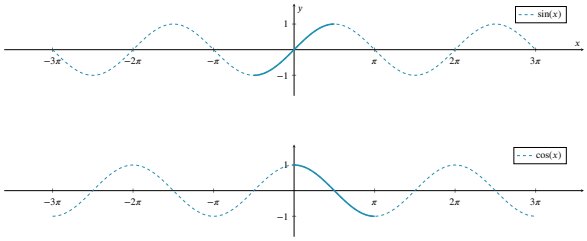
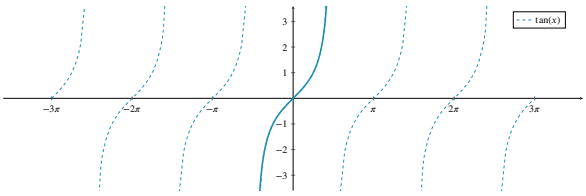
Cyclometrische functies

We bestuderen de *inverse functies* van de gekende functies sinus, cosinus en tangens. We zoeken dus niet de sinus van een bepaald getal x (dus niet r zodat $r = \sin x$), maar net het omgekeerde: we krijgen $r \in [-1, 1]$ en zoeken x zodat $\sin x = r$. Dat is enigszins subtiel omdat er natuurlijk *meerdere* dergelijke getallen x bestaan. Voor $r = 0$ weten we bijvoorbeeld dat $\sin(0) = \sin(\pi) = \sin(-\pi) = \sin(2\pi) = \sin(3\pi) = 0$.

Om dit probleem op te lossen kijken we eerst naar de grafieken van sin, cos en tan:





Op de grafiek kan je zien dat, wanneer we het domein van sin beperken tot $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, *wel* geldt dat voor elke $r \in [-1, 1]$ er *één unieke* x is zodat $\sin x = r$. Om dezelfde reden spreken we af om het domein van cos te beperken tot $[0, \pi]$ en dat van tan tot $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Uitweiding 1 (Een andere manier om hetzelfde te zeggen...)**.**

Met elke hoek α is een getal $\sin\alpha \in [-1, 1]$ geassocieerd. Door de hoek te laten variëren krijgen we een functie

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin(x).$$

We kunnen ons afvragen of we die functie kunnen omkeren: als we een getal $r \in [-1, 1]$ hebben, kunnen we dan weten van welke hoek α dat getal de sinus is? We zoeken dus de hoek α zodat $\sin(\alpha) = r$. We willen een dergelijke hoek α noteren met $\alpha = \text{bgsin}\, r$. Maar, er zijn enkele subtiliteiten, omdat zo'n hoek α niet uniek is.

Een slimme manier om toch een unieke 'inverse' te hebben is het *domein* van de functie te beperken: we beschouwen niet de functie

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin(x).$$

die niet inverteerbaar is omdat bijvoorbeeld $\sin(0) = \sin(\pi) = \sin(2\pi) = 0$, maar de functie

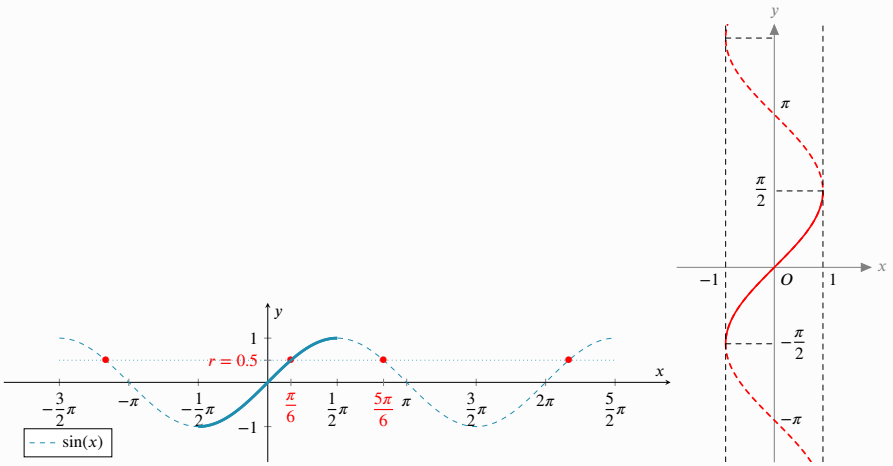
$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1] : x \mapsto \sin(x).$$

Voor deze beperkte functie is het *wel* mogelijk voor elke $r \in [-1, 1]$ *één unieke* x te vinden zodat $\sin x = r$.

Het probleem is ook af te lezen op de grafiek van de sinus. Een functie inverteren komt in het xy-vlak overeen met het omkeren van de rol van x en y: een functie f associeert met een x een y, namelijk $y = f(x)$. Van de inverse functie wordt het omgekeerde verwacht: met een y moet die een unieke x associëren. Dus, als een functie x naar y stuurt, dan moet de inverse die y terug naar x sturen: dit kan dan beschreven worden met een functie g zodat $x = g(y)$:

CC BY-NC-SA 4.0

Cyclometrische functies



Het omkeren van de rol van x en y komt meetkundig overeen met een spiegeling van het vlak over de eerste bissectrice. Dan zien we ook duidelijk dat de gespiegelde grafiek van de volledige sinusfunctie *geen* functie is.

Conclusie: door op een gepaste manier het domein te beperken, worden functies soms toch inverteerbaar.

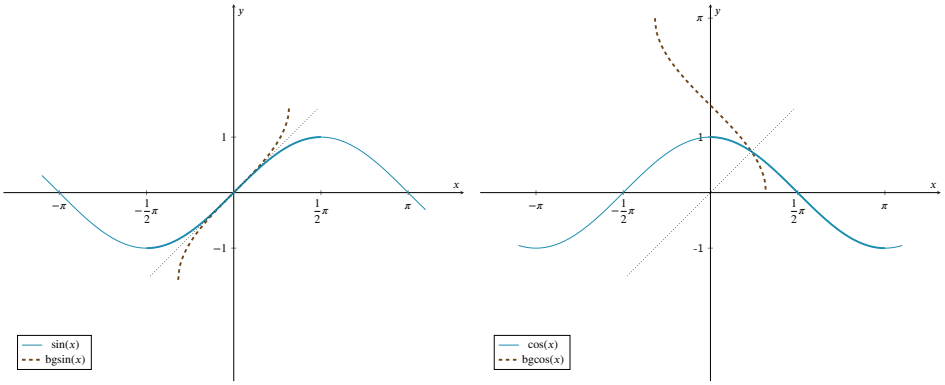
Definitie 1 (Cyclometrische functies)**.** Volgende **cyclometrische functies** zijn de inversen van de goniometrische functies als we het domein van die goniometrische functies gepast beperken:

$$\text{bgsin} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : x \mapsto \text{bgsin}(x) \quad \textit{is invers van} \quad \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1] : x \mapsto \sin(x)$$

$$\text{bgcos} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] : x \mapsto \text{bgcos}(x) \qquad \cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1] : x \mapsto \cos(x)$$

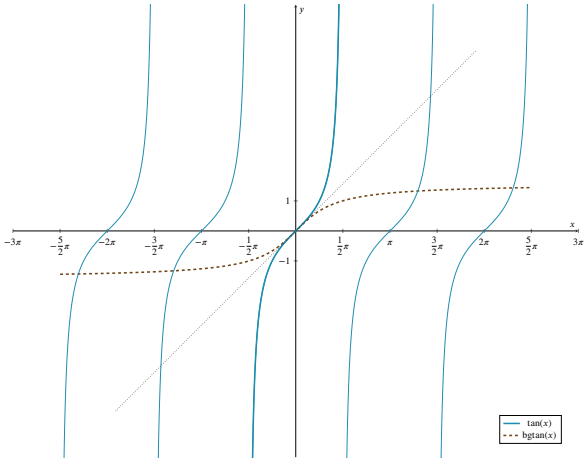
$$\text{bgtan} : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: x \mapsto \text{bgtan}(x) \qquad \tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \tan(x)$$

We bekomen de *grafiek* van de cyclometrische functies door het domein van de goniometrische functies te beperken, en de grafiek te spiegelen over de eerste bissectrice:

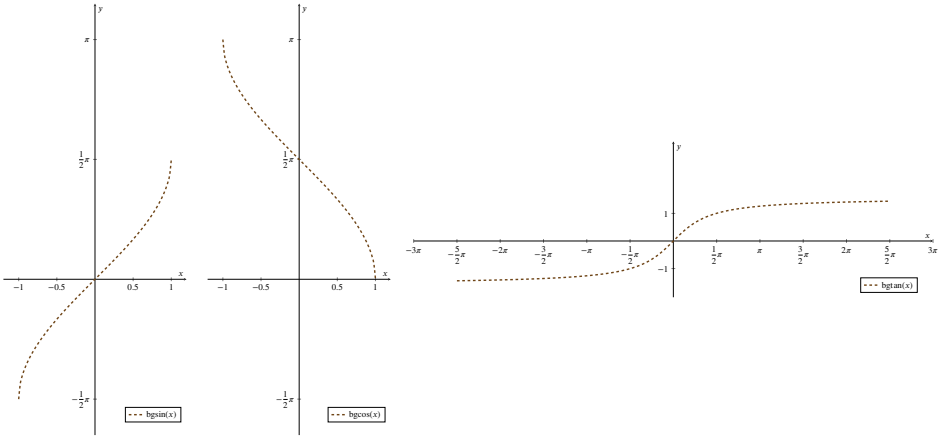


CC BY-NC-SA 4.0

Cyclometrische functies



en dat resulteert in volgende grafieken van bgsin, bgcos en bgtan:



Opmerking 1.

- Cyclometrische functies geven *altijd* de waarde van een hoek uitgedrukt in radialen.
- De naam *boog*sinus komt van het feit dat de boogsinus de lengte geeft van de *boog* met een gegeven sinus. Men gebruikt zowel de notaties bgsin, Bgsin, arcsin als asin.
- De boogsinus en boogtangens is *altijd* een getal tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$, en dat is dus *altijd* een hoek in kwadrant I of IV.
- De boogcosinus van een getal is *altijd* een getal tussen 0 en π, en dat is dus *altijd* een hoek in kwadrant I of II.
- Zoals steeds voor inverse functies geldt dat de grafiek van de sin en bgsin elkaars *spiegelbeeld* zijn over de eerste bissectrice $y = x$. Idem voor cos en bgcos, en tan en bgtan.
- bgsin en bgcos zijn slechts gedefinieerd op het interval $[-1, 1]$.
- bgtan is gedefinieerd op $\mathbb{R}$.
- bgsin en bgtan zijn *stijgende* functies, bgcos is een *dalende* functie.
- Soms wordt ook de standaard wiskunde notatie voor inverse functies $\sin^{-1}(x)$ gebruikt. Meestal wordt dat echter vermeden omdat er verwarring mogelijk is met $(\sin(x))^{-1} = \frac{1}{\sin(x)}$ wat iets

CC BY-NC-SA 4.0

heel anders is. De verwarring is fundamenteler bij de goniometrische functies dan elders omwille van de historisch gegroeide conventie om $\sin^2(x)$ te schrijven voor $(\sin(x))^2$.

Voorbeeld 1.

- $\operatorname{bgsin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ want $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{6}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\operatorname{bgsin}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ want $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ en $-\frac{\pi}{6}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\operatorname{bgcos}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ want $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\frac{\pi}{4}$ ligt tussen 0 en π.
- $\operatorname{bgcos}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ want $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\frac{3\pi}{4}$ ligt tussen 0 en π.
- $\operatorname{bgtan} 1 = \frac{\pi}{4}$ want $\tan\frac{\pi}{4} = 1$ en $\frac{\pi}{4}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.
- $\operatorname{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ want $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$ en $-\frac{\pi}{4}$ ligt tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.

0.1 Samenstellen van goniometrische en cyclometrische functies

CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 2 (Voorbeelden boogtangens)**.**

We kijken wat er gebeurt als we de functies bgtan en tan samenstellen. We weten bijvoorbeeld dat $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\text{bgtan}(1) = \frac{\pi}{4}$, $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, $\text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ en $\tan\frac{3\pi}{4} = -1$. Hiermee kunnen we berekenen dat

- $\tan(\text{bgtan}(1)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. Voor $x = 1$ geldt bijgevolg $\tan(\text{bgtan}(x)) = x$.
- $\tan(\text{bgtan}(-1)) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Voor $x = -1$ geldt ook $\tan(\text{bgtan}(x)) = x$.
- $\text{bgtan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \text{bgtan}(1) = \frac{\pi}{4}$. Voor $\alpha = \frac{\pi}{4}$ geldt bijgevolg $\text{bgtan}(\tan(\alpha)) = \alpha$.
- $\text{bgtan}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \text{bgtan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Voor $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ is $\text{bgtan}(\tan(\alpha)) \neq \alpha$. Hier geldt dat $\text{bgtan}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - \pi$.

In het algemeen geldt voor hoeken tussen $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{3\pi}{2}$ (hoeken in het 2de en 3de kwadrant) dat:

$$\text{bgtan}(\tan\alpha) = \alpha - \pi \text{ of dus } \alpha = \text{bgtan}(\tan\alpha) + \pi.$$

Voor hoeken in het 1ste en 4de kwadrant geldt wel $\text{bgtan}(\tan\alpha) = \alpha$.

Voor alle getallen x geldt *wel* dat $x = \tan(\text{bgtan}(x))$.

Merk op: We hebben hier bij de functie boogtangens gekozen om x als naam van de variable te nemen omdat de *boog*tangens genomen wordt van een gewoon *reëel getal*, terwijl we voor de functie *tangens* hierboven α hebben gebruikt omdat de tangens genomen wordt van de (getalwaarde van) een *hoek* (maar die is *ook* uitgedrukt als een reëel getal). De naam van de variabele kan natuurlijk vrij worden gekozen, en dikwijls wordt ook voor de tangens de letter x gebruikt.

Eigenschap 1 (Samenstellen van goniometrische en cyclometrische functies)**.**

- Als x een getal is dan geldt

$$\begin{aligned} &\text{als } x \in [-1,1] : \sin(\text{bgsin}(x)) = x. && \text{Voor andere } x \text{ is } \text{bgsin}(x) \text{ niet gedefinieerd} \\ &\text{als } x \in [-1,1] : \cos(\text{bgcos}(x)) = x. && \text{Voor andere } x \text{ is } \text{bgsin}(x) \text{ niet gedefinieerd} \\ &\text{als } x \in \mathbb{R} : \tan(\text{bgtan}(x)) = x \end{aligned}$$

- Als α het maatgetal is van een hoek dan geldt

$$\begin{aligned} \text{als } \alpha \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] &: \text{bgsin}(\sin(\alpha)) = \alpha. \\ \text{als } \alpha \in [0, \pi] &: \text{bgcos}(\cos(\alpha)) = \alpha \\ \text{als } \alpha \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[&: \text{bgtan}(\tan(\alpha)) = \alpha \end{aligned}$$

  Voor α buiten deze intervallen gelden deze gelijkheden niet.

CC BY-NC-SA 4.0