Andere integratietechnieken

Je moet niet steeds ofwel de substitutieregel ofwel partiële integratie toepassen om een integraal uit te rekenen. Om integralen uit te rekenen van goniometrische functies kan het soms nuttig zijn om eerst een goniometrische formule toe te passen om zo van een product van functies over te gaan op een som. We herhalen hiervoor enkele goniometrische formules:

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\
2\sin\alpha\cos\beta &= \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \\
2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \\
-2\sin\alpha\sin\beta &= \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

Uit bovenstaande formules volgt ook dat

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha &= \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \\
\sin^2\alpha &= \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)
\end{aligned}$$

Met deze formules kunnen we sommige integralen herschrijven tot basisintegralen of integralen die verder uit te rekenen zijn met andere integratietechnieken.

Oefening 1.

1. $\displaystyle\int \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos x)\,dx = \ldots\ldots$
2. $\displaystyle\int \sin x \sin 3x\,dx = \int \frac{1}{2}(\cos(-2x) - \cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 4x)\,dx = \ldots\ldots$

Uitweiding 1 (Goniometrische substituties)**.**

Een andere situatie waarin goniometrische formules gebruikt worden bij het berekenen van integralen zijn de goniometrische substituties. We behandelen dit niet in het algemeen, we geven enkel een voorbeeld en hierop zijn geen verdere oefeningen opgenomen.

Bereken $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

In de voorbeelden van het gebruik van de substitutieregel hebben we telkens u gelijkgesteld aan een functie van x die in de integrand voorkwam. We kunnen ook x gelijk stellen aan een functie van t. Zo komt in deze integraal $(1-x^2)$ voor, en als we $x = \sin t$ stellen kunnen we de grondformule van de goniometrie gebruiken waardoor de integraal eenvoudiger wordt.

Stel $x = \sin t$ dan is $dx = \cos t\,dt$ zodat

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt \\
&= \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\int \cos 2t\,d2t \\
&= \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + c = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\,2\sin t\cos t + c \\
&= \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t\,\sqrt{1-\sin^2 t} + c \\
&= \frac{\text{bgsin}\,x}{2} + \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{1-x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

CC BY-NC-SA 4.0

We maakten hier gebruik van formules uit de goniometrie

$$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} \quad , \quad \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \quad \text{en} \quad \sin 2t = 2\sin t \cos t.$$

We veronderstelden ook dat de cosinus positief is in het beschouwde domein (zodat $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ en niet eventueel $\cos t = -\sqrt{1-\sin^2 t}$).

CC BY-NC-SA 4.0