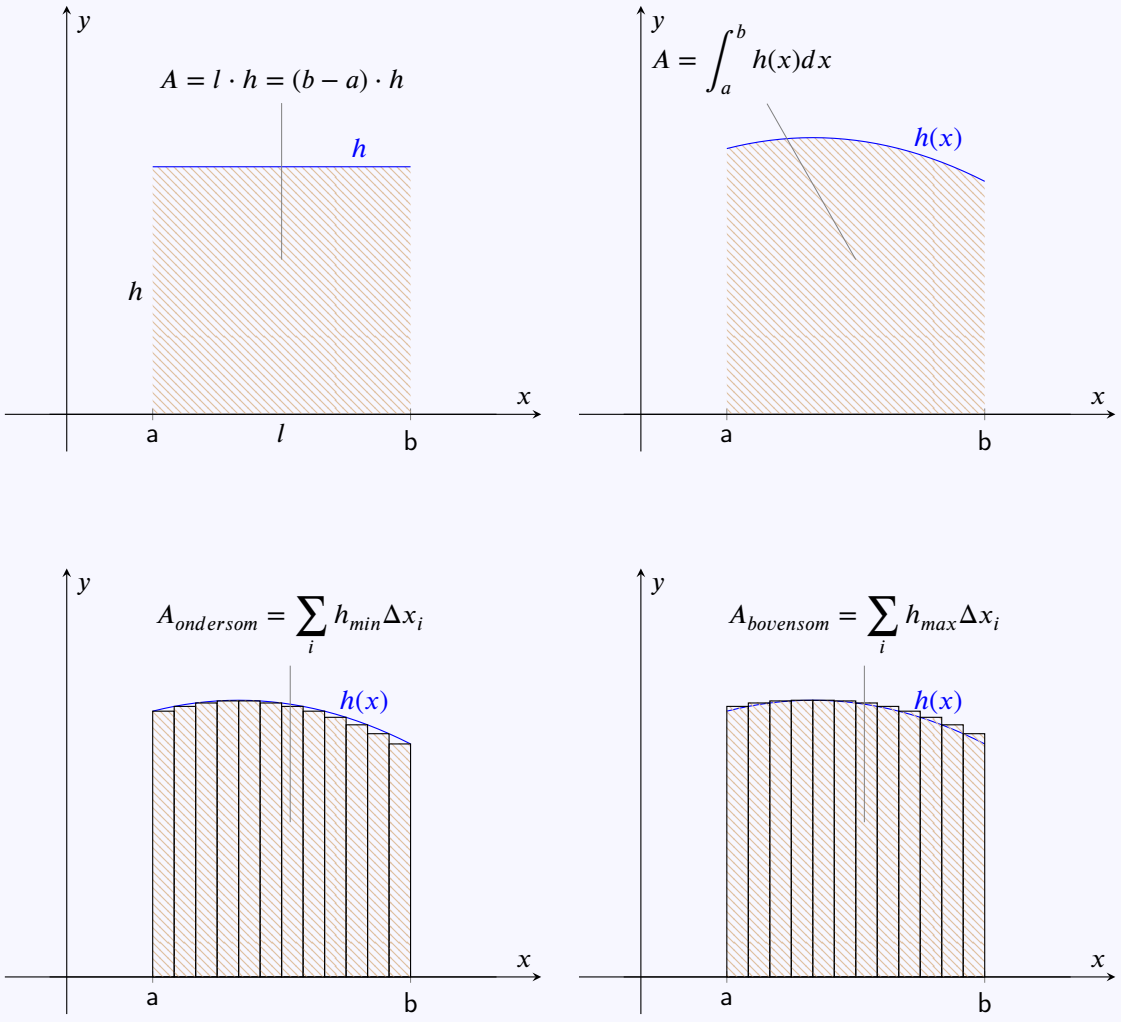
Bepaalde integralen

0.1 Definitie bepaalde integraal

Voorbeeld 1 (Oppervlakte)**.** Voor een rechthoek met lengte l en hoogte h kent iedereen de formule voor de oppervlakte: $A = l \cdot h$. De bepaalde integraal is in zekere zin een veralgemening van deze formule, waarbij de bovenzijde van de rechthoek niet meer 'recht' is, maar ook een kromme kan zijn. We kunnen dan niet meer vermenigvuldigen met de vaste hoogte h, maar we moeten vermenigvuldigen met een 'variërende hoogte' $h(x)$. De notatie en de berekening daarvan gaat via de zogenaamde *bepaalde integraal*, die kan worden gedefinieerd als een limiet van een som van kleine rechthoekjes.



We geven kort de meetkundige (pseudo-)definitie van een bepaalde integraal:

Definitie 1 (Bepaalde integraal)**.**

Zij f een continue, *positieve* functie op een interval $[a, b]$.

De **bepaalde integraal** van f over het interval $[a, b]$, genoteerd als

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

CC BY-NC-SA 4.0

is per definitie gelijk aan de *oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$.

We noemen a en b de **integratiegrenzen** en $[a, b]$ het **integratie-interval**, en we **integreren over** dat interval.

Uitweiding 1 (Subtiele subtiliteiten over oppervlaktes)**.** In bovenstaande definitie hebben we aangenomen dat we weten wat de oppervlakte is tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$. Strikt wiskundig wordt de definitie in de omgekeerde zin gegeven: we definiëren *de grootte van de oppervlakte onder de kromme* als het getal dat door de bepaalde integraal wordt berekend. De bepaalde integraal zelf wordt dan gedefinieerd als een limiet van ondersommen en bovensommen (zogenaamde Riemannsommen). Die Riemannsommen benaderen steeds beter de oppervlakte onder de kromme, en daarom is het zinvol om (de grootte van) de oppervlakte onder de kromme wiskundig te definiëren als de limiet van die sommen, en dus als de *bepaalde integraal*.

0.2 Verband met de onbepaalde integraal

Volgende belangrijke stelling zegt dat we de bepaalde integraal (dus een oppervlakte, of meer algemeen een oneindige-som-van-oneindig-kleine-dingen) kunnen berekenen met behulp van de onbepaalde integraal.

Eigenschap 1 (Verband tussen bepaalde en onbepaalde integralen)**.**

Zij f een continue functie op een interval $[a, b]$ en F een primitieve functie van f (dus $\int f(x)\,dx = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$). Dan geldt

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a) \qquad \overset{\text{notatie}}{=} \qquad \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Deze formule laat toe om het berekenen van een *bepaalde* integraal te reduceren tot het berekenen van de *onbepaalde* integraal, en dan de integratiegrenzen in te vullen.

Merk op dat het hierbij geen probleem is dat een primitieve functie slechts op een constante na bepaald is:

$$\big(F(b) + c\big) - \big(F(a) + c\big) = F(b) - F(a).$$

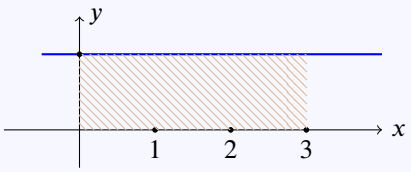
Elke primitieve functie F van f is dus geschikt om de bepaalde integraal uit te rekenen.

Hierbij is $\Big[F(x)\Big]_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b) - F(a)$ een handige notatie. Soms gebruikt men ook $F(x)\Big|_a^b \overset{\text{def}}{=} F(b) - F(a)$.

Voorbeeld 2. Eenvoudige bepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int_0^3 1\,dx = \Big[x\Big]_0^3 = 3 - 0 = 3$

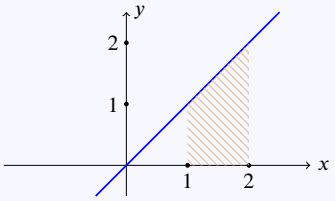
De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de rechte $y = 1$ (dit is de grafiek van $f(x) = 1$), de x-as en de verticale rechten $x = 0$ en $x = 3$.



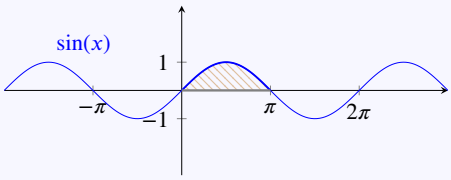
2. $\displaystyle\int_1^2 x\,dx = \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_1^2 = \frac{1}{2}(2^2 - 1^2) = \frac{1}{2}(4 - 1) = \frac{3}{2}$

CC BY-NC-SA 4.0

De berekende oppervlakte is de oppervlakte van het gebied tussen de rechte $y = x$ (dit is de grafiek van $f(x) = x$), de x-as en de verticale rechten $x = 1$ en $x = 2$.



3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$



Uit de formule $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$ volgen onmiddellijk de basiseigenschappen:

Eigenschap 2.

Zij F en G functies gedefinieerd op een interval $[a, b]$, $c \in [a, b]$ en $k, l \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\begin{aligned}
\big[F(x)\big]_a^a &= F(a) - F(a) = 0 \\
\big[kF(x)\big]_a^b &= k\big[F(x)\big]_a^b \\
\big[F(x) + G(x)\big]_a^b &= \big[F(x)\big]_a^b + \big[G(x)\big]_a^b \\
\big[kF(x) + lG(x)\big]_a^b &= k\big[F(x)\big]_a^b + l\big[G(x)\big]_a^b \\
\big[F(x)\big]_b^a &= -\big[F(x)\big]_a^b = \big[-F(x)\big]_a^b \\
\big[F(x)\big]_a^b &= \big[F(x)\big]_a^c + \big[F(x)\big]_c^b
\end{aligned}$$

Uit deze eigenschappen van het symbool $\big[F(x)\big]_a^b$ volgt dan onmiddellijk:

Eigenschap 3 (Eigenschappen van de bepaalde integraal)**.**

CC BY-NC-SA 4.0

Bepaalde integralen

Zij f een functie gedefinieerd op $[a,b]$ en $c \in [a,b]$. Dan is

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 \qquad \text{(integreren over een leeg interval)}$$

$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b (-f(t))\,dt \qquad \text{(integreren in omgekeerde richting)}$$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \qquad \text{(integratie-interval opsplitsen)}$$

Voorbeeld 3.

1. $\int_4^8 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^8 = \frac{1}{2}(8^2-4^2) = \frac{1}{2}(64-16) = 24$

2. $\int_8^4 x\,dx = -\int_4^8 x\,dx = -24,$

of anders berekend $\int_8^4 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_8^4 = \frac{1}{2}(4^2-8^2) = \frac{1}{2}(16-64) = -24$

3.

$$\int_4^8 x\,dx = \int_4^6 x\,dx + \int_6^8 x\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_4^6 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_6^8 = \frac{1}{2}(6^2-4^2) + \frac{1}{2}(8^2-6^2) = \frac{1}{2}(36-16+64-36) = 24$$

Opmerking 1 (Interpretatie bepaalde integraal)**.**

De bepaalde integraal wordt meestal ingevoerd als een manier om oppervlaktes te berekenen. Maar je kan de bepaalde integraal ook zien als een methode om *producten te berekenen van variërende grootheden*. We willen bijvoorbeeld het product berekenen van tijd en snelheid, of tijd en gewicht, of tijd en afstand, waarbij telkens de snelheid, gewicht of afstand *niet* noodzakelijk constant is. Dat is precies wat de bepaalde integraal doet.

Voorbeeld: bij constante snelheid is de afgelegde weg s na tijd t gelijk aan de snelheid v maal de tijd t:

$$s = v \cdot t\,.$$

Bij een constante snelheid van $v = 120$ km/u leg je in een tijd van $t = 2$ uur precies $2 \cdot 120 = 240$ km af.

Maar, als de snelheid *afhangt van de tijd*, dus als $v = v(t)$, dan is het product $v(2)\cdot 2$ *niet* de afgelegde weg na 2 uur. Inderdaad, stel dat de snelheid na tijd t gelijk is aan $v(t) = 60\cdot t$. Dat betekent: tamelijk traag versnellen, beginnend van stilstand. Na een half uur is de snelheid $v(1/2) = 60 \cdot 1/2 = 30$ km/u, en na twee uur is ze $v(2) = 2 \cdot 60 = 120$km/u. De afgelegde weg na 2 uur is dan *niet* $s(2) = v(2) \cdot 2 = 240$km (want zo ver geraak je enkel als je constant 120km/u rijdt). In dit scenario haal je die snelheid pas helemaal op het einde.

Dankzij de techniek van de bepaalde integraal kunnen we wel schrijven dat de afgelegde weg na 2 uur is:

$$s(2) = \int_0^2 v(t)dt = \int_0^2 (60 \cdot t)dt$$

CC BY-NC-SA 4.0

0.3 Georiënteerde oppervlakte

In de definitie van de bepaalde integraal hebben we de functie f positief verondersteld.

Als f niet noodzakelijk positief is, moeten we voorzichtiger zijn met wat we precies verstaan onder 'oppervlakte'. We geven een nieuwe definitie:

Definitie 2 (Georiënteerde oppervlakte en bepaalde integraal)**.**

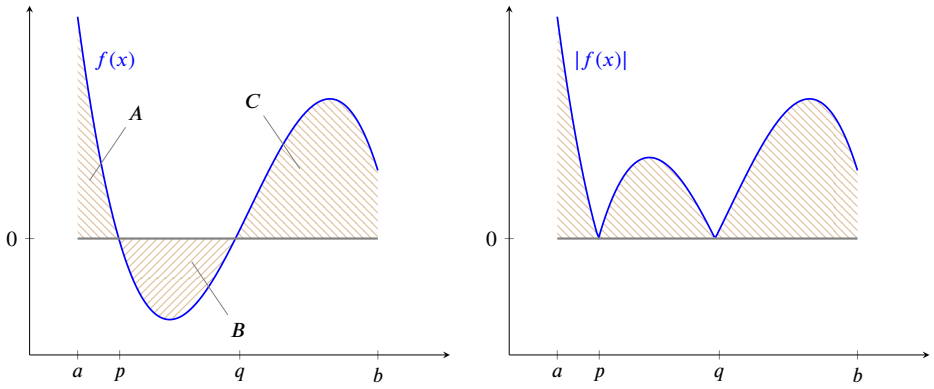
De **georiënteerde oppervlakte** telt per definitie de oppervlakte van een gebied dat boven de x-as ligt *positief* en telt de oppervlakte van een gebied dat onder de x-as ligt *negatief*.

Als f een continue functie is op een interval $[a, b]$, dan is de bepaalde integraal

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

gelijk aan de *georiënteerde oppervlakte* van het gebied tussen de grafiek van f, de x-as en de verticale rechten $x = a$ en $x = b$.

Dus als de functie f negatief is, telt de bepaalde integraal die oppervlakte ook als negatief. In de meeste gevallen is dat gelukkig precies wat we willen (negatieve snelheid betekent achteruit rijden, en de overeenstemmende afstand moeten we dus redelijkerwijze meestal ook van de totale afgelegde weg aftrekken).

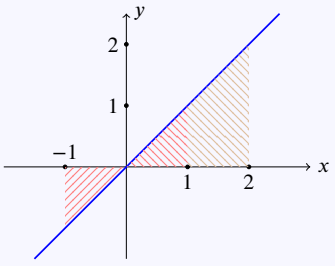


De bepaalde integraal van de functie f over het interval $[a, b]$ in de linkse figuur is dus

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx + \int_p^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx = \text{opp}\,A - \text{opp}\,B + \text{opp}\,C\,.$$

Voorbeeld 4.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}(2^2 - (-1)^2) = \frac{1}{2}(4-1) = \frac{3}{2}$



CC BY-NC-SA 4.0

Bepaalde integralen

Oefening 1. Bereken volgende bepaalde integralen en duid aan op een figuur wat je berekend hebt.

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = \ldots\ldots$
2. $\int_{0}^{2\pi} \sin x \, dx = \ldots\ldots$

Indien het echter de bedoeling is om $\text{opp}\, A + \text{opp}\, B + \text{opp}\, C$ te berekenen, dan moet de bepaalde integraal van $|f(x)|$ berekend worden, zoals in de rechtse figuur geïllustreerd werd.

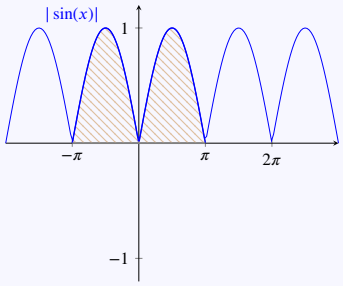
$$\int_a^b |f(x)| \, dx = \text{opp}\, A + \text{opp}\, B + \text{opp}\, C$$

Om $\int_a^b |f(x)| \, dx$ te berekenen moet je het integratie-interval $[a, b]$ opsplitsen in stukken waarop f ofwel positief, ofwel negatief is. Hiervoor moet je al de nulpunten van f zoeken. Op elk van deze stukken is $|f(x)|$ dan ofwel gelijk aan $f(x)$, ofwel gelijk aan $-f(x)$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(x)| \, dx &= \int_a^p |f(x)| \, dx + \int_p^q |f(x)| \, dx + \int_q^b |f(x)| \, dx \\
&= \int_a^p f(x) \, dx - \int_p^q f(x) \, dx + \int_q^b f(x) \, dx \\
&= \text{opp}\, A + \text{opp}\, B + \text{opp}\, C
\end{aligned}$$

Voorbeeld 5.

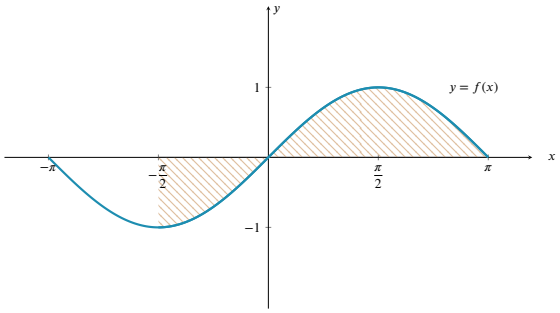
$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \, dx &= \int_{-\pi}^{0} |\sin x| \, dx + \int_0^{\pi} |\sin x| \, dx \\
&= \int_{-\pi}^{0} -\sin x \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \, dx \\
&= \Big[\cos x\Big]_{-\pi}^{0} + \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} \\
&= \cos(0) - \cos(-\pi) + (-\cos \pi) - (-\cos 0) \\
&= 1 - (-1) + (-(-1)) - (-1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4
\end{aligned}$$



Oefening 2. Waaraan is de oppervlakte van het gearceerde gebied op de figuur gelijk?

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.35)

Bepaalde integralen



Meerkeuze:

(a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{\pi} f(x)dx$

(b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx$

(c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx$

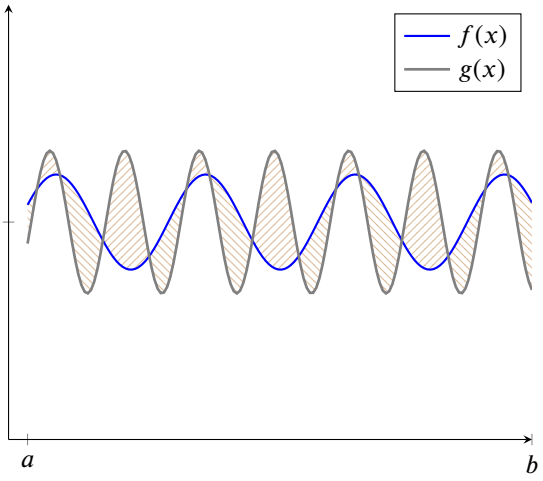
(d) $-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx$

Merk op dat zodra f zowel positieve als negatieve waarden aanneemt op het interval $[a, b]$ in het algemeen niet geldt dat

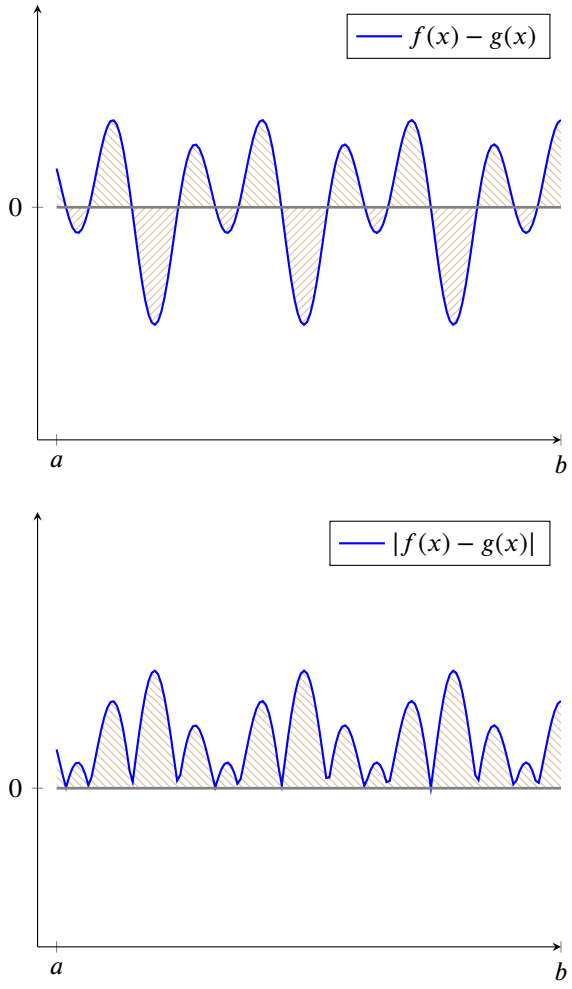
$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| .$$

Om de oppervlakte **tussen twee krommen** te berekenen, berekenen we de bepaalde integraal van de absolute waarde van het verschil van beide functies:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.35)



De ligging van de x-as heeft geen belang heeft bij het berekenen van de oppervlakte tussen twee krommen, want $|f(x) - g(x)|$ is de waarde van de bovenliggende kromme min die van de onderliggende kromme. De oppervlakte is dus de som van de integralen tussen twee opeenvolgende snijpunten met als integrand het voorschrift van de *bovenliggende kromme* min die van de *onderliggende kromme*, ongeacht of die krommen boven of onder de x-as liggen.

0.4 Substitutie bij bepaalde integralen

Bij het berekenen van *bepaalde* integralen met substitutie moeten voor de *nieuwe* substitutie-variabele ook de integratiegrenzen worden aangepast. Er zijn twee oplossingsmethodes: ofwel bereken en gebruik je inderdaad de nieuwe integratiegrenzen, ofwel bereken je eerst de *onbepaalde* integraal, en vul je in de uitkomst de oorspronkelijke grenzen in.

Voorbeeld 6. Bereken $\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx$

- **Schrijfwijze 1:** We illustreren beide methodes:
  - *Methode 1:* **Integratiegrenzen aanpassen**: Stel $u = x^2$, dan is $du = dx^2 = 2x dx$. Als $x = 1$ dan is $u = 1$, als $x = 2$ dan is $u = 4$

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \int_1^4 e^u \, du = \left[e^u\right]_1^4 = e^4 - e$$

CC BY-NC-SA 4.0

– *Methode 2:* **Eerst de onbepaalde integraal berekenen** met de substitutie $u = x^2$;

$$\int e^{x^2} 2x \, dx = e^{x^2} + c, c \in \mathbb{R},$$

en dan $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ toepassen:

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e.$$

- **Schrijfwijze 2:**

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \int_1^2 e^{x^2} \, dx^2 = \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e$$

Opmerking 2.

De tweede methode, dus eerst de onbepaalde integraal uitrekenen en dan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

toepassen, heeft als voordeel dat je dan de nieuwe grenzen niet moet zoeken.

Waarschuwing 1 (Veelgemaakte fouten)**.**

- De grenzen van x gebruiken als grenzen voor u:

$$\cancel{\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx = \int_1^2 e^u \, du}$$

- Tijdens de berekening van de bepaalde integraal de grenzen niet aanpassen, ook al geeft dit een correct resultaat:

$$\int_1^2 e^{x^2} 2x \, dx \neq \int_1^2 e^u \, du \neq \left[e^{x^2}\right]_1^2 = e^{2^2} - e^{1^2} = e^4 - e$$

0.5 Partiële integratie bij bepaalde integralen

Voorbeeld 7. Bereken $\int_0^1 xe^x \, dx$.

- **Schrijfwijze 1:** Stel $f(x) = x$ en $u'(x) = e^x$, dan is $f'(x) = 1$ en $u(x) = e^x$.
  Partiële integratie geeft dan

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \cdot e^x \, dx &\overset{P.I.}{=} \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx \\ &= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = 1;\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.35)

- **Schrijfwijze 2:** Stel $f(x) = x$ en $du = u'(x)\,dx = e^x\,dx$;

$$\int_0^1 x \cdot e^x\,dx = \int_0^1 x d(e^x) \overset{P.I.}{=} \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx$$
$$= \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - (e^1 - e^0) = e - (e-1) = 1$$

Voorbeeld 8. Bereken $\int_1^e \ln x\,dx$.

Dit voorbeeld wordt in onderstaande video opgelost door $v = x$ te kiezen in de formule $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (volgens Schrijfwijze 2). Het antwoord is $1 - \ln 1$.

YouTube link: https://www.youtube.com/watch?v=x9m15nsOl_o

CC BY-NC-SA 4.0