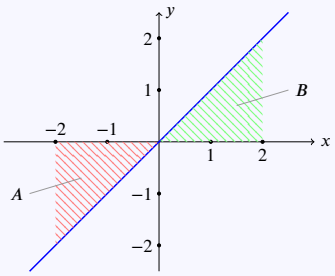
Bepaalde integralen van even en oneven functies

Voor even en oneven functies is het in sommige gevallen eenvoudig om de bepaalde integraal te berekenen.

Voorbeeld 1 (Bepaalde integralen van even en oneven functies).

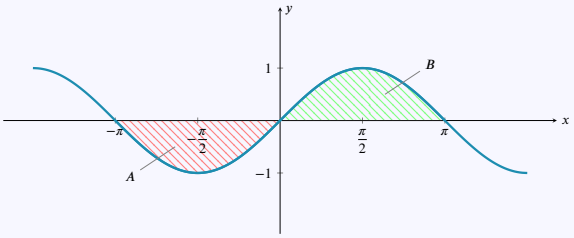
1. $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left(2^2-(-2)^2\right) = \frac{1}{2}(4-4) = 0$



De integraal kan ook berekend worden als

$$\int_{-2}^{2} x\,dx = -\text{ opp } A + \text{ opp } B = 0$$

2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = \big[-\cos x\big]_{-\pi}^{\pi} = -\cos\pi - \big(-\cos(-\pi)\big) = -1-(-1) = 0$

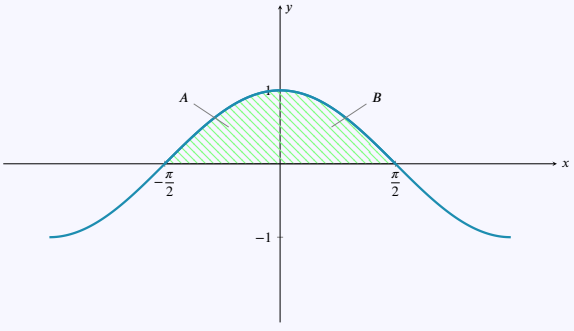


De integraal kan ook berekend worden als

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx = -\text{ opp } A + \text{ opp } B = 0$$

3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \big[\sin x\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 1-(-1) = 2$

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\big[\sin x\big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2\Big(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\Big) = 2(1-0) = 2$$



CC BY-NC-SA 4.0

Bepaalde integralen van even en oneven functies

We kunnen zien dat

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \text{ opp } A + \text{ opp } B = 2 \text{ opp } B$$

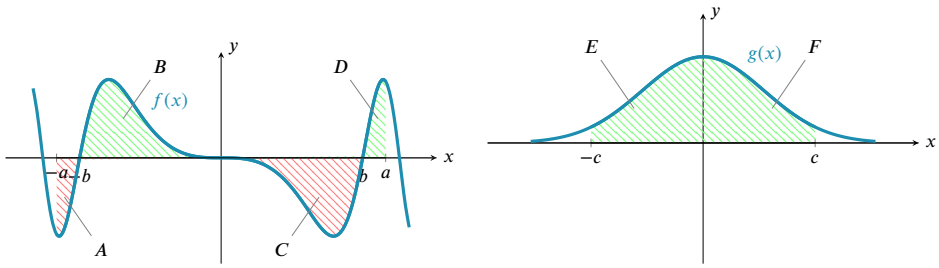
Volgende eigenschap laat zien hoe we in het algemeen bepaalde integralen van even en oneven functies kunnen vereenvoudigen.

Eigenschap 1 (Bepaalde integraal van even en oneven functies)**.**

Voor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een oneven functie, en $a \in \mathbb{R}$ geldt $\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 0$.

Voor $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een even functie en $a \in \mathbb{R}$ geldt $\int_{-a}^{a} g(x) \, dx = 2 \int_{0}^{a} g(x) \, dx$.

Als we de integraal zien als een georiënteerde oppervlakte is dit eenvoudig in te zien.



De bepaalde integraal van de oneven functie f over het interval $[-a, a]$ is dan

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x) \, dx &= \int_{-a}^{-b} f(x) \, dx + \int_{-b}^{0} f(x) \, dx + \int_{0}^{b} f(x) \, dx + \int_{b}^{a} f(x) \, dx \\ &= - \text{ opp } A + \text{ opp } B - \text{ opp } C + \text{ opp } D = 0\end{aligned}$$

omdat de oppervlaktes van het groene en rode deel gelijk zijn.

De bepaalde integraal van de even functie g over het interval $[-c, c]$ is

$$\int_{-c}^{c} g(x) \, dx = \int_{-c}^{0} g(x) \, dx + \int_{0}^{c} g(x) \, dx = \text{ opp } E + \text{ opp } F = 2 \text{ opp } F.$$

Voorbeeld 2.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^3 \, dx = \int_{-1}^{1} x^3 \, dx + \int_{1}^{2} x^3 \, dx = 0 + \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{1}{4}(2^4 - 1^4) = \frac{1}{4}(16 - 1) = \frac{15}{4}$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4 \, dx = 2\int_{0}^{1} x^4 \, dx = 2\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{2}{5}(1^5 - 0^5) = \frac{2}{5}$

Oefening 1. Welke bepaalde integralen zijn gelijk aan nul?

1. $\displaystyle\int_{-10}^{10} x^3 \, dx$ $\boxed{= 0}$ $\boxed{\neq 0}$

CC BY-NC-SA 4.0

Bepaalde integralen van even en oneven functies

2. $\displaystyle\int_{-10}^{10} x^4\,dx$ $\boxed{=0}$ $\boxed{\neq 0}$

3. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$ $\boxed{=0}$ $\boxed{\neq 0}$

4. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin x\,dx$ $\boxed{=0}$ $\boxed{\neq 0}$

5. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x\,dx$ $\boxed{=0}$ $\boxed{\neq 0}$

6. $\displaystyle\int_{-3}^{3} (2x - x^3)\,dx$ $\boxed{=0}$ $\boxed{\neq 0}$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.50)