Integratie door substitutie

We leggen in de voorbeelden die volgen integratie door substitutie telkens uit aan de hand van twee verschillende schrijfwijzes. De eerste schrijfwijze is eenvoudiger om toe te passen. Het volstaat dat je deze schrijfwijze kan gebruiken. Indien je echter gewoon bent om de tweede schrijfwijze te gebruiken, dan kan je deze telkens ook nalezen in de voorbeelden.

Voorbeeld 1. Berekening van de integraal $\int \cos 3x \, dx$.

We weten dat $\int \cos x \, dx = \sin x + c$, want $(\sin x)' = \cos x$. We stellen ons nu de vraag waaraan $\int \cos 3x \, dx$ gelijk is.

- Merk op dat we de 3 *niet* uit de cosinus kunnen halen, want $\cos 3x \neq 3 \cos x$.
- We kunnen ook niet gewoon x vervangen door $3x$ in $\int \cos x \, dx = \sin x + c$, want $\int \cos 3x \, dx \neq \sin 3x + c$. Volgens de kettingregel is de afgeleide van $\sin 3x$ immers gelijk aan $3 \cos 3x$, en dus niet gelijk aan $\cos 3x$.

Om deze onbepaalde integraal correct uit te rekenen gaan we niet x maar $3x$ als integratievariabele nemen, om over te gaan tot een basisintegraal. Dit wordt de substitutiemethode genoemd. In de eerste schrijfwijze wordt expliciet de substitutie $u = 3x$ uitgevoerd. In de tweede schrijfwijze wordt er geen nieuwe naam gegeven aan $3x$, maar wordt de integratievariabele achter de d herschreven, wat mogelijk is omdat $dx = \frac{1}{3} \, d(3x)$.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = 3x$, dan is $du = d(3x) = 3 \, dx$ (want $df = f'(x)dx$), dus $dx = \frac{1}{3} \, du$. Substitueer $u = 3x$ en $dx = \frac{1}{3} \, du$ in $\int \cos 3x \, dx$, dan vind je

$$\int \cos 3x \, dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{3} \, du = \frac{1}{3} \int \cos u \, du = \frac{1}{3} \sin u + c = \frac{1}{3} \sin 3x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Door het uitvoeren van deze substitutie hebben we $\int \cos 3x \, dx$ herschreven als de basisintegraal $\frac{1}{3} \int \cos u \, du$.

Schrijfwijze 2:

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x \, d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

We kunnen dit veralgemenen tot $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$, met $a \in \mathbb{R}_0$.

In het vorige voorbeeld hebben we een eenvoudige substitutie uitgevoerd van de vorm $u = ax$. In het volgende voorbeeld bekijken we een substitutie van de vorm $u = ax + b$.

Voorbeeld 2. Berekening van de integraal $\int (2x + 5)^7 \, dx$.

CC BY-NC-SA 4.0

Integratie door substitutie

De integraal $\int (2x+5)^7\,dx$ kan in principe berekend worden door de zevende macht uit te rekenen, ofwel met distributiviteit via $(2x+5)^7 = (2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)\cdot(2x+5)$, ofwel met het Binomium van Newton, en dan term per term te integreren. Dat kan, maar het is wel erg veel rekenwerk.

Je kan het uitwerken van de macht vermijden, door op te merken dat de integrand een beetje lijkt op de basisintegraal

$$\int x^7\,dx = \frac{x^8}{8} + c$$

Het is fout om in bovenstaande uitdrukking x gewoon te vervangen door $2x+5$, want $\int (2x+5)^7\,dx \neq \frac{(2x+5)^8}{8} + c$. Volgens de kettingregel is de afgeleide van $\frac{(2x+5)^8}{8}$ immers gelijk aan $2(2x+5)^7$, en dus niet gelijk aan $(2x+5)^7$.

Om rekening te houden met de kettingregel gaan we $u = 2x+5$ als integratievariabele nemen en voeren we deze substitutie uit als volgt:

Schrijfwijze 1:

Stel $u = 2x+5$, dan is $du = d(2x+5) = 2dx$, dus $dx = \frac{1}{2}du$. Dit substitueren we in $\int (2x+5)^7\,dx$:

$$\int (2x+5)^7\,dx = \int u^7\,\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^7\,du = \frac{1}{2}\frac{u^8}{8} + c = \frac{1}{16}(2x+5)^8 + c$$

Schrijfwijze 2:

$$\int (2x+5)^7\,dx = \frac{1}{2}\int (2x+5)^7\,d(2x+5) = \frac{1}{2}\frac{(2x+5)^8}{8} + c = \frac{1}{16}(2x+5)^8 + c$$

De uitkomst is al direct ontbonden in factoren, dat is veel bondiger en duidelijker dan wanneer we de zevende macht hadden uitgerekend en de resulterende veelterm van graad 7 term per term hadden geïntegreerd. Als je ook zou geïnteresseerd zijn in nulpunten van de uitkomst is deze ontbinding in factoren zeker nuttig.

In volgende oefening kan je telkens de integraal berekenen met een eenvoudige substitutie van de vorm $u = ax$ of $u = ax + b$.

Oefening 1. Bereken volgende integralen:

1. $\int e^{2x}\,dx = \ldots\ldots$

2. $\int 2^{3x}\,dx = \ldots\ldots$

3. $\int \frac{4}{2x-3}\,dx = \ldots\ldots$

We kijken nu naar de algemene regel voor *integratie door substitutie*, die steunt op de *kettingregel voor afgeleiden*.

CC BY-NC-SA 4.0

Integratie door substitutie

Eigenschap 1 (Substitutieregel)**.**

Als in een integraal $\int h(x)\,dx$ de *integrand* $h(x)$ kan beschouwd worden als

een *product* (dus $h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$)

van een *samengestelde* functie (dus $h_1(x) = f(u(x))$)

met de *afgeleide* van de *binnenste* functie (dus $h_2(x) = u'(x)$),

dan kunnen we de integraal reduceren tot

de *integraal van de buitenste functie* (dus $\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$).

In een formule: voor reële, afleidbare functies f en u waarvoor $f \circ u$ bestaat geldt

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u(x))\,du(x) = \int f(u)\,du.$$

Het begrip 'substitutie' betekent 'vervanging' (denk aan het Frans: *substituer* of het Engels: *to substitute*) en duidt aan dat we de integratievariabele (vaak x) **vervangen** door een *nieuwe* 'variabele' (zeg u, die dus zelf een functie is van de *oorspronkelijke* variabele x: $u = u(x)$).

In een weliswaar tamelijk specifiek geval laat de substitutieregel dus toe om *een product in de integrand* weg te werken: namelijk op voorwaarde dat we het product kunnen beschouwen als het product van een samengestelde functie en van een afgeleide van de juiste functie (dus van de binnenste functie van de samenstelling). Dit proces is bovendien enkel zinvol als we vervolgens de resulterende integraal $\int f(u)\,du$ kunnen berekenen, bijvoorbeeld omdat het een basisintegraal is. We zullen ook voorbeelden tegenkomen waar de substitutieregel gebruikt wordt wanneer de integrand het quotiënt van 2 functies is. Een quotiënt kan je immers schrijven als een product: $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$.

Om de substitutieregel in de praktijk te kunnen toepassen, is het erg belangrijk om enerzijds gemakkelijk samengestelde functies te kunnen herkennen, en bovendien ook gemakkelijk de afgeleiden van mogelijke *binnenste* functies te herkennen in de overblijvende factor.

Ter herhaling bestudeer je volgend voorbeeld:

Voorbeeld 3. Herken volgende uitdrukkingen als samenstellingen van twee functies:

1. $\sin x^2 = f(g(x))$ met $f(x) = \sin x$ en $g(x) = x^2$

2. $\sin^2 x = f(g(x))$ met $f(x) = x^2$ en $g(x) = \sin x$

3. $(x+2)^2 = f(g(x))$ met $f(x) = x^2$ en $g(x) = x + 2$

4. $x^2 + 2 = f(g(x))$ met $f(x) = x + 2$ en $g(x) = x^2$

Merk op dat niet *alle* uitdrukkingen als samenstellingen moeten beschouwd worden:

(a) $\sin x \cos x$

(b) $x^2 \sin x$

(c) $\sin x + \cos x$

(d) $\cos^2 x + \sin^2 x$

zijn eerder *sommen* of *producten* dan samenstellingen.

Merk op dat (d) een ingewikkelde schrijfwijze is voor het getal 1.

CC BY-NC-SA 4.0

Integratie door substitutie

Volgend voorbeeld legt in detail de methode van substitutie uit:

Voorbeeld 4. Bereken $\int e^{x^2} 2x \, dx$.

Merk eerst op dat $e^{x^2} = e^{(x^2)}$ en $e^{x^2} \neq (e^x)^2 = e^{2x}$.

We herkennen de functie x^2 en haar afgeleide $2x$ in de integrand. Het ligt dus voor de hand de substitutie $u(x) = x^2$ te proberen, want van de functie $u(x)$ komen zowel de functie als de afgeleide voor in de formule van de substitutieregel. De enige mogelijkheid voor f is dan $f(u) = e^u$, want dan is $f(u(x)) = e^{x^2}$. We passen de substitutieregel toe:

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x \, dx &= \int f(u(x))u'(x) \, dx \\
&= \int f(u(x)) \, d(u(x)) \\
&= \int f(u) \, du \\
&= \int e^u \, du \\
&= e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Het gebruik van de substitutieregel wordt meestal korter genoteerd. We beschrijven twee mogelijkheden, schrijfwijze 1 met een *expliciete* nieuwe variabele u, en een nog kortere schrijfwijze 2 waar de subsitutie *impliciet* blijft en er geen nieuwe variabele expliciet wordt opgeschreven.

Schrijfwijze 1:

We schrijven niet expliciet $u(x) = x^2$ zoals hierboven, maar noteren korter $u = x^2$. Dan is $du = dx^2 = 2x dx$.
Deze beide uitdrukkingen *substitueer* je in $\int e^{x^2} 2x \, dx$ en je vindt

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x \, dx &= \int e^u \, du && \text{(want } x^2 = u \text{ en } 2x \, dx = du\text{)} \\
&= e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(basisintegraal)} \\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(terug als functie van } x\text{).}
\end{aligned}$$

Schrijfwijze 2:

Je geeft de binnenste functie *geen expliciete naam*, maar brengt ze achter de differentiaal:

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} 2x \, dx &= \int e^{x^2} \, dx^2 && \text{(want } dx^2 = 2x \, dx\text{)} \\
&= e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(want } \int e^u \, du = e^u\text{)}
\end{aligned}$$

Bestudeer ook volgende kleine variaties:

De integraal $\int e^{x^2} x \, dx$ kan je ook berekenen met substitutie:

CC BY-NC-SA 4.0

stel opnieuw $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x\,dx$. Hieruit haal je dat $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$.

Dit *substitueer* je in $\int e^{x^2} x\,dx$ en je vindt

$$\begin{aligned}
\int e^{x^2} x\,dx &= \int e^u\,\frac{1}{2}du && \text{(want } x^2 = u \text{ en } x\,dx = \tfrac{1}{2}\,du\text{)}\\
&= \frac{1}{2}\int e^u\,du && \text{(}\textstyle\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\text{)}\\
&= \frac{1}{2}e^u + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(basisintegraal)}\\
&= \frac{1}{2}e^{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R} && \text{(terug als functie van } x\text{)}
\end{aligned}$$

Op analoge wijze kan je ook $\int 3e^{x^2} x\,dx$ berekenen.

De integralen $\int e^{x^2}\,dx$ en $\int 2e^{x^2}\,dx$ kan je *niet* berekenen met substitutie.

Besluit: Omdat de afgeleide van x^2 gelijk is aan $2x$ is het nodig dat de factor x in de integrand voorkomt, anders kan je substitutie niet toegepassen, maar de constante factor mag willekeurig zijn.

We geven nog enkele voorbeelden van de substitutieregel.

Voorbeeld 5. Bereken $\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx$

Schrijfwijze 1:

Stel $u = x^3 + 5$, dan is $du = d(x^3+5) = 3x^2\,dx$. Dit *substitueren* we in $\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx$:

$$\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx = \int u^7\,du = \frac{u^8}{8} + c = \frac{(x^3+5)^8}{8} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int 3x^2(x^3+5)^7\,dx = \int (x^3+5)^7\,d(x^3+5) = \frac{(x^3+5)^8}{8} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Voorbeeld 6. Bereken $\int 2x\cos(x^2)\,dx$

Schrijfwijze 1:

Stel $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x\,dx$. Dit *substitueren* we in $\int 2x\cos(x^2)\,dx$:

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \cos(u)\,du = \sin(u) + c = \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \int \cos(x^2)\,dx^2 = \sin(x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.54)

Voorbeeld 7. Bereken $\int 2\sin x\cos x\,dx$

In het inleidend voorbeeld is er eigenlijk met de substitutie $u(x) = \sin^2(x)$ gewerkt. Bij sommige integralen, zoals deze, zijn er meerdere goede keuzes voor de functie $u(x)$. We kunnen hier ook $u(x) = \sin x$ of $u(x) = \cos x$ gebruiken. We geven al deze mogelijkheden als voorbeeld:

Schrijfwijze 1:

a) Kies $u = \sin x$, dan is $du = d\sin x = \cos x\,dx$, en vind je

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2u\,du = u^2 + c = (\sin x)^2 + c = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

b) Kies $u = \cos x$, dan is $du = d\cos x = -\sin x\,dx$, dus $\sin x\,dx = -du$, en vind je

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = -\int 2u\,du = -u^2 + c = -(\cos x)^2 + c = -\cos^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Merk op dat beide oplossingen aan elkaar gelijk zijn want $\sin^2 x + c = 1 - \cos^2 x + c = -\cos^2 x + c'$, met $c' = 1 + c$ een andere (willekeurige) constante.

c) Kies $u = \sin^2 x$, dan is $du = d\sin^2 x = 2\sin\cos x\,dx$, en vind je

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \int du = u + c = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

a) Schrijf met $d\sin x$: $\int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2\sin x\,d\sin x = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

b) Schrijf met $d\cos x$: $\int 2\sin x\cos x\,dx = -\int 2\cos x\,d\cos x = -\cos^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

c) Schrijf met $d\sin^2 x$: $\int 2\sin x\cos x\,dx = \int d\sin^2 x = \sin^2 x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Volgende voorbeelden berekenen enkele integralen die in sommige boeken en cursussen in de lijst van basisintegralen staan. We hebben er hier voor gekozen om te werken met een eenvoudige lijst basisintegralen, omdat onderstaande integralen met de substitutieregel gemakkelijk berekend kunnen worden.

Voorbeeld 8. Bereken volgende integralen (met $a \in \mathbb{R}_0$)

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{bgsin}\frac{x}{a} + c$ met $a > 0$

Deze integraal lijkt op de basisintegraal $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$. Ditmaal is niet de integratievariabele x vermenigvuldigd met een constante factor, maar is de constante 1 gewijzigd in de constante a^2. Toch willen we overgaan naar deze basisintegraal door de substitutieregel te gebruiken. Hiervoor moeten we de integraal eerst herschrijven zodat onder de wortel terug de constante 1 staat in plaats van a^2. Als $a > 0$ geldt dat $\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}\,dx$$

CC BY-NC-SA 4.0

Zo blijkt dat we de substitutie $u = \frac{x}{a}$ kunnen proberen om de integraal verder uit te rekenen.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = \frac{x}{a}$, dan is $du = \frac{1}{a}\,dx$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \operatorname{bgsin} u + c = \operatorname{bgsin} \frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,d\frac{x}{a} = \operatorname{bgsin} \frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan} \frac{x}{a} + c$

Deze integraal lijkt op de basisintegraal $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$. De constante 1 is gewijzigd in de constante a^2. Toch willen we overgaan naar deze basisintegraal door de substitutieregel te gebruiken. Hiervoor moeten we de integraal eerst herschrijven zodat er terug de constante 1 staat in plaats van a^2:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx$$

Zo blijkt dat we de substitutie $u = \frac{x}{a}$ kunnen proberen om de integraal verder uit te rekenen.

Schrijfwijze 1:

Stel $u = \frac{x}{a}$, dan is $du = \frac{1}{a}\,dx$, dus $dx = a\,du$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx &= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx \\
&= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1+u^2} \cdot a\,du \\
&= \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan} u + c, \quad c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan} \frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \int \frac{1}{a^2(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(1 + (\frac{x}{a})^2)}\,d\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\,\operatorname{bgtan} \frac{x}{a} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}\,dx = \ln\left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + c$

Deze integraal kan berekend worden met substitutie, maar het vinden van de substitutie is niet voor de hand liggend. Daarom wordt deze integraal soms tot de basisintegralen gerekend.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.54)

Schrijfwijze 1:

Stel $u = x + \sqrt{x^2+a}$, dan is $du = (1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}})\,dx = \dfrac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$.

Bijgevolg is $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \dfrac{1}{u}\,du$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + c = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Schrijfwijze 2: wegens de complexe formule voor u werkt de tweede schrijfwijze hier niet.

(d) $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$

Het enige startpunt om $\displaystyle\int \tan x\,dx$ te kunnen berekenen lijkt het toepassen van de definitie:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

Twee kandidaat substituties zijn dan $u(x) = \sin x$ en $u(x) = \cos x$. Nemen we $u(x) = \sin x$, dan is $du = \cos x\,dx$. In de teller staat echter $\sin x\,dx$. Daarom kiezen we voor $u(x) = \cos x$:

Schrijfwijze 1:
Stel $u = \cos x$, dan is $du = d\cos x = -\sin x\,dx$, dus $\sin x\,dx = -du$.
Dit *substitueren* we in $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x\,dx = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Schrijfwijze 2:

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{1}{\cos x}\,d\cos x = -\ln|\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Merk op dat we de substitutieregel $\displaystyle\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$ hebben toegepast met $f(u) = \dfrac{1}{u}$. Dan wordt de substitutieregel $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du$. Dit is een voorbeeld waar de substitutieregel gebruikt wordt om de integraal van een quotiënt van 2 functies te berekenen.

Wanneer en welke substitutie moet uitgevoerd worden is niet altijd even duidelijk. Hier geldt de regel "Oefening baart kunst". Volgende oefeningen behandelen enkele typische situaties.

Oefening 2.

1. $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\int (x^2+2)\sqrt{x-2}\,dx = \ldots\ldots$

We geven nog een wat merkwaardig voorbeeld van substitutie. Dit type integraal is ook belangrijk bij het berekenen van integralen van rationale functies, wat we hier niet verder behandelen.

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.54)

Integratie door substitutie

Voorbeeld 9. Bereken $\displaystyle\int \frac{1}{p\,x^2+q\,x+r}\,dx$ met $D = q^2-4pr < 0$.

De discriminant van de noemer is $D = q^2-4pr < 0$. We eisen dat deze discriminant negatief is zodat de noemer nergens nul wordt en de integrand bijgevolg overal gedefinieerd is.

Deze integraal kan door substitutie worden herleid tot de basisintegraal $\displaystyle\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{bgtan} u + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Herschrijf hiervoor $p\,x^2+q\,x+r$ als $a(1+u^2)$.

We illustreren dit met een concreet voorbeeld:

$$\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$$

De discriminant van de noemer is $16-4\cdot 1\cdot 8 = -16 < 0$.

$$x^2-4x+8 = x^2-4x+4+4 = (x-2)^2+4 = 4\left(\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1\right)$$

Stel $u = \dfrac{x-2}{2}$, dan is $du = \dfrac{1}{2}\,dx$ zodat

$$\int \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{1}{4(u^2+1)}\cdot 2du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\operatorname{bgtan}\frac{x-2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Opmerking 1. Integralen van het type $\displaystyle\int \frac{1}{p\,x^2+q\,x+r}\,dx$:

- met $D = q^2-4pr < 0$: zie bovenstaand voorbeeld
- met $D = q^2-4pr = 0$: noemer ontbinden in 2 identieke factoren en verder uitrekenen met substitutie
- met $D = q^2-4pr > 0$: noemer ontbinden in 2 verschillende factoren en splitsing in partieelbreuken. De methode van splitsen in partieelbreuken behandelen we hier niet.

Uitweiding 1 (Nog een extra voorbeeld)**.**

De integraal

$$\int \frac{1}{\sqrt{p\,x^2+q\,x+r}}\,dx$$

met $q^2-4pr > 0$ en $p < 0$ kan door substitutie herleid worden tot

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \operatorname{bgsin} u + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

door $p\,x^2+q\,x+r$ (met $q^2-4pr > 0$ en $p < 0$) te schrijven in de vorm $a(1-u^2)$.
We illustreren dit met een concreet voorbeeld:

$$\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2-5}}\,dx$$

CC BY-NC-SA 4.0

De discriminant is $36 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16 > 0$ en $p = -1 < 0$.

$$\begin{aligned} 6x - x^2 - 5 &= -(x^2 - 6x + 5) = -(x^2 - 6x + 9 - 4) \\ &= -[(x-3)^2 - 4] = 4 - (x-3)^2 = 4[1 - (\frac{x-3}{2})^2] \end{aligned}$$

Stel $u = \dfrac{x-3}{2}$ dan is $du = \dfrac{dx}{2}$, zodat

$$\int \frac{1}{\sqrt{6x - x^2 - 5}}\, dx = \int \frac{2}{\sqrt{4(1-u^2)}}\, du = \frac{2}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \operatorname{bgsin} \frac{x-3}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Oefening 3. Bereken de onbepaalde integraal $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4t - t^2 - 3}}\, dt = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0