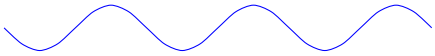
Goniometrische functies

Met een hoek α hebben we een getal $\sin\alpha$ geassocieerd. Door nu de hoek α te laten *variëren* (dus 'variabel' te maken), bekomen we een *functie* in de 'variabele' α. In de wiskunde gebruiken we dikwijls de letter x voor variabelen. We zullen hier dus ook meestal spreken van $\sin x$ in plaats van $\sin\alpha$. Ook van de cosinus, de tangens en de cotangens kunnen we functies maken.

Definitie 1 (Goniometrische functies)**.**

De **goniometrische functies** zijn de reële functies sinus, cosinus, tangens en cotangens:

$$\begin{aligned}
\sin &: \quad x \mapsto \sin(x) \\
\cos &: \quad x \mapsto \cos(x) \\
\tan &: \quad x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
\cot &: \quad x \mapsto \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}
\end{aligned}$$

We gaan nu na hoe de grafieken van deze functies er uit zien. We nemen als voorbeeld $\sin : x \mapsto \sin(x)$, waarvan velen de vorm kennen of minstens herkennen: 

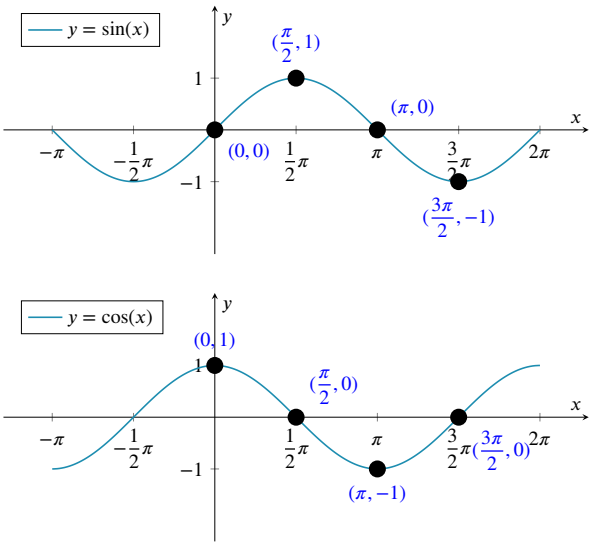
Zonder aanduidingen op de assen ziet de grafiek van $\cos : x \mapsto \cos(x)$ er net hetzelfde uit. Het is dus belangrijk om te weten waar de nulpunten, de maximale en de minimale waarden liggen.

Oefening 1. Lees volgende functiewaarden af op de goniometrische cirkel:

1. $\sin 0 = \ldots\ldots$ $\sin\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\sin\pi = \ldots\ldots$ $\sin\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\sin 2\pi = \ldots\ldots$

2. $\cos 0 = \ldots\ldots$ $\cos\frac{\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos\pi = \ldots\ldots$ $\cos\frac{3\pi}{2} = \ldots\ldots$ $\cos 2\pi = \ldots\ldots$

Met de waarden uit vorige oefening kunnen we nu enkele waarden op de x-as en y-as noteren:



Uitweiding 1 (Amplitude, fase, frequentie en (hoek-)snelheid)**.** Met onderstaande Geogebra applet kan je experimenteel de invloed onderzoeken van de parameters A, B en C op de grafieken van de functies $A\sin(Bx + C)$ en $A\cos(Bx + C)$. Als je de x-coordinaat bestudeert van een punt dat uniform beweegt op een cirkel, stel je vast dat je een golfbeweging bekomt. Hetzelfde geldt voor de y-coördinaat.

CC BY-NC-SA 4.0

Goniometrische functies

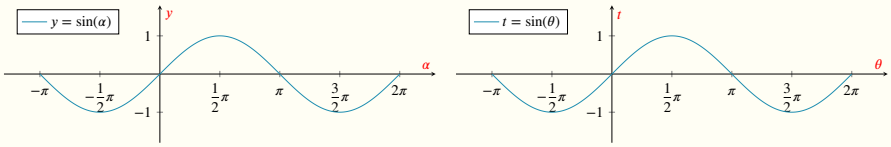
GeoGebra link: https://www.geogebra.org/m/M27dtYDj

Merk op:

- A bepaalt de *hoogte* van de golfbeweging (of de *amplitude*).
- B bepaalt de *snelheid* van de golfbeweging (of de *frequentie*).
- C bepaalt de *beginpositie* van de golfbeweging (of de *fase*).

Opmerking 1.

- Als we sinus, cosinus en tangens als functies beschouwen, geldt dat in principe *altijd* met de variabele uitgedrukt in radialen.
- Als we de sinus beschouwen als een functie, gebruiken we dikwijls de letter x als variabele eerder dan α. Vooral in toepassingen gebruikt men ook andere letters. Men tekent dan bijvoorbeeld ook grafieken in een αy-vlak of een θt-vlak

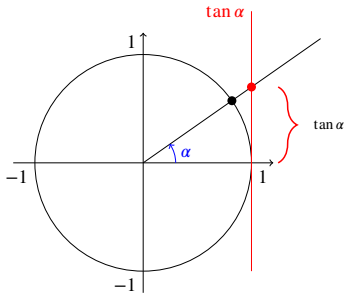


- Het domein van sin en van cos is $\mathbb{R}$ en het beeld is $[-1, 1]$.
  Met de uitgebreidere notatie voor functies kunnen we dus ook schrijven

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin(x)$$

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \cos(x)$$

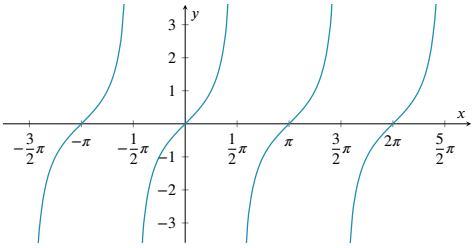
Voor de tangensfunctie $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ merken we op dat ze niet gedefinieerd is in de nulpunten van de noemer, dus als $\cos x = 0$ zoals bijvoorbeeld in $\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ of algemeen als $x \in \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Waar $\sin x = 0$ zal ook de tangensfunctie nul zijn.



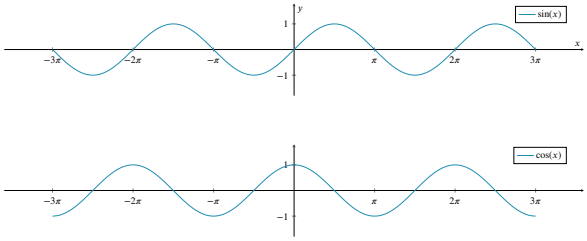
We lezen op de goniometrische cirkel af dat $\tan 0 = 0$, en dat naarmate de hoek groter wordt ook de tangens van de hoek groter wordt. Als de hoek de waarde $\dfrac{\pi}{2}$ krijgt, dan bestaat de tangens niet meer, dan wordt deze 'oneindig'. Volledig gelijkaardig wordt de tangens steeds negatiever als de hoek varieert van 0 tot $-\dfrac{\pi}{2}$. De grafiek van $x \mapsto \tan(x)$ ziet er als volgt uit:

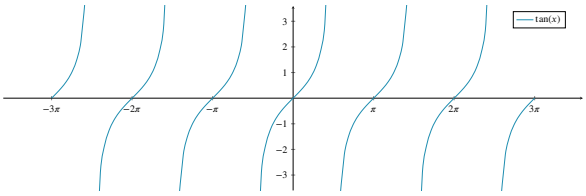
CC BY-NC-SA 4.0

Goniometrische functies



Op de grafieken van sin, cos en tan lees je onderstaande eigenschappen af (die je dus niet van buiten moet leren).





Eigenschap 1 (Eigenschappen van goniometrische functies)**.**

(a) de nulpunten van de goniometrische functies worden gegeven door:

- de sinusfunctie heeft nulpunten in $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft nulpunten in $\frac{\pi}{2} + k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de tangensfunctie heeft nulpunten in $k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$

(b) de maxima en minima van de goniometrische functies worden gegeven door:

- de sinusfunctie heeft maxima in $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de sinusfunctie heeft minima in $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft maxima in $2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de cosinusfunctie heeft minima in $\pi + 2k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$
- de tangensfunctie heeft geen maxima of minima

(c) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ en $\tan(x + \pi) = \tan(x)$

(d) de sinus over een afstand $\frac{\pi}{2}$ naar links verschuiven geeft de cosinus: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

(e) de cosinus over een afstand $\frac{\pi}{2}$ naar rechts verschuiven geeft de sinus: $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

(f) de tangensfunctie heeft *verticale asymptoten* in de punten $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, met $k \in \mathbb{Z}$: in die punten zelf is de tangens niet gedefinieerd, maar de grafiek komt er wel willekeurig dicht tegen de verticale rechten $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Eigenschap (c) betekent dat sinus, cosinus en tangens *periodische functies* zijn.

CC BY-NC-SA 4.0

Goniometrische functies

Oefening 2. Vul aan

1. $\sin(n\pi) = \ldots\ldots$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

2. $\cos(n\pi) = (-1)^{\cdots\cdots}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

3. $\cos((n+1)\pi) = (-1)^{\cdots\cdots}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Oefening 3. Zijn volgende functies even/oneven of geen van beide?

1. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto \sin x$

2. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto \cos x$

3. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto \tan x$

4. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto \sin^2 x$

5. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto x \sin x$

6. | Even | Oneven | Geen van beiden | $x \mapsto \sin x \cos x$

CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/11/23H.59)