Basisintegralen

De onbepaalde integraal van een functie f is per definitie $\int f(x)dx = F(x)+c$ met $F' = f$. Dit betekent dat integreren en differentiëren elkaars inverse zijn. Voor een aantal functies is het zeer gemakkelijk om de onbepaalde integraal te vinden: namelijk voor de uitkomsten van de basisafgeleiden. Inderdaad, neem als voorbeeld $(\sin x)' = \cos x$. Stel dat je een functie F zoekt waarvan de afgeleide gelijk is aan het rechterlid, dus gelijk aan $f(x) = \cos x$. De formule voor de afgeleide zegt dan dat $F(x) = \sin x$ als afgeleide $f(x) = \cos x$ heeft. Het volstaat dus om de reeks basis*afgeleiden* van *rechts naar links* te lezen om een hele reeks basis*integralen* te vinden. In onderstaand overzicht is de afgeleide van het rechterlid steeds de integrand in het linkerlid.

Eigenschap 1 (Basisintegralen)**.** (met $c \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}, r \neq -1, a \in \mathbb{R}_0^+, a \neq 1$)

$$\begin{array}{lcllcl}
\displaystyle\int 0\,dx & = & c & \displaystyle\int dx & = & x+c \\
\displaystyle\int x^r\,dx & = & \dfrac{1}{r+1}x^{r+1}+c & \displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln|x|+c \\
\displaystyle\int e^x\,dx & = & e^x+c & \displaystyle\int a^x\,dx & = & \dfrac{a^x}{\ln a}+c \\
\displaystyle\int \sin x\,dx & = & -\cos x+c & \displaystyle\int \cos x\,dx & = & \sin x+c \\
\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx & = & \tan x+c & \displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx & = & -\cot x+c \\
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx & = & \text{bgsin}\, x+c & \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx & = & \text{bgtan}\, x+c
\end{array}$$

Opmerking 1.

Een *basisintegraal* uitrekenen is eenvoudig want die zoek je op in de tabel. Merk op dat je dus wel snel moet kunnen herkennen *of* een bepaalde integraal al dan niet een basisintegraal is. Je moet bijvoorbeeld geen berekeningsmethode zoeken voor $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$, want deze integraal staat in de tabel.

Voorbeeld 1. Basisintegralen:

(a) $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3+c$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$

(c) $\displaystyle\int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2}+c = -\frac{1}{2x^2}+c$

(d) $\displaystyle\int 7^x\,dx = \frac{7^x}{\ln 7}+c$

Oefening 1. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\displaystyle\int x^{-2}\,dx = \ldots\ldots$

Uitwerking: Basisintegraal $\displaystyle\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1}+c$ voor $r = -2$

2. $\displaystyle\int e^x\,dx = \ldots\ldots$

3. $\displaystyle\int 8^x\,dx = \ldots\ldots$

CC BY-NC-SA 4.0

Basisintegralen

De rekenregels voor som en scalaire veelvouden zijn analoog aan deze voor afgeleiden:

Eigenschap 2. Voor integreerbare functies f en g en $a, b \in \mathbb{R}$ gelden volgende formules:

$$\begin{aligned} \int af(x)\,dx &= a\int f(x)\,dx && \text{(veelvoud)} \\ \int (f(x)+g(x))\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx && \text{(som)} \\ \int (af(x)+bg(x))\,dx &= a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx && \text{(lineaire combinatie)} \end{aligned}$$

De rekenregel voor de som noemt men ook *integratie door splitsing*.

Voorbeeld 2. We berekenen $\int 2x\,dx$ en noteren de uitwerking hiervan eerst zeer nauwkeurig.

Volgens bovenstaande eigenschap geldt dat $\int 2x\,dx = 2\int x\,dx$. Er geldt ook dat $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}+c$, met $c \in \mathbb{R}$ want dit is een basisintegraal. Dus volgt dat

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = 2\left(\int x\,dx\right) = 2\left(\frac{x^2}{2}+c\right) = x^2+2c, \text{ met } c \in \mathbb{R}.$$

Omdat zowel c als $2c$ willekeurige constanten voorstellen noteren we dit korter als:

$$\int 2x\,dx = 2\frac{x^2}{2}+c = x^2+c,\ c \in \mathbb{R}.$$

We veralgemenen vorig voorbeeld: Als F een primitieve functie is van f, dan is

$$2\int f(x)\,dx = 2(F(x)+c) = 2F(x)+2c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Omdat zowel c als $2c$ willekeurige constanten voorstellen noteren we dit verder korter als

$$2\int f(x)\,dx = 2F(x)+c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Oefening 2. Bereken volgende onbepaalde integraal door splitsing:

1. $\int \left(3x^2+2x+\cos x+7^x\right)\,dx = \ldots\ldots$

Opmerking 2.

Als in de functie f meerdere letters voorkomen (bijvoorbeeld zowel de letter t als x), dan is steeds één letter de integratieveranderlijke, en beschouwen we de andere letter(s) als constanten of parameters. Welke letter de integratieveranderlijke is wordt aangeduid door het symbool dx of dt:

$$\int (tx^2)\,dx \neq \int (tx^2)\,dt.$$

Immers, $\int (tx^2)\,dx = t\int x^2\,dx = \frac{tx^3}{3}+c$ en $\int (tx^2)\,dt = x^2\int t\,dt = \frac{x^2t^2}{2}+c, \quad c \in \mathbb{R}.$

Soms moet je een beetje creatief zijn om door splitsing een integraal te schrijven als een som van basisintegralen:

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.59)

Basisintegralen

Oefening 3. Bereken volgende onbepaalde integralen:

1. $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int 1\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \ldots\ldots$
2. $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \ldots\ldots$

Waarschuwing 1 (Veelgemaakte fouten)**.**

- De onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen WEL:

  som $\int (\cos x + x^2)\,dx = \int \cos x\,dx + \int x^2\,dx = \sin x + \frac{x^3}{3} + c$

  constante factor $\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = 3\,\frac{x^3}{3} + c = x^3 + c$

- Een onbepaalde integraal heeft volgende eigenschappen NIET:

  integraal van *product* ~~$\int \cos x \cdot x^2\,dx = \int \cos x\,dx \cdot \int x^2\,dx$~~

  integraal van *samenstelling* ~~$\int (\cos x)^2\,dx = \frac{(\cos x)^3}{3} + c$~~

  Er bestaan *geen algemene regels*, maar wel een aantal *technieken* die we verder zullen bespreken.

Oefening 4. Zijn volgende gelijkheden juist of fout? Verklaar.

1. Juist | Fout $\int (x \cdot x)\,dx \stackrel{?}{=} (\int xdx) \cdot (\int x\,dx)$
2. Juist | Fout $\int (2 \cdot x)\,dx \stackrel{?}{=} (\int 2dx) \cdot (\int x\,dx)$
3. Juist | Fout $\int (2 \cdot x)\,dx \stackrel{?}{=} 2 \cdot (\int x\,dx)$
4. Juist | Fout $\int x^2\,dx \stackrel{?}{=} (\int x\,dx)^2$

CC BY-NC-SA 4.0