x- en y-component te delen door de norm van de vector:

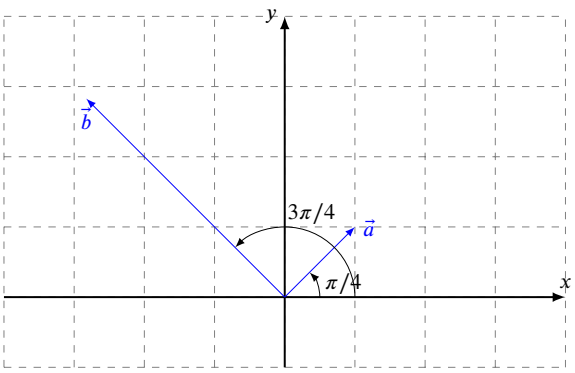
$$\hat{a} = \frac{3}{5}\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{4}{5}\vec{\mathbf{e}}_y$$
$$\hat{b} = \frac{4}{5}\vec{\mathbf{e}}_x - \frac{3}{5}\vec{\mathbf{e}}_y$$
$$\hat{c} = \frac{7}{\sqrt{50}}\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{1}{\sqrt{50}}\vec{\mathbf{e}}_y$$

CC BY-NC-SA 4.0

15.2 Oefeningen Vectoren in de Fysica

Oefening 15.2.6. De vector $\vec{a}$ heeft lengte $\sqrt{2}$ en maakt een hoek van $\pi/4$ radialen met de positieve x-as. De vector $\vec{b}$ heeft lengte 4, staat loodrecht op $\vec{a}$ en voldoet bovendien aan $b_y > 0$.
Bepaal de componenten van de vector $\vec{b}$ en teken de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$.$b_x = -2\sqrt{2}$, $b_y = 2\sqrt{2}$.

Uitwerking: De vector $\vec{b}$ maakt ofwel een hoek van $\pi/4 - \pi/2 = -\pi/4$ ofwel $\pi/4 + \pi/2 = 3\pi/4$ radialen met de positieve x-as. Omdat $b_y > 0$, is de tweede optie correct. Dan is $b_x = 4\cos 3\pi/4$, $b_y = 4\sin 3\pi/4$. Met verwante hoeken vinden we $b_x = 4 \cdot (-\cos \pi/4) = 4 \cdot (-\sqrt{2}/2) = -2\sqrt{2}$ en $b_y = 4 \cdot \sin \pi/4 = 4 \cdot \sqrt{2}/2 = 2\sqrt{2}$.



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/20.38)

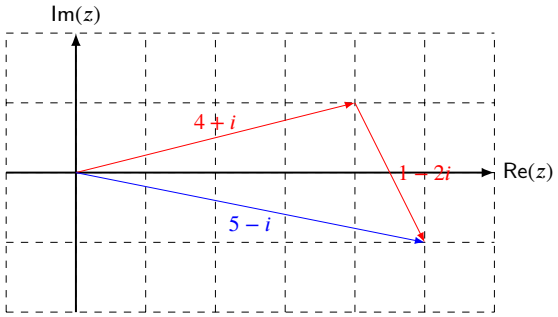
16.1 Oefeningen Complexe getallen

16.1.1 Niveau 1

Oefening 16.1.1. Bereken volgende uitdrukkingen. Schrijf de complexe getallen in de vorm $a + bi$.

1. $(4 + i) + (1 - 2i) = 5 - i$

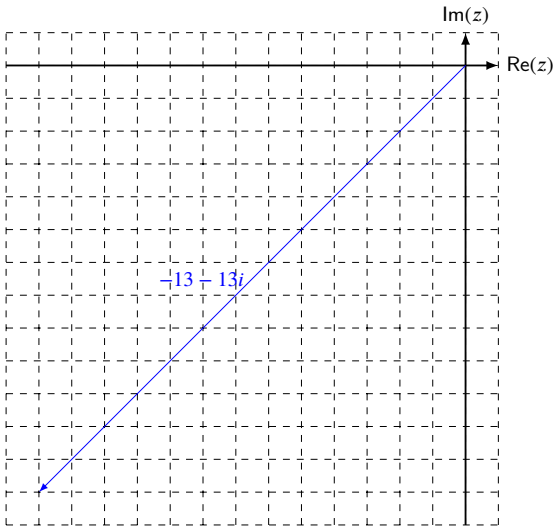
Uitwerking: Je kan ofwel reëel en imaginair deel van beide complexe getallen bij elkaar optellen om het antwoord te vinden, ofwel in het complexe vlak de vectorsom maken.



2. $(2 + 3i)(-5 + i) = -13 - 13i$

Uitwerking:

$$(2 + 3i)(-5 + i) = -5 + 2i + 3i \cdot (-5)3i \cdot i = -13 - 13i$$



3. $\overline{(3 - 2i)} = 3 + 2i$

4. $|3 - 2i| = \sqrt{13}$

Uitwerking: $|3 - 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

CC BY-NC-SA 4.0

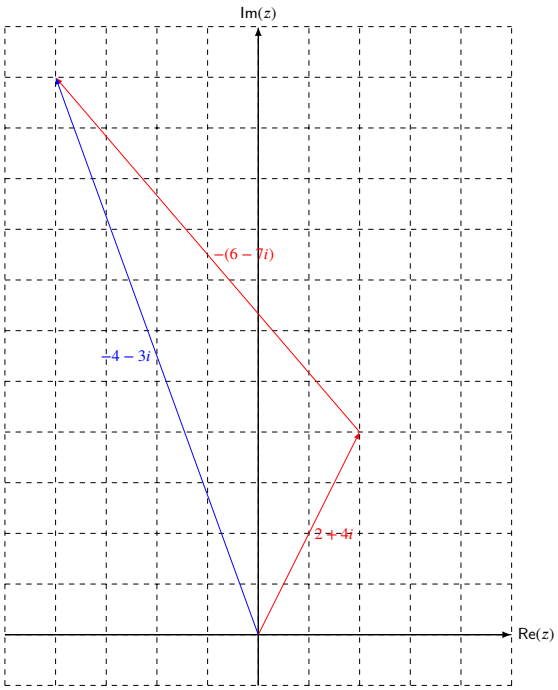
16.1 Oefeningen Complexe getallen

16.1.2 Niveau 2

Oefening 16.1.2. Bereken volgende uitdrukkingen. Schrijf de complexe getallen in de vorm $a + bi$.

1. $(2+4i) - (6-7i) = -4+11i$

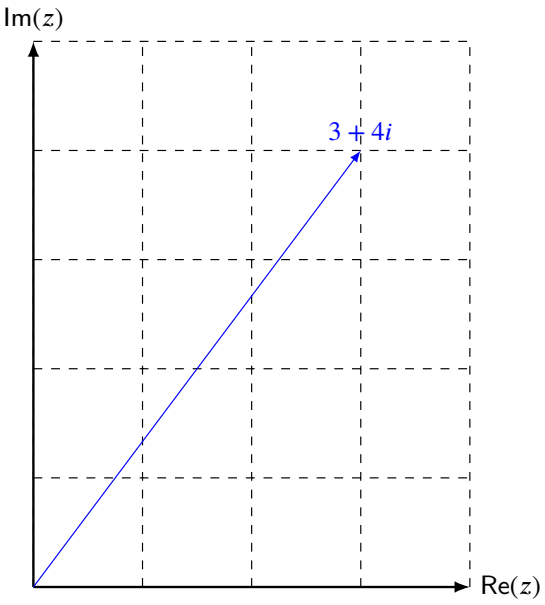
Uitwerking: Je kan ofwel reëel en imaginair deel van beide complexe getallen bij elkaar optellen om het antwoord te vinden, ofwel in het complexe vlak de vectorsom maken.



2. $(2+i)^2 = 3+4i$

Uitwerking:

$$(2+i)^2 = 4+4i+i^2 = 3+4i$$

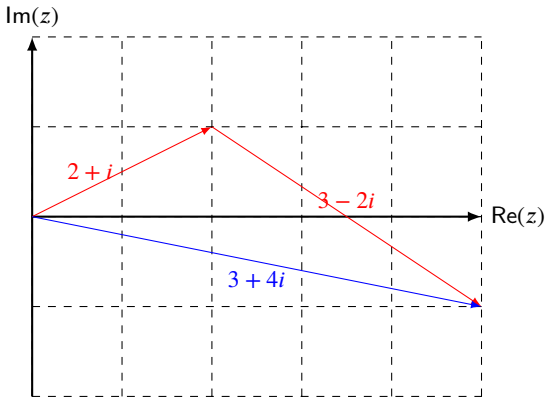


CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Oefeningen Complexe getallen

3. $(2+i)+\overline{(3+2i)} = 5-i$

Uitwerking: Merk op dat $\overline{3+2i} = 3-2i$. Dus moeten we de som $(2+i)+(3-2i)$ bepalen. Je kan ofwel reëel en imaginair deel van beide complexe getallen bij elkaar optellen om het antwoord te vinden, ofwel in het complexe vlak de vectorsom maken.

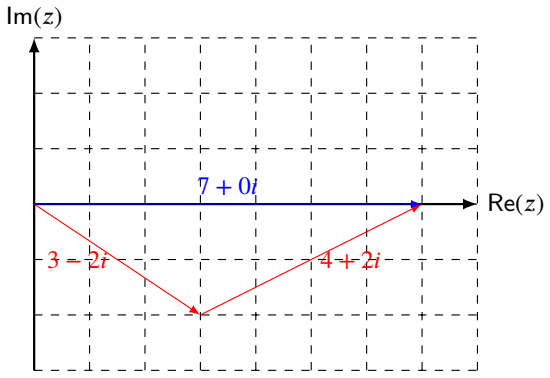


4. $(5-6i)(5+6i) = 61$

Uitwerking: Je kan de rekenregel $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ gebruiken. Dan is $(5-6i)(5+6i) = 25+36 = 61$.

5. $|3-2i+\overline{4-2i}| = 7$

Uitwerking: Merk eerst op dat $\overline{4-2i} = 4+2i$. Je kan ofwel reëel en imaginair deel van beide complexe getallen bij elkaar optellen om de som van twee complexe getallen te vinden, ofwel in het complexe vlak de vectorsom maken.



6. $|3+4i+4+3i| = 7\sqrt{2}$

Uitwerking: $|3+4i+4+3i| = |7+7i| = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2}$.

7. $|3+4i|+|4+3i| = 10$

Uitwerking: $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$
$|4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

8. $\left|\dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}\right| = \dfrac{5}{2}$

CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Oefeningen Complexe getallen

Oefening 16.1.3. Een complex getal z kunnen we schrijven als $z = a + bi$ met a en b reële getallen en $i^2 = -1$. Dan zijn in de lijst

$$\frac{(1+i)^4}{4}, \quad \frac{(1-i)^4}{4}, \quad \frac{(1+i)^2}{2}, \quad \frac{(1-i)^2}{2}, \quad i^2$$

precies 3 complexe getallen gelijk zijn aan -1?3

Uitwerking: Er is al minstens één van deze complexe getallen gelijk aan -1: de laatste, i^2, per definitie van de imaginaire eenheid.

Je kan best te werk gaan door de derde en vierde uitdrukking te bepalen: de eerste twee complexe getallen zijn hun kwadraten. Hiervoor maken we de volgende berekeningen:

$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$$
$$(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i$$

en dus vinden we dat

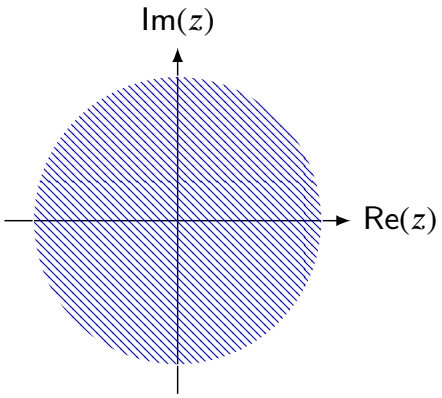
$$\frac{(1+i)^2}{2} = i$$
$$\frac{(1-i)^2}{2} = -i$$

Het derde en vierde complexe getal zijn dus niet gelijk aan -1. Hun kwadraten zijn echter wel gelijk aan -1: drie van de complexe getallen zijn dus gelijk aan -1.

Oefening 16.1.4. Schets in het complexe vlak de gebieden omschreven door volgende vergelijkingen:

1. $|z| < 1$

Uitwerking: $|z|$ is de afstand van z tot de oorsprong. Alle complexe getallen waarvan de afstand tot de oorsprong kleiner is dan 1 liggen *binnen* een cirkel met straal 1, de rand zelf wordt dus niet meegerekend:

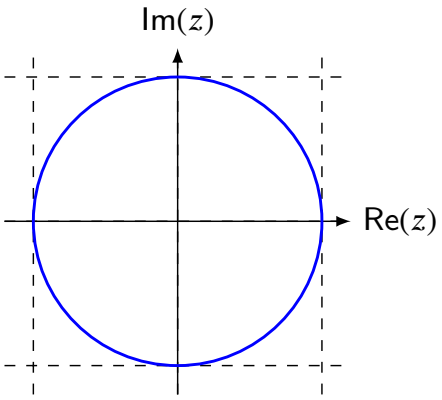


2. $|z| = 1$

Uitwerking: $|z|$ is de afstand van z tot de oorsprong. Alle complexe getallen waarvan de afstand tot de oorsprong gelijk is aan 1 liggen dus op een cirkel met straal 1:

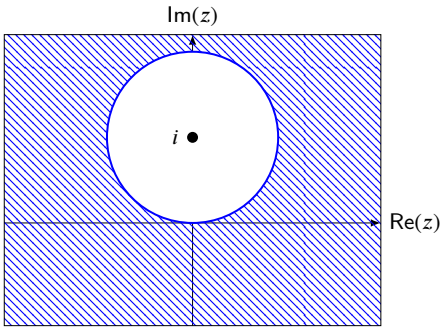
CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Oefeningen Complexe getallen



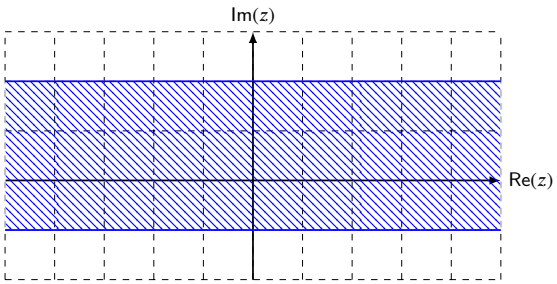
3. $|z - i| \geq 1$

Uitwerking: Alle complexe getallen waarvoor $|z - i| \geq 1$ zijn alle complexe getallen z waarvoor de afstand tot i groter of gelijk is aan 1:



4. $-1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 2$

Uitwerking: Deze ongelijkheden bepalen een *horizontale* strook, aangezien het imaginaire deel van het complex getal in een interval moet liggen. De randen van de strook behoren tot het geschetste domein.

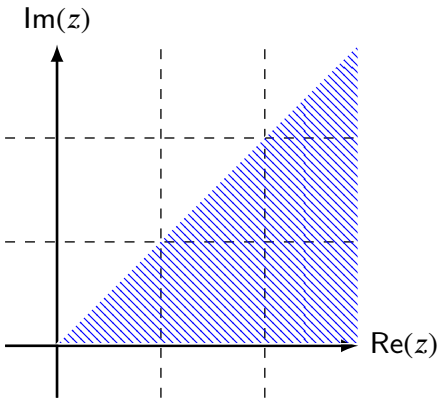


5. $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z) > 0$

Uitwerking: Als $z = a + bi$, dan betekent $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z) > 0$ dat $a > b > 0$. Dit is het gebied onder de rechte $y = x$, (daar is $a > b$), en boven de x-as (daar is $b > 0$):

CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Oefeningen Complexe getallen



Oefening 16.1.5. Voer volgende delingen uit door de opgave te schrijven in de vorm $a + bi$.

1. $\dfrac{7}{i} = -7i$

Uitwerking: We vermenigvuldigen teller en noemer met $\bar{i} = -i$. In de noemer krijgen we dan $i \cdot (-i) = 1$. Het resultaat is $-7i$. Voor oefeningen kan het handig zijn om te onthouden dat *delen door i hetzelfde is als vermenigvuldigen met $-i$*.

2. $\dfrac{1}{5+2i} = \dfrac{5}{29} - \dfrac{2}{29}i$

Uitwerking: We vermenigvuldigen teller en noemer met $\overline{5+2i} = 5-2i$. In de noemer krijgen we dan $(5+2i)(5-2i) = 29$.

$$\frac{1}{5+2i} = \frac{1}{5+2i}\frac{5-2i}{5-2i} = \frac{5-2i}{25} = \frac{5}{29} - \frac{2}{29}i$$

3. $\dfrac{1+i}{2+3i} = \dfrac{5}{13} - \dfrac{1}{13}i$

Uitwerking: We vermenigvuldigen teller en noemer met $\overline{2+3i} = 2-3i$. In de noemer krijgen we dan $(2+3i)(2-3i) = 13$.

$$\frac{1+i}{2+3i} = \frac{1+i}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{5-i}{13} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i$$

4. $\dfrac{1+2i}{3-4i} + \dfrac{2-i}{5i} = -\dfrac{2}{5}$

Uitwerking: We berekenen de beide termen apart, en tellen de resultaten vervolgens bij elkaar op.

Voor de eerste term: we vermenigvuldigen teller en noemer met $\overline{3-4i} = 3+4i$. In de noemer krijgen we dan $(3-4i)(3+4i) = 25$. De eerste term kunnen we dus vereenvoudigen tot

$$\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{1+2i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{-5+10i}{25} = \frac{-1+2i}{5}$$

Voor de tweede term: we vermenigvuldigen teller en noemer met $\overline{5i} = -5i$. In de noemer krijgen we dan $(5i) \cdot (-5i) = 25$. De tweede term kunnen we dus vereenvoudigen tot

$$\frac{2-i}{5i} = \frac{2-i}{5i} \cdot \frac{-5i}{-5i} = \frac{-1-2i}{5}$$

Een andere mogelijkheid is om te gebruiken dat delen door i hetzelfde is als vermenigvuldigen met $-i$, zodat we meteen bekomen dat

$$\frac{2-i}{5i} = \frac{(2-i)\cdot(-i)}{5} = \frac{-1-2i}{5}$$

Wanneer we deze twee termen bij elkaar optellen, valt het imaginaire deel weg. Het resultaat is $\dfrac{-2}{5}$.

CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Oefeningen Complexe getallen

Oefening 16.1.6. Bepaal alle oplossingen van volgende veeltermvergelijkingen.

1. $x^2 + x = 0$ $x_1 = 0$ en $x_2 = -1$

Uitwerking: De oplossingen zijn $x_1 = 0$ en $x_2 = -1$.

We kunnen een x afzonderen in deze vergelijking en vinden dan de equivalente vergelijking $x(x+1) = 0$. Deze heeft als oplossingen $x = 0$ en $x = -1$.

2. $x^3 + 16x = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = 4i$ en $x_3 = -4i$

Uitwerking: De oplossingen zijn $x_1 = 0$, $x_2 = 4i$ en $x_3 = -4i$.

We kunnen een x afzonderen, en vinden dan de equivalente vergelijking $x(x^2 + 16) = 0$. Deze heeft als oplossingen ofwel $x = 0$ ofwel $x^2 + 16 = 0$. De laatste vergelijking heeft als oplossingen $x = 4i$ en $x = -4i$.

3. $x^2 + 5x + 2 = 0$ $x_1 = \dfrac{-5 + \sqrt{17}}{2}$ en $x_2 = \dfrac{-5 - \sqrt{17}}{2}$

Uitwerking: De oplossingen zijn $x_1 = \dfrac{-5 + \sqrt{17}}{2}$ en $x_2 = \dfrac{-5 - \sqrt{17}}{2}$.

De vergelijking is van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$, met $a = 1$, $b = 5$ en $c = 2$. Dan is $D = b^2 - 4ac = 25 - 8 = 17$. Omdat $D > 0$, zijn er twee reële oplossingen:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{17}}{2}.$$

4. $x^2 + 4x + 5 = 0$ $x_1 = -2 - i$ en $x_2 = -2 + i$

Uitwerking: De oplossingen zijn $x_1 = -2 - i$ en $x_2 = -2 + i$.

De vergelijking is van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$, met $a = 1$, $b = 4$ en $c = 5$. Dan is $D = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4$. Omdat $D < 0$, zijn er twee complexe oplossingen. De oplossingen zijn

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-4 + 2i}{2} = -2 + i, \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i.$$

5. $x = 2x^2 + 5$ $x_1 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{39}}{4}i$ en $x_2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{39}}{4}i$

Uitwerking: De oplossingen zijn $x_1 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{39}}{4}i$ en $x_2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{39}}{4}i$.

De vergelijking is van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$, met $a = 2$, $b = -1$ en $c = 5$. Dan is $D = b^2 - 4ac = 1 - 40 = -39$. Omdat $D < 0$, zijn er twee complexe oplossingen. De oplossingen zijn

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{39}i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{39}}{4}i, \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-D}i}{2a} = \frac{1 - \sqrt{39}i}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{39}}{4}i.$$

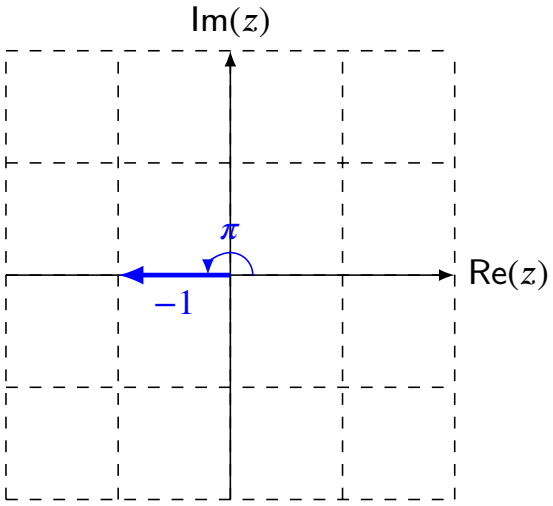
Oefening 16.1.7. Schrijf onderstaande getallen in goniometrische vorm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Zorg er steeds voor dat θ tussen 0 en 2π ligt, dus niet $-\dfrac{\pi}{2}$ antwoorden maar $\dfrac{3\pi}{2}$.

1. $z = -1$ $z = \cos\pi + i\sin\pi$

Uitwerking: $z = -1 = -1 + 0i$ en dus $a = -1$ en $b = 0$, waaruit we halen dat $|z| = r = 1$. In het complexe vlak zien we dadelijk dat $\theta = \pi$. De goniometrische schrijfwijze van z is dan $z = \cos\pi + i\sin\pi$.

CC BY-NC-SA 4.0

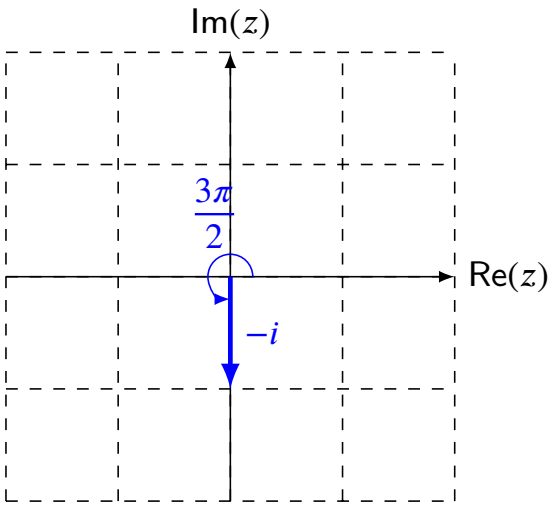
16.1 Oefeningen Complexe getallen



Merk op dat de modules positief moet zijn, en met $r = -1$ en $\theta = 0$ is $-(\cos 0 + i \sin 0)$ dus *geen* goniometrische schrijfwijze van het getal -1.

2. $z = -i$ $z = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Uitwerking: Voor $z = -i$ is $a = 0$ en $b = -1$, dus $|z| = r = 1$. In het complexe vlak zien we dadelijk dat $\theta = \frac{3\pi}{2}$. De goniometrische schrijfwijze van z is dus $z = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.



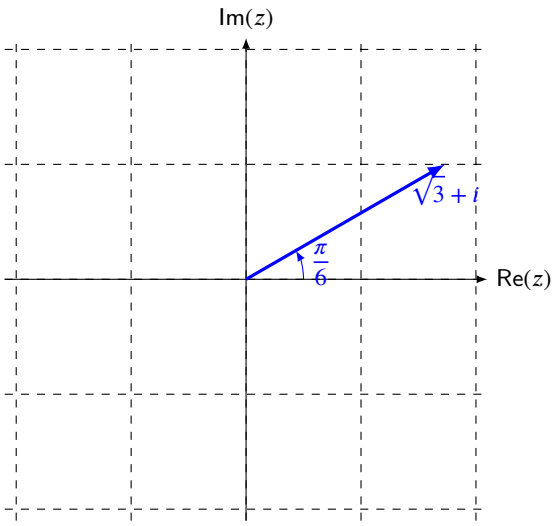
3. $z = \sqrt{3} + i$ $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Uitwerking: Voor $z = \sqrt{3} + i$ geldt $a = \sqrt{3}$ en $b = 1$, dus $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$. Het argument van z voldoet aan $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en $\sin\theta = \frac{1}{2}$. Dit zijn de goniometrische getallen van de standaardhoek $\pi/6$. De goniometrische schrijfwijze van z is dus

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Oefeningen Complexe getallen

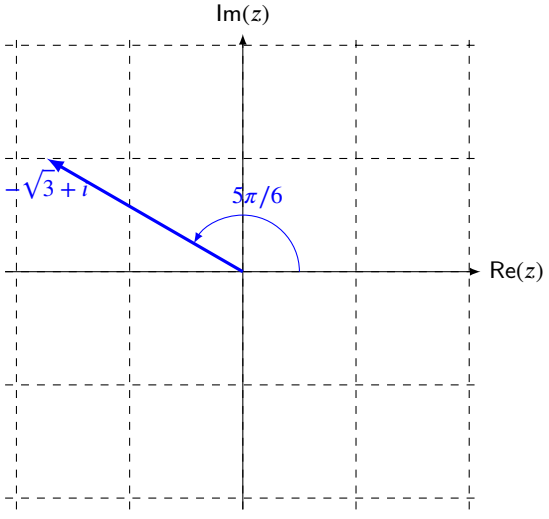


4. $z = -\sqrt{3} + i$ $z = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

Uitwerking: Voor $z = -\sqrt{3} + i$ geldt $a = -\sqrt{3}$ en $b = 1$. Dus geldt $|z| = r = 2$. Voor het argument van z geldt dat $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ en $\sin\theta = \frac{1}{2}$. Dan is $\theta = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$: dit kan je afleiden uit de goniometrische getallen voor $\pi/6$ en de rekenregels voor supplementaire hoeken te gebruiken.

De goniometrische schrijfwijze van z is dus

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$



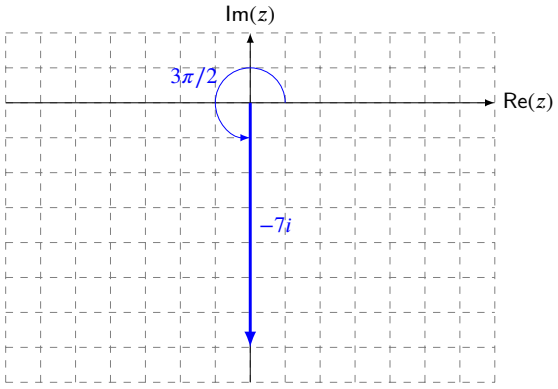
Oefening 16.1.8. Bepaal de modulus $|z|$ en het argument θ van volgende complexe getallen z. Geef de hoek θ tussen 0 en 2π radialen.

1. $z = -7i$ $|z| = 7$ en $\theta = 3\pi/2$.

Uitwerking: $z = a + bi = 0 - 7i$, dus is $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 7$. In het complexe vlak zien we dadelijk dat $\theta = 3\pi/2$. Je kan dit ook berekenen: $\cos\theta = 0/7 = 0$ en $\sin\theta = -7/7 = -1$, en dus is $\theta = 3\pi/2$ (op een

16.1 Oefeningen Complexe getallen

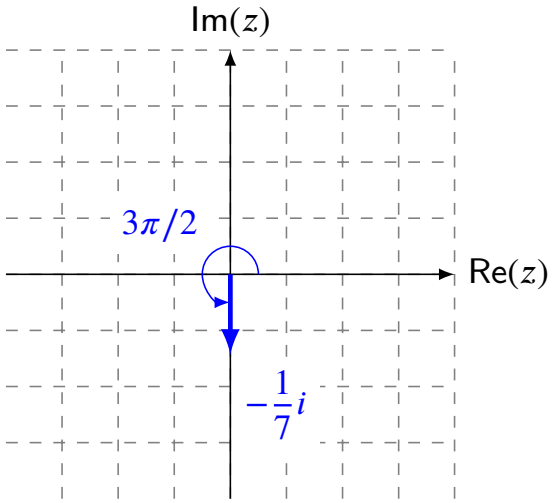
veelvoud van 2π na).



2. $z = (7i)^{-1}$ $|z| = 1/7$ en $\theta = 3\pi/2$.

Uitwerking: Eerst herschrijven we het complex getal z in cartesische vorm: $z = \frac{1}{7i} = -\frac{1}{7}i$ (vermenigvuldig teller en noemer met i).
Een tip voor berekeningen met complexe getallen: *delen door i is hetzelfde als vermenigvuldigen met $-i$*.

Omdat $z = a + bi = 0 - \frac{1}{7}i$ is $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{7}$, en $\theta = 3\pi/2$ (op een veelvoud van 2π na), zoals we kunnen afleiden uit een schets (de ijk op beide assen is nu 0.1 in plaats van 1):



3. $z = \overline{1+i}$ $|z| = \sqrt{2}$ en $\theta = 7\pi/4$.

Uitwerking: Eerst herschrijven we het complex getal z: $z = \overline{1+i} = 1 - i$.

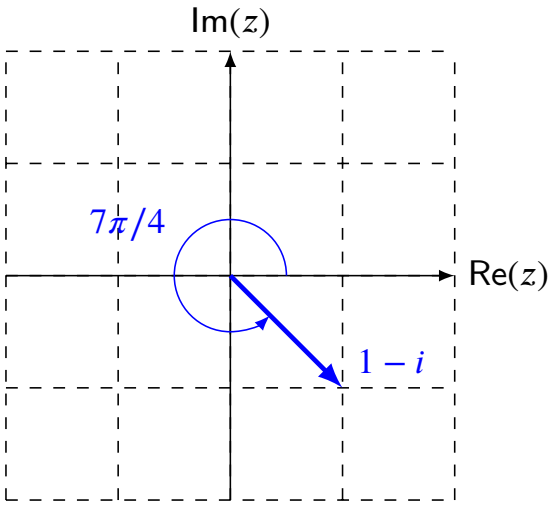
Omdat $z = a + bi = 1 - i$, is $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, en $\theta = -\pi/4$: dit kan je afleiden uit de tekening of bepaal je uit de vergelijkingen

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sin\theta = \frac{b}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Oefeningen Complexe getallen

We weten dat de cosinus en sinus van de standaardhoek $\pi/4$ beide gelijk zijn aan $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, en de tegengestelde hoek heeft dezelfde cosinus, maar een tegengestelde sinus. Dus $\theta = -\pi/4$ of $\theta = 7\pi/4$.

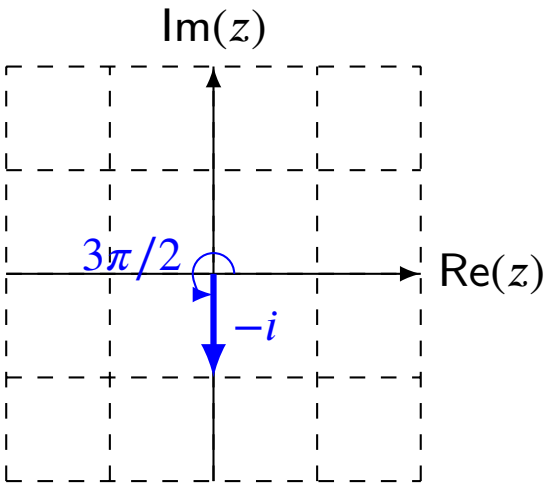


4. $z = \dfrac{1-i}{1+i}$ $|z| = 1$ en $\theta = 3\pi/2$.

Uitwerking: Eerst herschrijven we het complex getal z naar de vorm $a + bi$:

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i}\frac{1-i}{1-i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

Dan is $|z| = 1$, en in het comlexe vlak zien we dadelijk dat $\theta = 3\pi/2$.



Oefening 16.1.9. Bereken met de formule van De Moivre

1. $(\sqrt{3}+i)^3 = 8i$

2. $(-1-i)^{20} = -1024$

3. $(1+i)^{21} = -1024 - 1024i$

4. $(-\sqrt{3}+i)^5 = 16\sqrt{3} + 16i$

CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Oefeningen Complexe getallen

Oefening 16.1.10. Bereken alle oplossingen van $z^3 = 8i$, met $z \in \mathbb{C}.z_1 = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = -\sqrt{3} + i$, $z_3 = -2i$.

Uitwerking: We schrijven eerst beide leden van de opgave in de goniometrische schrijfwijze.

De onbekende z schrijven we als $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Het linkerlid van de vergelijking wordt dan volgens de formule van De Moivre

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta).$$

Voor het rechterlid $8i$ geldt

$$|8i| = 8, \qquad \arg(8i) = \frac{\pi}{2},$$

zodat

$$8i = 8(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})).$$

De vergelijking $z^3 = 8i$ wordt:

$$r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 8(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})).$$

Twee complexe getallen in goniometrische schrijfwijze zijn gelijk aan elkaar als ze dezelfde modulus hebben, en hun argument gelijk is op een veelvoud van 2π na. Hieruit volgt:

$$r^3 = 8 \quad \text{met} \quad r \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{en} \qquad 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dus $r = 2$, want $r^3 = 8$ heeft slecht 1 reële oplossing, en $\theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Voor $k = 0$ is $\theta = \frac{\pi}{6}$, voor $k = 1$ is $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ en voor $k = 2$ is $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$. Voor alle andere waarden van k krijgen we één van deze hoeken op een veelvoud van 2π na. Er zijn dus drie verschillende oplossingen

$$z_1 = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i,$$
$$z_2 = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} + i,$$
$$z_3 = 2(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})) = 2(0 + i(-1)) = -2i.$$

16.1.3 Niveau 3

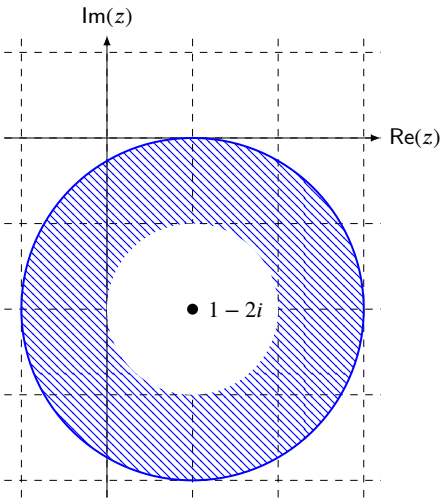
Oefening 16.1.11. Schets in het complexe vlak de gebieden omschreven door volgende vergelijkingen:

1. $1 < |z + 2i - 1| \leq 2$

Uitwerking: $1 < |z + 2i - 1| \leq 2$ kunnen we herschrijven als $1 < |z - (1 - 2i)| \leq 2$. Alle complexe getallen waarvoor $1 < |z + 2i - 1| \leq 2$ zijn alle complexe getallen z waarvoor de afstand tot $(1 - 2i)$ groter is dan 1 en kleiner of gelijk is aan 2:

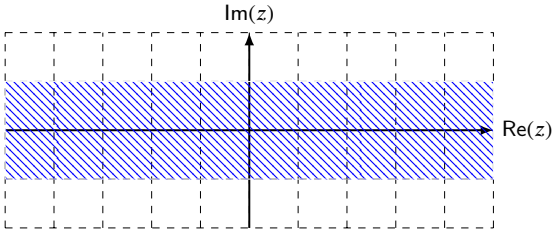
CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Oefeningen Complexe getallen



2. $|\mathrm{Im}(z) - i| < \sqrt{2}$

Uitwerking: Als $z = a+bi$, dan betekent $|\mathrm{Im}(z)-i| < \sqrt{2}$ dat $|b-i| < \sqrt{2}$. Wegens de definitie van modulus is $|b-i| = \sqrt{b^2+(-1)^2}$. De ongelijkheid wordt dus $\sqrt{b^2+1} < \sqrt{2}$, en kwadrateren geeft dan de voorwaarde $b^2+1 < 2$ ofwel $b^2 < 1$. Aangezien $b = \mathrm{Im}(z)$, is dit gebied precies de horizontale strook $-1 < \mathrm{Im}(z) < 1$. Merk op dat dit symmetrisch is rond de x-as.

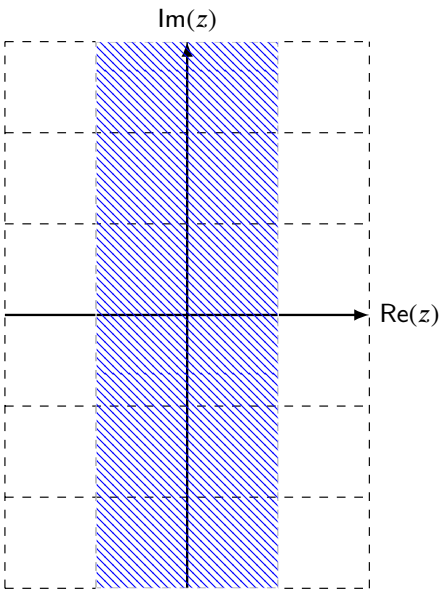


3. $|\mathrm{Re}(z) - i| < \sqrt{2}$

Uitwerking: Als $z = a+bi$, dan betekent $|\mathrm{Re}(z)-i| < \sqrt{2}$ dat $|a-i| < \sqrt{2}$. De berekening van de modulus geeft $\sqrt{a^2+(-1)^2} < \sqrt{2}$. Na kwadrateren geeft dit $a^2+1 < 2$ of dus $-1 < a < 1$. Aangezien $\mathrm{Re}(z) = a$, is dit gebied precies de verticale strook $-1 < \mathrm{Re}(z) < 1$. Merk op dat dit symmetrisch is rond de y-as.

CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Oefeningen Complexe getallen



Oefening 16.1.12. Geef een vierkantsvergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ die

1. enkel het getal -5 als oplossing heeft. $x^2 + 10x + 25 = 0$

Uitwerking: De enige oplossing moet $x = -5$ zijn. Hieruit halen we $x + 5 = 0$, maar dit is geen tweedegraadsvergelijking: $(x + 5)^2 = 0$ is dat wel. Voluit geschreven is dit de vergelijking $x^2 + 10x + 25 = 0$. Je kan eventueel met de discriminantmethode nagaan dat $D = 0$ en $\frac{-b}{2a} = -5$.

(Met deze truc kan je zelfs een veeltermvergelijking van eender welke graad geven met enkel -5 als oplossing: $(x - 5)^n = 0$: ze voluit schrijven is wel wat lastiger)

2. $x_1 = 3 - i$ en $x_2 = 3 + i$ als oplossingen heeft. $x^2 - 6x + 10$

Uitwerking: $(x-x_1)(x-x_2) = (x-3+i)(x-3-i) = x^2-(3+i)x+(-3+i)x+(-3+i)(-3-i) = x^2-6x+10$

Oefening 16.1.13. Schrijf onderstaande getallen in goniometrische vorm $r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Zorg er steeds voor dat θ tussen 0 en 2π ligt.

1. $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$ $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

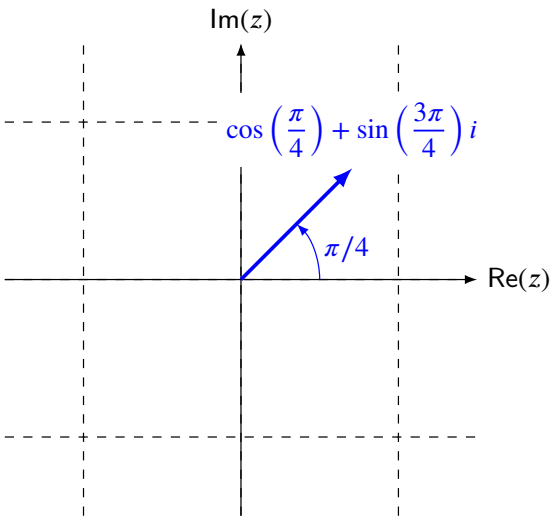
Uitwerking: Door supplementaire hoeken te gebruiken vinden we dat

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

En dus is $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$: dit is reeds de goniometrische schrijfwijze, met $r = 1$ en $\theta = \frac{\pi}{4}$.

CC BY-NC-SA 4.0

16.1 Oefeningen Complexe getallen



2. $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ $z = \cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3}$

Uitwerking: Door tegengestelde hoeken te gebruiken vinden we dat $-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ en $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Dus $z = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Als we eisen dat $\theta \in [0, 2\pi]$, dan is de goniometrische vorm van z: $z = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$.

