Definitie onbepaalde integraal

We zetten een volgende stap in de wiskundige processie van *definieer-iets-nieuws* gevolgd door *en-keer-het-proces-om*. We leerden optellen, en kort daarna aftrekken. We leerden vermenigvuldigen, en kort daarna delen. Hetzelfde voor kwadrateren gevolgd door vierkantswortel trekken, en exponentiële functies gevolgd door logaritmische functies. Nu zullen we leren het proces van afgeleiden berekenen *omkeren*: we zoeken niet de afgeleide f' van een functie f, we zoeken van welke functie F deze functie f de afgeleide *is*.

Gegeven een functie f, zoeken we dus (alle) functies F zodat $F' = f$. Later zullen we uitleggen *waarom* deze omkering-van-de-afgeleide een erg belangrijk begrip is in de wiskunde en in alle wetenschappen.

Voorbeeld 1.

Geef voor volgende functies f telkens één of meerdere functies F zodat $F' = f$.

1. Een functie met als afgeleide functie $f : x \mapsto e^x$ is $F : x \mapsto e^x$

Uitwerking: Inderdaad, want $(e^x)' = e^x$. Merk op dat ook $(e^x + 7)' = e^x$. De afgeleide van elke functie $F_c : x \mapsto F_c(x) = e^x + c$, met $c \in \mathbb{R}$ is telkens gelijk aan $f : x \mapsto f(x) = e^x$.

2. Een functie met als afgeleide functie $f : x \mapsto x$ is $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$

Uitwerking: Inderdaad, want $(\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2}2x = x$. Merk op dat ook $(\frac{1}{2}x^2 + 3)' = x$. De afgeleide van elke functie $F_c : x \mapsto F_c(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$, met $c \in \mathbb{R}$ is telkens gelijk aan $f : x \mapsto f(x) = x$.

We hebben een nieuwe naam nodig voor 'een functie waarvan de afgeleide f is'. We noemen dergelijke functie een *primitieve* functie van f, waarbij het woord primitief gebruikt wordt in de betekenis van *oorspronkelijk*. Een primitieve functie is dus een *oorspronkelijke* functie waarvan je vertrokken bent bij het afleiden.

Definitie 1 (Primitieve functie)**.**

Een **primitieve functie** van een functie f is een functie F waarvoor geldt dat

$$F' = f.$$

Voorbeeld 2.

1. $x \mapsto e^x$ is een primitieve functie van $x \mapsto e^x$

2. $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ is een primitieve functie van $x \mapsto x$

3. $x \mapsto x^3$ is een primitieve functie van $x \mapsto 3x^2$

4. $x \mapsto 42x$ is een primitieve functie van $x \mapsto 42$

Opmerking 1.

Volgens deze definitie kunnen we ook zeggen dat een afleidbare functie f een primitieve functie is van f'. Bijvoorbeeld $f(x) = x^3$ is een primitieve functie van $f'(x) = 3x^2$.

We moeten er rekening mee houden dat een functie meerdere primitieve functies kan hebben. Uit de rekenregels van afgeleiden volgt dat twee functies die op een constante na gelijk zijn aan elkaar dezelfde afgeleide hebben: $(F + c)' = F' + c' = F'$. Als F een primitieve functie is van f, dus als $F' = f$, dan geldt ook $(F + c)' = F' = f$. Bijgevolg zijn ook de functies $F + c$ allemaal primitieve functies van f. Zijn dit *alle* primitieve functies van f? Het antwoord is ja, zoals blijkt uit volgende eigenschap:

Eigenschap 1 (Functies met gelijke afgeleiden zijn gelijk op een constante na)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

Definitie onbepaalde integraal

Twee afleidbare functies F_1 en F_2 op een interval I met *gelijke afgeleiden*

$$F_1'(x) = F_2'(x) \quad \text{voor alle } x \in I,$$

zijn *gelijk op een constante na*. Dat betekent dat er een constante $c \in \mathbb{R}$ bestaat zodat

$$F_1(x) = F_2(x) + c \quad \text{voor alle } x \in I.$$

Met *één* primitieve functie F van f kennen we dus *alle* primitieve functies van f: ze zijn allemaal van de vorm $F + c$, met $c \in \mathbb{R}$. Omdat er geen *unieke* primitieve functie is van f, spreken we over de *verzameling* van alle primitieve functies van f:

Definitie 2 (Onbepaalde integraal)**.**

De **onbepaalde integraal** van een functie f, genoteerd $\int f(x)\ dx$, is de *verzameling van alle primitieve functies* van f. Omdat alle primitieve functies van f aan elkaar gelijk zijn op een constante na noteren we ook

$$\int f(x)\,dx \overset{\text{notatie}}{=} F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

met F een (willekeurige) primitieve functie van f.

We noemen $f(x)$ de **integrand**, x de **integratievariabele** en c de **integratieconstante**.

Het zoeken (of 'berekenen') van $\int f(x)\,dx$ noemt men het **primitiveren** of **integreren** van $f(x)$.

Voorbeeld 3.

1. $\int e^x\,dx = e^x + c$
2. $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$
3. $\int 3x^2\,dx = x^3 + c$
4. $\int 42\,dx = 42x + c$

Voorbeeld 4.

De integratievariabele wordt niet steeds met de letter x genoteerd, we kunnen ook schrijven dat

- $\int e^\theta\,d\theta = e^\theta + c$
- $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + c$
- $\int 3t^2\,dt = t^3 + c$
- $\int 42\,dR = 42R + c$

Opmerking 2.

Een primitieve functie is dus maar bepaald op een constante na. Via een trucje wordt dat probleem hier omzeild door de onbepaalde integraal de *verzameling* te noemen van al deze primitieve functies. In de praktijk denkt iedereen over de onbepaalde integraal als 'een functie die slechts op een constante na bepaald is', of 'een functie waar je steeds een willekeurige constante bij kan optellen'.

Afleiden en integreren heffen elkaar op.

Inderdaad, als we een functie f eerst afleiden en deze afgeleide dan integreren krijgen we (op een constante na) terug f:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

CC BY-NC-SA 4.0

omdat f een primitieve functie is van f'.

Als we f eerst integreren

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \text{ met } F \text{ een primitieve functie van } f, \quad c \in \mathbb{R}$$

en dan het resultaat weer afleiden, krijgen we terug f :

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+c)' = F'(x) = f(x).$$

Dit vatten we samen in volgende eigenschap:

Eigenschap 2 (Afleiden en integreren heffen elkaar op)**.**

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

Met de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ notatie:

$$\int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right)\,dx = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,dx = f(x)$$

We bekijken deze eigenschap ook in de notatie met differentialen:

Opmerking 3 (Werken met differentialen)**.**

De uitdrukking dx (of dt etc.) wordt in sommige cursussen en handboeken beschouwd als een symbool zonder "echte betekenis", dat enkel de naam van de integratievariabele aangeeft.

Men kan het echter ook beschouwen als een *differentiaal*. Eén van de vele mogelijke definities zegt dat dx een 'basisdifferentiaal' is, en dat per definitie voor een afleidbare functie f de differentiaal van f gelijk is aan

$$df \overset{\text{def}}{=} f'(x)dx.$$

Dit begrip, of deze notatie, leidt tot een kortere formulering van de eigenschappen van integralen. Bij de studie van de *bepaalde* integraal, zal de differentiaal ook een concretere betekenis krijgen.

Door beide leden van $df \overset{\text{def}}{=} f'(x)dx$ te integreren, krijgen we de gelijkheid

$$\int df = \int f'(x)dx$$

en omdat $\int f'(x)dx = f(x) + c, c \in \mathbb{R}$ volgt dat

$$\int df = f(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Bijgevolg heft de integraal de differentiaal dus op, op een integratieconstante na.

CC BY-NC-SA 4.0

Omgekeerd, links en rechts de differentiaal nemen in de formule $\int f(x)dx = F(x) + c$ geeft:

$$d \int f(x)dx = d(F(x) + c) = dF = F'(x)dx = f(x)dx$$

en dus

$$\boxed{d \int f(x)dx = f(x)dx}$$

Bijgevolg heft de differentiaal de integraal op (waarbij geen integratieconstante optreedt).

Opmerking 4.

We kunnen dit process grafisch voorstellen (waarbij we de integratieconstante negeren):

$$\underset{\text{(integraal)}}{\int f(x)dx} \quad \underset{\text{integreren}}{\overset{\text{afleiden}}{\rightleftarrows}} \quad \underset{\text{(functie)}}{f} \quad \underset{\text{integreren}}{\overset{\text{afleiden}}{\rightleftarrows}} \quad \underset{\text{(afgeleide functie)}}{f'}$$

Uitweiding 1 (Subtiele subtiliteiten over de notatie $F(x) + c$)**.**

De notatie $F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ voor een onbepaalde integraal (dus voor een *verzameling* van functies) is erg handig, maar notatie-technisch eerder merkwaardig.

Strikt wiskundig zou voor een *verzameling* de notatie $\{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ veel correcter zijn.

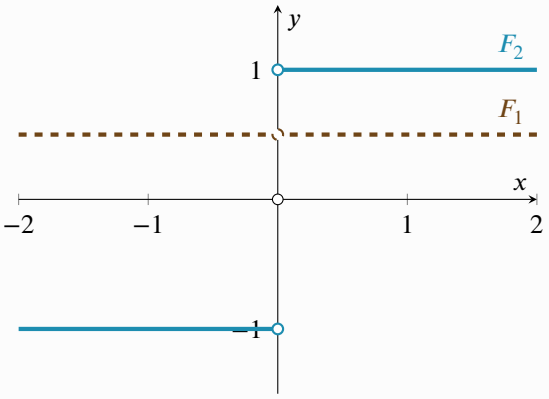
De notatie $F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ is dus een - in de praktijk erg handige - *afspraak* om de verzameling van alle primitieve functies te noteren.

Uitweiding 2 (Noodzaak dat I een interval is)**.**

Merk op dat het in bovenstaande Eigenschap 1 belangrijk is dat I een interval is, want als het domein van f uit twee stukken bestaat, kan de integratieconstante *op elk stuk* worden gekozen, en geldt dus niet meer noodzakelijk dat er een c bestaat zodat $F_1 = F_2 + c$. Inderdaad, beschouw volgende functies op $\mathbb{R}_0$:

$F_1(x) = 1/2$ en

$$F_2(x) = \begin{cases} 1 \text{ als } x > 0 \\ -1 \text{ als } x < 0 \end{cases}$$



Dan geldt dat $F_1' = F_2' = 0$, maar er bestaat geen $c \in \mathbb{R}$ zodat $F_1(x) = F_2(x) + c$ voor alle $x \in \mathbb{R}_0$.

Dus, op $\mathbb{R}_0$ geldt Eigenschap 1 *niet*. Het domein $\mathbb{R}_0$ is dan ook geen interval.

CC BY-NC-SA 4.0