Goniometrische cirkel

Hoeken worden traditioneel *gemeten in (boog)graden*, waarbij een rechte hoek $90°$ is, een gestrekte hoek $180°$ en de nulhoek $0°$ of $360°$. Het maatgetal van een georiënteerde hoek is daarbij slechts bepaald 'op $360°$ na': per afspraak zijn $20°$, $20° + 360° = 380°$, $20° + 720° = 740°$ en $20° - 360° = -340°$ allemaal maatgetallen van *dezelfde georiënteerde hoek*. We schrijven dikwijls $\alpha + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$ voor *al* de maatgetallen van hoek α.

De keuze voor (boog)graden, die onderverdeeld zijn in (boog)minuten en (boog)seconden is historisch gemotiveerd, en gebaseerd op een zestigtallig talstelsel. Je kan het vergelijken met het meten van lengtes in mijl, el of voet. Er is een meer natuurlijke manier om hoeken te meten, die eigenlijk zelfs geen willekeurige keuze van een nieuwe eenheid vraagt. We zullen hiervoor een hoek bekijken op de goniometrische cirkel.

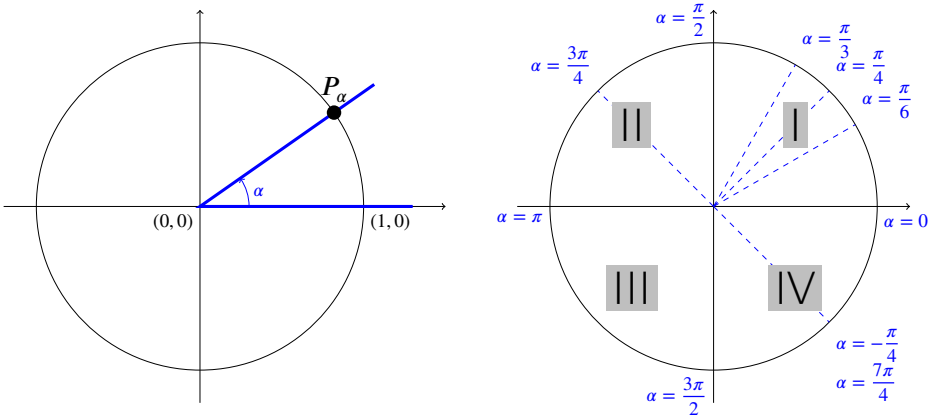
Door verschuiven en draaien (maar niet spiegelen) kan het hoekpunt van een georiënteerde hoek steeds in de oorsprong van het vlak gelegd worden en zijn eerste been op de positieve x-as. Dat leidt tot volgende definities:

Definitie 1.

De **goniometrische cirkel** is de cirkel met straal 1 en centrum in de oorsprong.

Met elke georiënteerde hoek α komt een uniek **beeldpunt** P_α van de goniometrische cirkel overeen door het hoekpunt van α te verschuiven naar de oorsprong, het eerste been op de positieve x-as te leggen en het unieke snijpunt van het tweede been met de goniometrische cirkel P_α te noemen. Omgekeerd bepaalt elk punt P_α van de goniometrische cirkel een georiënteerde hoek α.

De goniometrische cirkel wordt verdeeld in vier **kwadranten**, die vanaf rechtsboven tegen de klok in genummerd worden met Romeinse cijfers I, II, III, IV zoals op de figuur hieronder.



Hoeken komen dus overeen met *punten van de goniometrische cirkel* en in de praktijk wordt meestal geen onderscheid gemaakt tussen het punt P_α en de hoek α.

Omdat de omtrek van een cirkel met straal één gelijk is aan 2π, ligt het voor de hand om een hoek die éénmaal ronddraait maatgetal 2π te geven; een 'halve draai', dus een gestrekte hoek heeft dan maat π, en de helft daarvan, dus een rechte hoek, heeft maatgetal $\pi/2$. Deze manier van hoeken meten noemt men 'meten in radialen'. Op bovenstaande figuur zijn enkele hoeken gemeten in radialen aangeduid.

Het blijkt wiskundig veel handiger hoeken te meten in *radialen* dan in *graden*. De formules voor afgeleiden van sinus en cosinus werken bijvoorbeeld enkel als de hoeken worden gemeten in radialen.

Het maatgetal van een georiënteerde hoek is slechts bepaald 'op 2π na', dus per afspraak zijn $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{25\pi}{6}$ en $\frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{-11\pi}{6}$ allemaal maatgetallen van dezelfde hoek.
We schrijven dikwijls $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ voor *al* de maatgetallen van een hoek.

Als symbool voor radialen wordt **rad** gebruikt, maar het wordt meestal niet geschreven. Men schrijft dus

CC BY-NC-SA 4.0

meestal *een hoek met grootte π* in plaats van *een hoek met grootte π rad*.

Opmerking 1.

- De **lengte van de cirkelboog** tussen de twee benen van een hoek is gelijk aan het maatgetal van die hoek uitgedrukt in radialen, wanneer we dit maatgetal kiezen tussen 0 en 2π. Dit verklaart waarom men soms het begrip *booglengte* gebruikt voor de grootte van een hoek.
- Het verband tussen een hoek gemeten in graden en radialen wordt gegeven door $360° = 2\pi$, en dus geldt ook $90° = \frac{\pi}{2}$ en $180° = \pi$. Voor enkele gekende hoeken geldt dus $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{3\pi}{4} = 135°$, $\pi = 180°$, $\frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{3\pi}{2} = 270°$, ... Merk op dat de grootte in radialen erg dikwijls wordt uitgedrukt als een veelvoud van π.
- Een gestrekte hoek van $180°$ meet π radialen, en dus komt één graad overeen met $\frac{\pi}{180} \approx 0.017\ldots$ rad. Omgekeerd komt 1 rad overeen met ongeveer $\frac{180°}{\pi} \approx 57,\ldots°$.
- Zowel het maatgetal van een hoek als de hoek zelf worden meestal genoteerd met Griekse letters. We spreken dus zowel van 'de hoek α' (waarbij α een letter is, namelijk de naam van de hoek) als 'de hoek met grootte α' (waar α dan staat voor een getal, namelijk het maatgetal van de hoek). Het maatgetal is altijd in radialen uitgedrukt, tenzij er expliciet staat $\alpha°$. De dubbelzinnigheid tussen een 'hoek' en 'de grootte van een hoek' is gelukkig compatibel met de optelling van hoeken: de grootte van de som van twee hoeken is de som van de groottes.
- Het symbool ° kan begrepen worden als een afkorting voor 'maal $\frac{2\pi}{360}$', waardoor dus graden automatisch worden omgezet naar radialen: $7° = 7 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{14\pi}{360} = \frac{7\pi}{180}$. De breuk $\frac{2\pi}{360}$ moet je daarbij niet echt onthouden, want een hoek van $360°$ moet worden omgezet naar 2π, en daarvoor moet je natuurlijk vermenigvuldigen met $\frac{2\pi}{360}$.

Voorbeeld 1 (Omrekenen van graden naar radialen en omgekeerd)**.**

Je kan de omzetting van graden naar radialen maken met behulp van *de regel van drie*. Je vertrekt van het feit dat $360°$ gelijk is aan 2π radialen, berekent dan hoeveel radialen één graad is, en daarna hoeveel radialen bijvoorbeeld 7 graden zijn. Dezelfde redenering werkt voor de omrekening van radialen naar graden.

Graden	Radialen
$360°$	2π
$:2$	$:2$
$180°$	π

Graden	Radialen
$360°$	2π
$:360$	$:360$
$1°$	$\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$
$\times 7$	$\times 7$
$7°$	$\frac{7\pi}{180}$

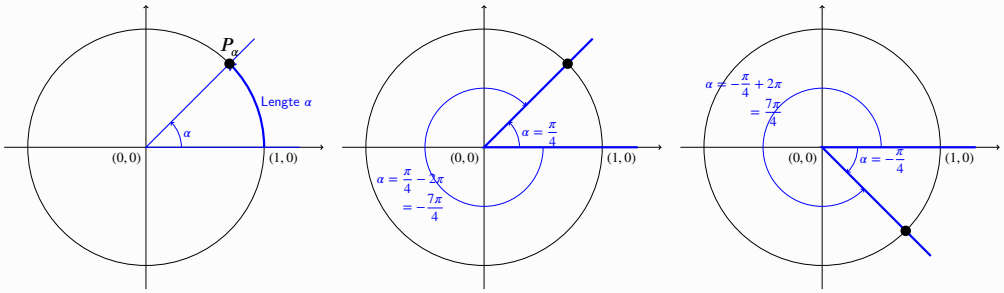
Graden	Radialen
$360°$	2π
$:2\pi$	$:2\pi$
$\frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$	1
$\times 7$	$\times 7$
$\frac{7 \cdot 180°}{\pi}$	7

Een hoek van $180°$ meet π radialen, $7°$ is gelijk aan $\frac{7\pi}{180}$ radialen en 7 radialen is gelijk aan $\frac{7 \cdot 180°}{\pi}$.

CC BY-NC-SA 4.0

Uitweiding 1 (Positieve en negatieve hoeken)**.**

Men zegt soms dat hoeken tussen 0 en π **in tegenwijzerzin** of **positief** georiënteerd zijn, en de hoeken tussen $-\pi$ en 0 **in wijzerzin** of **negatief**. Met die afspraak is de hoek $\frac{\pi}{4}$ in het eerste kwadrant *positief*, en de hoek $-\frac{\pi}{4}$ in het vierde kwadrant *negatief*. Maar merk wel op dat je deze negatieve hoek $-\frac{\pi}{4}$ toch ook een positief maatgetal $\frac{7\pi}{4}$ kan geven! Volgens onze definitie is een hoek wel georiënteerd *van het eerste been naar het tweede*, maar er is *niet* vastgelegd *langs welke kant*, wijzerzin of tegenwijzerzin, je van het eerste been naar het tweede been gaat. Om correct te kunnen spreken van *positief of negatief* moet je dus *de kortste weg nemen*.



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.53)