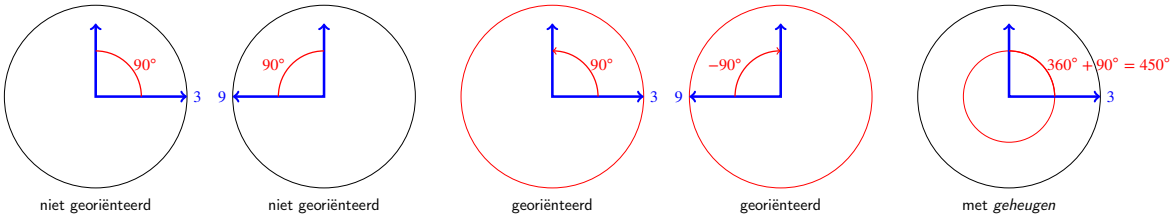
Definitie van een hoek

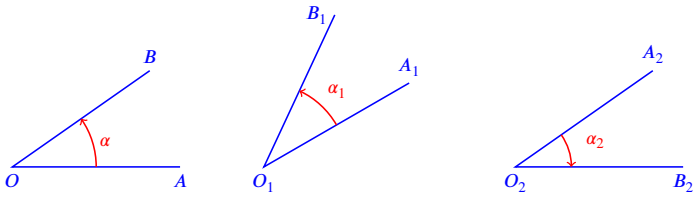
Afhankelijk van de context wordt het woord *hoek* gebruikt voor enkele *verschillende begrippen*. Een driehoek heeft bijvoorbeeld drie *hoeken*, of als het kwart over twaalf is vormen de wijzers van een analoge klok een *hoek* iets kleiner dan 90 graden, net zoals wanneer het bijvoorbeeld kwart voor twaalf is. Soms is het echter nuttig om een verschil te maken tussen die twee hoeken. In andere omstandigheden is het dan weer belangrijk ook te meten *hoe dikwijls* het ene been rond het andere is gedraaid en is er dus een belangrijk verschil tussen een hoek van 90 graden dan wel 360+90 graden of 720+90 graden.



In de goniometrie bestuderen we typisch zogenaamde *georiënteerde hoeken* waarbij we de twee benen van de hoek onderscheiden en de hoek gaat van het eerste been naar het tweede been, zoals aangeduid in de rode cirkels. We kijken daarbij ook enkel naar het *eindresultaat* en houden *geen rekening* met het aantal keer dat het ene been mogelijk rond het andere been is gedraaid.

Definitie 1. Een **georiënteerde hoek** is een meetkundige figuur bestaande uit een **hoekpunt** O met een **eerste been** of **beginbeen** OA en een **tweede been** of **eindbeen** OB. Twee dergelijke figuren bepalen dezelfde hoek als ze door verschuiven en verdraaien op elkaar kunnen worden gelegd.

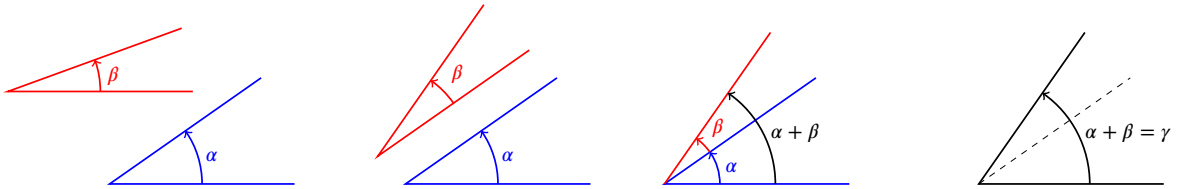
We gebruiken voor een georiënteerde hoek de *notatie* $\measuredangle AOB$, waarbij het hoekpunt dus in het midden staat. Op een tekening duiden we dergelijke hoek dikwijls aan met een boogje-met-een-pijltje-van-het-beginbeen-naar-het-eindbeen. Als *naam* kiezen we traditioneel voor Griekse letters uit het begin van het alfabet: α (alfa), β (beta) en γ (gamma).



Hoek $\alpha = \measuredangle AOB$ | Hoek $\alpha_1 = \measuredangle A_1O_1B_1$ | Hoek $\alpha_2 = \measuredangle A_2O_2B_2$

De *georiënteerde hoeken* $\alpha = \measuredangle AOB$ en $\alpha_1 = \measuredangle A_1O_1B_1$ zijn dus *aan elkaar gelijk* omdat ze via *verschuiven* en *draaien* op elkaar kunnen gelegd worden. De hoeken $\alpha = \measuredangle AOB$ en $\alpha_2 = \measuredangle A_2O_2B_2$ zijn echter niet aan elkaar gelijk, want om $\alpha = \measuredangle AOB$ op $\alpha_2 = \measuredangle A_2O_2B_2$ te leggen moeten we ook *spiegelen* en dat is voor georiënteerde hoeken niet toegelaten. Ook $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle BOA$ zijn dus onderling verschillende hoeken.

Je kan met georiënteerde hoeken *rekenen*: je telt twee hoeken α en β bij elkaar op door ze 'achter elkaar' te leggen, dus je legt het beginbeen van β op het eindbeen van α. Dat levert een nieuwe georiënteerde hoek γ op die we de *som* van α en β noemen. We noteren $\alpha + \beta = \gamma$.



CC BY-NC-SA 4.0

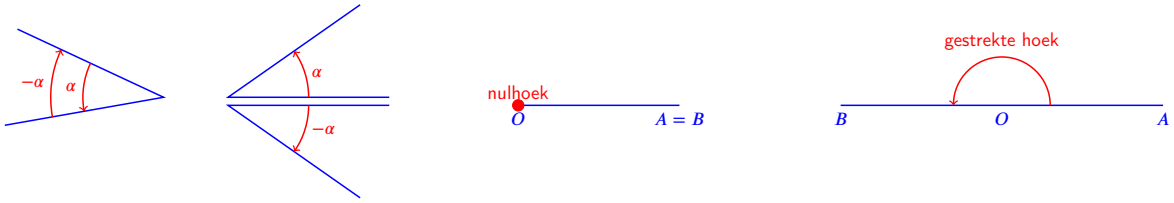
Definitie van een hoek

Als het eindbeen samenvalt met het beginbeen is er geen echte hoek maar enkel een halfrechte en spreken we van de **nulhoek** $\measuredangle AOA$. Het is onmiddellijk duidelijk dat de nulhoek optellen bij een hoek de hoek niet verandert – net zoals nul optellen bij een getal dat getal niet verandert.

We noemen de georiënteerde hoek $\measuredangle BOA$ de **tegengestelde hoek** van $\measuredangle AOB$ en noteren die met een minteken: als $\alpha = \measuredangle AOB$, dan is $-\alpha = \measuredangle BOA$.

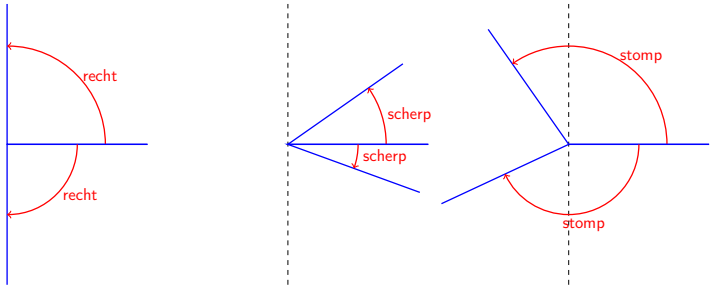
We stellen vast dat de som van twee tegengestelde hoeken de nulhoek is en dat de tegengestelde hoek $-\alpha$ bekomen wordt door α over zijn eerste been te spiegelen.

De **gestrekte hoek** is de hoek waarbij het eindbeen in het verlengde van het beginbeen ligt: dergelijke hoek is onzichtbaar, want het hoekpunt is gewoon een punt O op een rechte AB.



Een **rechte hoek** is de helft van een gestrekte hoek, dus een hoek α zodat $\alpha + \alpha$ een gestrekte hoek vormt.

Een hoek is **scherp** als hij kleiner is dan een rechte hoek en **stomp** als hij groter is.



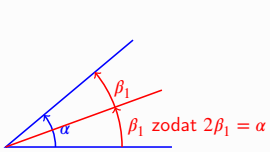
Opmerking 1. Merk op dat we voorlopig niet gesproken hebben over het *meten* van hoeken. Alle regels over rekenen en vergelijken van hoeken zijn voorlopig zuiver meetkundig, er komen geen getallen voor. In de praktijk is het natuurlijk handig hoeken te kunnen *meten*, en vervolgens eerder te rekenen met de maatgetallen van de hoeken dan met de hoeken zelf. Dat wordt verder uitgelegd.

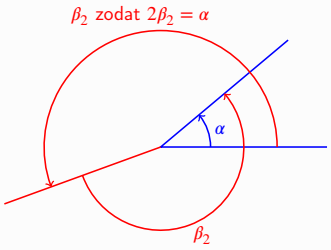
Uitweiding 1 (Subtiele subtiliteiten over hoeken)**.**

- Als we voor gelijke hoeken *ook spiegelingen* toelaten, spreken we over *niet-georiënteerde hoeken*. Dan zijn hoeken $\measuredangle AOB$ en $\measuredangle BOA$ *wel* gelijk. Als we hoeken beschouwen als draaiingen, dan is één keer ronddraaien iets anders dan twee keer ronddraaien. Een 'draaiing' van $360°$ is dus zeker iets anders dan een draaing van $720°$. Al deze subtiel verschillende hoeken hebben hun eigen eigenschappen, maar wij bestuderen hier enkel de hierboven beschreven zogenaamde georiënteerde hoeken: ze zijn het resultaat van een draaiing van het eerste been naar het tweede been, maar we hechten geen belang aan het *aantal* rondwentelingen of aan de richting waarin we hebben gedraaid.
- We hebben enkel som, tegengestelde en verschil van hoeken gedefinieerd. Je kan ook makkelijk de dubbele hoek $2\alpha = \alpha + \alpha$ definiëren, en dus ook hoeken vermenigvuldigen met natuurlijke getallen ($4\alpha = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha$ enzovoort). Een halve hoek definiëren is wat subtieler, want er zijn twee hoeken die als je ze verdubbelt een gegeven hoek α opleveren:

CC BY-NC-SA 4.0

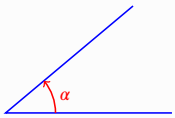
Definitie van een hoek

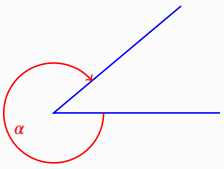




De notatie $\alpha/2$ voor de halve hoek moet dus nauwkeuriger gedefinieerd worden, bijvoorbeeld door af te spreken dat we de kleinste hoek bedoelen waarvan het dubbele gelijk is aan α.

- Twee hoeken *vermenigvuldigen* met elkaar heeft geen betekenis. Je zou wel de *verhouding* tussen twee hoeken kunnen definiëren, dus een soort quotiënt, dat dan een reëel getal zou zijn.
- De notatie van een hoek met een pijltje is ook enigszins subtiel, want het pijltje is ook niet uniek bepaald. Beide pijltjes duiden precies dezelfde hoek $\measuredangle AOB$ aan:





- We hebben wel *tegengestelde* hoeken gedefinieerd, maar geen *positieve* en *negatieve* hoeken. Er is trouwens geen intrinsiek wiskundige manier om af te spreken wat een positieve hoek is, en wat een negatieve hoek. Verder bij het *meten van hoeken* zullen we beroep doen op de wijzers van een analoge klok om af te spreken wat we 'positief' noemen en wat negatief – namelijk positief is per definitie tegen de wijzers van de klok in. Merk op dat we dus een extern, fysisch object moeten gebruiken om af te spreken wanneer een hoek in positieve dan wel negatieve zin draait.

CC BY-NC-SA 4.0