Partiële integratie

De *productregel voor afgeleiden* leidt tot de interessante methode van '*partiële integratie*'.
Volgend inleidend voorbeeld berekent de integraal van een speciaal gekozen product:

Voorbeeld 1. Berekening van de integraal $\int xe^x\,dx$.

De productregel voor afgeleiden toepassen op het product $x \cdot e^x$ geeft

$$\begin{aligned} d(x \cdot e^x) &= (dx) \cdot e^x + x(de^x) \\ &= e^x dx + xe^x dx \end{aligned}$$

en de gelijkheid $d(x \cdot e^x) = e^x dx + xe^x dx$ integreren levert

$$\int d(x \cdot e^x) = \int e^x dx + \int xe^x dx.$$

De eerste twee integralen zijn direct te berekenen en wat overblijft is de gezochte integraal:

$$xe^x + c = e^x + \int xe^x dx$$

en bijgevolg is

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + c$$

We hebben dus - met wat geluk weliswaar - de integraal $\int xe^x\,dx$ uitgerekend.

De techniek van partiële integratie veralgemeent dit voorbeeld.

De regel voor partiële integratie volgt onmiddellijk uit de regel voor de afgeleide van het product van twee functies f en u.

$$(f(x) \cdot u(x))' = f'(x) \cdot u(x) + f(x) \cdot u'(x)$$

Inderdaad, als we beide leden integreren krijgen we

$$\int (f(x) \cdot u(x))'\,dx = \int f'(x) \cdot u(x)\,dx + \int f(x) \cdot u'(x)\,dx.$$

Na termen van lid veranderen krijgen we

$$\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = \int (f(x) \cdot u(x))'\,dx - \int f'(x) \cdot u(x)\,dx.$$

Omdat $\int (f(x) \cdot u(x))'\,dx = f(x) \cdot u(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$ wordt dit

$$\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = f(x) \cdot u(x) - \int f'(x) \cdot u(x)\,dx.$$

Dit is de formule voor partiële integratie, zo genoemd omdat de integraal $\int f(x) \cdot u'(x)\,dx$ gedeeltelijk, dus partieel, is geïntegreerd: we hebben al een deel van de primitieve functie, namelijk $f(x) \cdot u(x)$, en er blijft nog een ander - hopelijk eenvoudiger te berekenen - deel over, namelijk $\int f'(x) \cdot u(x)\,dx$. We hebben $f(x) \cdot u(x)$ genoteerd en niet $f(x) \cdot u(x) + c$, omdat het resultaat van de berekening van de tweede term van het rechterlid, $\int f'(x) \cdot u(x)\,dx$, ook slechts op een constante na bepaald is.

CC BY-NC-SA 4.0

Partiële integratie

Eigenschap 1 (Partiële integratie)**.**

Als in een integraal $\int h(x)\,dx$ de *integrand* $h(x)$ kan beschouwd worden als

een *product* (dus $h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x)$)

van een functie $f(x)$ (dus $h_1(x) = f(x)$)

en van de *afgeleide* van een functie $u(x)$ (dus $h_2(x) = u'(x)$),

dan kunnen we de integraal schrijven als

$$\int f(x)u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx.$$

Dus voor reële, afleidbare functies f en u geldt

$$\boxed{\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx},$$

of korter genoteerd:

$$\int f \cdot u'\,dx = f \cdot u - \int f' \cdot u\,dx,$$

of met differentialen genoteerd:

$$\boxed{\int f\,du = f \cdot u - \int u\,df}.$$

In oefeningen wordt dikwijls $\overset{P.I.}{=}$ geschreven om het gebruik van partiële integratie aan te duiden.

Men schrijft de regel voor partiële integratie dikwijls met functies f en g (in plaats van f en u zoals hierboven):

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

of met functies u en v:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du.$$

We hebben de eigenschap geformuleerd met f en u omwille van de parallel met de substitutieregel

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = \int f(u(x))du(x) = \int f(u)du \qquad \text{(substitutie)},$$

waar de rol van f en u minder symmetrisch is. Voor partiële integratie is de rol van beide factoren wel symmetrisch, en is de notatie met f en g, ofwel u en v ook gebruikelijk. Het is belangrijk dat je met elke versie van deze formules kan werken, onafhankelijk van de letters die gebruikt worden.

Voorbeeld 2. Bereken $\int xe^x\,dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x) \cdot u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx$

CC BY-NC-SA 4.0

Partiële integratie

Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = e^x$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u'(x)}\, dx,$$

dan is $f'(x) = 1$ en $u(x)$ kunnen we vinden door $u'(x)$ te integreren: $u(x) = \int u'(x)\, dx = \int e^x\, dx = e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.
Er zijn dus oneindig veel mogelijke functies u, maar we nemen deze met $c = 0$.
Partiële integratie geeft dan

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u'(x)}\, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u(x)}\, dx = xe^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f\, du = f \cdot u - \int u\, df$

  Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\, dx = e^x\, dx$. Dan geldt

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x\, dx}_{du} = \int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{d(e^x)}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{u(x)} - \int \underbrace{e^x}_{u(x)} \underbrace{dx}_{df}$$
$$= xe^x - e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

De keuze van f en u ligt niet vast. Stel dat we hier een andere keuze hadden gemaakt voor f en u, namelijk $f(x) = e^x$ en $u'(x) = x$. Dan is $f'(x) = e^x$ en $u(x) = \frac{x^2}{2}$. Partiële integratie geeft dan

$$\int xe^x\, dx \overset{P.I.}{=} e^x\, \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x^2 e^x\, dx.$$

In de tweede integraal is de macht van x *verhoogd* van 1 naar 2. Dus de x in de eerste integraal wordt een x^2 in de tweede integraal. Met deze keuze van f en u wordt de nieuwe integraal *nog ingewikkelder dan de oorspronkelijke*. Hoewel de gelijkheid correct is, helpt ze niet. *Een goede keuze* voor f en u is dus erg belangrijk.

Voorbeeld 3. Bereken $\int x \sin x\, dx$.

- **Schrijfwijze 1**: $\int f(x) \cdot u'(x)\, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\, dx$

  Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = \sin x$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{u'(x)}\, dx,$$

  dan is $f'(x) = 1$ en $u(x)$ kunnen we vinden door $u'(x)$ te integreren: $u(x) = \int u'(x)\, dx = \int \sin x\, dx = -\cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.
  We kiezen de primitieve functie met $c = 0$. Partiële integratie geeft dan

CC BY-NC-SA 4.0

Partiële integratie

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{u'(x)}\, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)}\, dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2**: $\int f\, du = f \cdot u - \int u\, df$

  Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\, dx = \sin x\, dx$

$$\int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x\, dx}_{du} = \int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{d(-\cos x)}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} \underbrace{dx}_{df}$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

In de volgende oefeningen moet je partiële integratie combineren met een eenvoudige substitutie.

Oefening 1.

1. $\int xe^{2x}\, dx = \ldots\ldots$
2. $\int xe^{-3x}\, dx = \ldots\ldots$

We hebben in de voorbeelden en oefeningen tot nu toe telkens het product van de veelterm x met een exponentiële of goniometrische functie geïntegreerd. Wanneer deze veelterm van een hogere graad is moeten we herhaaldelijk partieel integreren om tot de oplossing te komen. Bij elke stap daalt de graad van de veelterm met één.

Voorbeeld 4. Bereken $\int 4x^2 e^{2x} dx$.

Om deze integraal te berekenen moet je *meerdere keren partieel integreren*. De methode wordt uitgelegd in onderstaand filmpje, en ook bij het volgende voorbeeld. YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=c450HbCytQE

Voorbeeld 5. Bereken $\int (2x^2 - 4x)e^{2x}\, dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x) \cdot u'(x)\, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\, dx$

  Stel $f(x) = 2x^2 - 4x$ en $u'(x) = e^{2x}$, dan is $f'(x) = 4x - 4$ en $u(x) = \int u'(x)\, dx = \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

  Partiële integratie geeft dan

CC BY-NC-SA 4.0

$$\int \underbrace{(2x^2-4x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{u'(x)}\, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{(2x^2-4x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)} - \int \underbrace{(4x-4)}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)}\, dx$$
$$= (x^2-2x)\, e^{2x} - \int (2x-2)e^{2x}\, dx$$

We passen nogmaals partiële integratie toe. Ditmaal stellen we $f(x) = 2x-2$ en $u'(x) = e^{2x}$, dan is $f'(x) = 2$ en $u(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$$(x^2-2x)\, e^{2x} - \int \underbrace{(2x-2)}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{u'(x)}\, dx$$
$$\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)\, e^{2x} - \left(\underbrace{(2x-2)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)} - \int \underbrace{2}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u(x)}\, dx \right)$$
$$= (x^2-2x)\, e^{2x} - (x-1)\, e^{2x} + \int e^{2x}\, dx$$
$$= (x^2-2x)\, e^{2x} - (x-1)\, e^{2x} + \frac{1}{2}\, e^{2x} + c$$
$$= (x^2-2x-x+1+\frac{1}{2})\, e^{2x} + c$$
$$= (x^2-3x+\frac{3}{2})\, e^{2x} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f\, du = f \cdot u - \int u\, df$

$$\begin{aligned}
\int (2x^2-4x)e^{2x}\, dx &= \int (x^2-2x)\, de^{2x} \\
&\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)e^{2x} - \int e^{2x}(2x-2)\, dx \\
&= (x^2-2x)\, e^{2x} - \int (x-1)\, de^{2x} \\
&\overset{P.I.}{=} (x^2-2x)\, e^{2x} - \left[(x-1)\, e^{2x} - \int e^{2x}\, dx \right] \\
&= (x^2-2x)\, e^{2x} - (x-1)\, e^{2x} + \frac{1}{2}\, e^{2x} + c \\
&= (x^2-2x-x+1+\frac{1}{2})\, e^{2x} + c \\
&= (x^2-3x+\frac{3}{2})\, e^{2x} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Als de integrand het product is van een veelterm en een andere functie zoals een sinus, cosinus of exponentiële functie, kiezen we voor $f(x)$ de veelterm. Door partiële integratie toe te passen daalt dan immers de graad van de veelterm. In het volgende voorbeeld, het product van een veelterm met $\ln x$, doen we het andersom, omdat we $\ln x$ eenvoudig kunnen afleiden, maar nog niet integreren. Hoe we $\ln x$ kunnen integreren is één van de volgende voorbeelden.

CC BY-NC-SA 4.0

Partiële integratie

Voorbeeld 6. Bereken $\int 9x^2 \ln x \, dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\int f(x) \cdot u'(x) \, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x) \, dx$

  Stel $f(x) = \ln x$ en $u'(x) = 9x^2$

  $$\int \underbrace{9x^2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} \, dx,$$

  dan is $f'(x) = 1/x$ en $u(x) = \int u'(x) \, dx = \int 9x^2 \, dx = 3x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

  Partiële integratie geeft dan

  $$\int \underbrace{9x^2}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{f(x)} \, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{3x^3}_{u(x)} - \int \underbrace{1/x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{3x^3}_{u(x)} \, dx$$
  $$= 3x^3 \ln x - \int 3x^2 \, dx = 3x^3 \ln x - x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Schrijfwijze 2:** $\int f \, du = f \cdot u - \int u \, df$

  Stel $f(x) = \ln x$ en $du = u'(x) \, dx = 9x^2 \, dx$

  $$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{9x^2 \, dx}_{du} = \int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \underbrace{d(3x^3)}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{3x^3}_{u(x)} - \int \underbrace{3x^3}_{u(x)} \underbrace{d(\ln x)}_{df}$$
  $$= 3x^3 \ln x - \int \frac{3x^3}{x} \, dx = 3x^3 \ln x - x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Om partiële integratie te kunnen toepassen moet de integrand het product zijn van 2 functies. Maar ook als de integrand bestaat uit slechts 1 functie kunnen we partiële integratie toepassen door deze functie te vermenigvuldigen met 1.

Voorbeeld 7. Bereken $\int \ln x \, dx$.

Om partiële integratie te kunnen toepassen beschouwen we $\ln x$ als een product $\ln x \cdot 1$.

- Schrijfwijze 1: $\int f(x) \cdot u'(x) \, dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x) \, dx$

  Stel $f(x) = \ln x$ en $u'(x) = 1$, dan is $f'(x) = 1/x$ en $u(x) = \int u'(x) \, dx = \int 1 \, dx = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$.

  Partiële integratie geeft dan

  $$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{u'(x)} \, dx \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{u(x)} - \int \underbrace{1/x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{u(x)} \, dx$$
  $$= x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

CC BY-NC-SA 4.0

Partiële integratie

- Schrijfwijze 2: $\displaystyle\int f\,du = f\cdot u - \int u\,df$

$$\int \underbrace{\ln x}_{f(x)}\underbrace{dx}_{du} \overset{P.I.}{=} \underbrace{\ln x}_{f(x)}\cdot\underbrace{x}_{u(x)} - \int \underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{d\ln x}_{df} = x\ln x - \int \frac{x}{x}\,dx$$
$$= x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Soms bekom je na (herhaald) partieel integreren opnieuw de *oorspronkelijke* integraal. Onderstaand voorbeeld legt uit welke techniek je dan kan toepassen.

Voorbeeld 8. Bereken $\displaystyle\int \sin x\, e^x\,dx$.

- **Schrijfwijze 1:** $\displaystyle\int f(x)\cdot u'(x)\,dx = f(x)u(x) - \int f'(x)u(x)\,dx$

  We stellen $I = \displaystyle\int \sin x\, e^x\,dx$ voor de verdere berekening. Welke keuze we maken voor $f(x)$ en $u'(x)$ is niet zo belangrijk in deze oefening. We maken de keuze $f(x)=\sin x$ en $u'(x)=e^x$, dan is $f'(x)=\cos x$ en $u(x)=e^x$. Maak deze oefening opnieuw met de andere keuze.

$$I = \int \sin x\cdot e^x\,dx = \sin x\cdot e^x - \int \cos x\cdot e^x\,dx$$

  We passen nogmaals partiële integratie toe. Ditmaal stellen we $f(x)=\cos x$ en $u'(x)=e^x$, dan is $f'(x)=-\sin x$ en $u(x)=e^x$.

$$I = \sin x\cdot e^x - \left(\cos x\cdot e^x - \int(-\sin x)\cdot e^x\,dx\right) = (\sin x - \cos x)e^x - \int \sin x\cdot e^x\,dx$$

  In het rechterlid staat nu terug de oorspronkelijke integraal I.

$$I = (\sin x - \cos x)e^x - I$$

  We brengen I naar het linkerlid en bekomen:

$$2\,I = e^x\,(\sin x - \cos x) + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

  Dus

$$I = \frac{1}{2}\,e^x\,(\sin x - \cos x) + c_1, \quad c_1\in\mathbb{R}\ (\text{Stel } c_1 = c/2).$$

- **Schrijfwijze 2:** $\displaystyle\int f\,du = f\cdot u - \int u\,df$

  Hier hebben we de andere keuze gemaakt: we stellen $f(x)=e^x$ en $du = u'(x)\,dx = \sin x\,dx$

$$\begin{aligned} I = \int \sin x\, e^x\,dx &= -\int e^x\,d\cos x \\ &\overset{P.I.}{=} -e^x\cos x + \int \cos x\,de^x \\ &= -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx \\ &= -e^x\cos x + \int e^x\,d\sin x \\ &\overset{P.I.}{=} -e^x\cos x + e^x\sin x - \int \sin x\,de^x \\ &= -e^x\cos x + e^x\sin x - \underbrace{\int \sin x\, e^x\,dx}_{I}. \end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

We brengen I naar het linkerlid en bekomen:

$$2\ I = e^x\ (\sin x - \cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dus

$$I = \frac{1}{2}\ e^x\ (\sin x - \cos x) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}\ (\text{Stel } c_1 = c/2).$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.51)