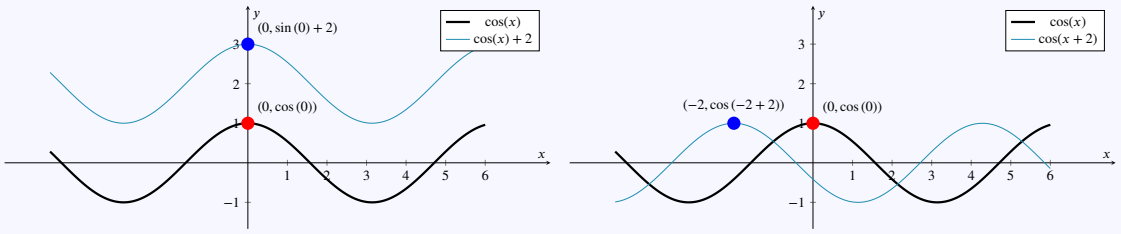
Transformaties van functies

In het algemeen kan het verband tussen twee functies f en g enerzijds, en de samengestelde functie $f \circ g$ anderzijds erg complex zijn. Maar als één van de functies zelf eenvoudig is, kan het verband wel intuïtief duidelijk zijn, en kunnen we het zelfs aflezen op de grafiek. We spreken in dit speciale geval soms van *transformaties* van functies, of de transformatie van één functie door een andere in plaats van het algemenere *samenstelling* van twee functies. We noteren hier de 'eenvoudige' functie met de letter T (voor *T*ransformatie). Als voorbeelden van zulke 'eenvoudige' functies bekijken we in eerste instantie eerstegraadsfuncties zoals $x \mapsto x+2$, $x \mapsto 2x$, $x \mapsto 2x+2$, ... maar later ook bijvoorbeeld de absolute waarde functie.

Voorbeeld 1. Verschuivingen: bestudeer voor $f : x \mapsto \cos(x)$ en $T_1 : x \mapsto x+2$ de grafieken van

$$T_1 \circ f : x \mapsto \cos(x)+2 \text{ en } f \circ T_1 : x \mapsto \cos(x+2).$$



- De grafiek van $x \mapsto \cos(x)+2$ is 2 naar *boven* verschoven t.o.v. de grafiek van f.

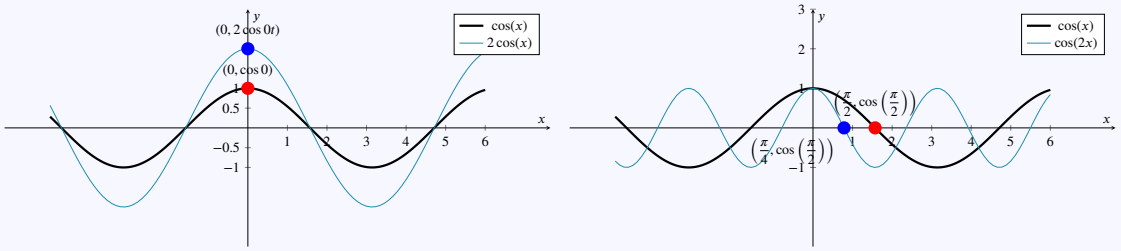
  Dit is eenvoudig te begrijpen want de x die door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, wordt door $T_1 \circ f$ afgebeeld op $\cos(x)+2$, dus 2 eenheden hoger.

- De grafiek van $x \mapsto \cos(x+2)$ is 2 naar *links* verschoven t.o.v. de grafiek van f.

  Dit is wat subtieler: als x door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, dan wordt $x-2$ door $T_1 \circ f$ afgebeeld op dezelfde $\cos((x-2)+2) = \cos(x)$. Dus, je moet 2 eenheden vroeger vertrekken om op dezelfde functiewaarde terecht te komen.

Voorbeeld 2. Expansies: bestudeer voor $f : x \mapsto \cos(x)$ en $T_2 : x \mapsto 2x$ de grafieken van

$$T_2 \circ f : x \mapsto 2\cos(x) \text{ en } f \circ T_2 : x \mapsto \cos(2x).$$



- De grafiek van $x \mapsto 2\cos(x)$ is een factor 2 'uitgerekt' in de y-richting t.o.v. de grafiek van $\cos x$.

  Dit is eenvoudig te begrijpen want de functiewaarden worden door T_2 met 2 vermenigvuldigd. De x die door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, wordt door $T_2 \circ f$ afgebeeld op $2\cos(x)$, dus 2 keer groter.

- De grafiek van $x \mapsto \cos(2x)$ is een factor 2 'ingedrukt' in de x-richting t.o.v. de grafiek van $\cos x$.

CC BY-NC-SA 4.0

Dit is wat subtieler: als x door f wordt afgebeeld op $\cos(x)$, dan wordt $x/2$ door $f \circ T_2$ afgebeeld op dezelfde $\cos(2(x/2)) = \cos(x)$. Dus, je moet met $x/2$ vertrekken om op dezelfde functiewaarde terecht te komen.

Voor sommige eenvoudige functies T is er dus een duidelijk verband tussen de grafieken van f en de samengestelde functies $T \circ f$ en $f \circ T$. We stellen het volgende vast.

Eigenschap 1 (Transformaties van een functie)**.**

De (transformatie-)functies T hebben volgend effect op (de grafiek van) een willekeurige functie f:

- $f \circ T : x \mapsto f(T(x))$: pas T toe langs de x-as
- $T \circ f : x \mapsto T(f(x))$: pas T toe langs de y-as

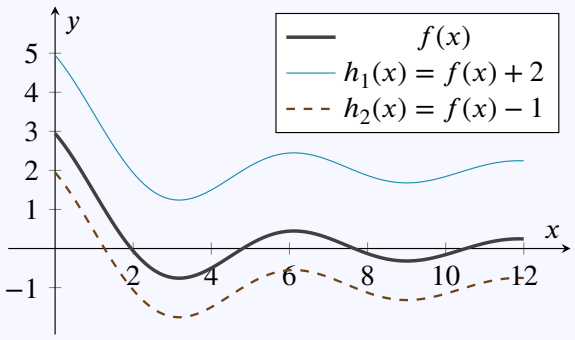
In het bijzonder hebben de transformaties $T_+ : x \mapsto x + a$ ('plus a') en $T_\times : x \mapsto ax$ ('maal a') volgende effecten:

$T_+ \circ f : x \mapsto f(x) + a$	grafiek a naar *boven* verschuiven
$f \circ T_+ : x \mapsto f(x + a)$	grafiek a naar *links* verschuiven
$T_\times \circ f : x \mapsto a \cdot f(x)$	grafiek met factor a *uitrekken* in de y-richting
$f \circ T_\times : x \mapsto f(a \cdot x)$	grafiek met factor a *indrukken* in de x-richting

Opmerking 1. '-2 naar boven schuiven' betekent natuurlijk hetzelfde als '2 naar beneden schuiven' en 'met factor $\frac{1}{2}$ uitrekken' betekent hetzelfde als 'met factor 2 indrukken'.

Voorbeeld 3 (Verschuiving langs y-as)**.**

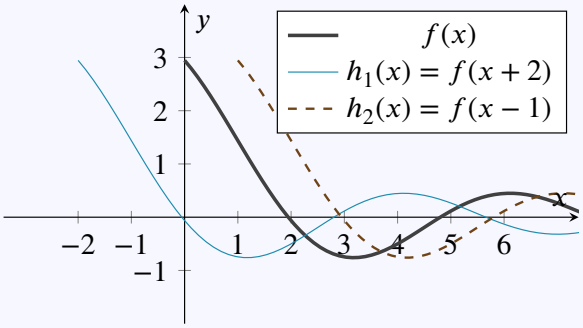
Een functie f kan je langs de y-as verschuiven door (langs *links*) samen te stellen met functies zoals $T_1 : x \mapsto x + 2$ en $T_2 : x \mapsto x - 1$. Dit resulteert in onderstaande functies $h_1 : x \mapsto (T_1 \circ f)(x) = f(x) + 2$ en $h_2 : x \mapsto (T_2 \circ f)(x) = f(x) - 1$:



Voorbeeld 4 (Verschuiving langs x-as)**.**

Een functie f kan je langs de x-as verschuiven door (langs *rechts*) samen te stellen met functies zoals $T_1 : x \mapsto x + 2$ en $T_2 : x \mapsto x - 1$. Dit resulteert in volgende functies $h_1 : x \mapsto (f \circ T_1)(x) = f(x + 2)$ en $h_2 : x \mapsto (f \circ T_2)(x) = f(x - 1)$:

CC BY-NC-SA 4.0

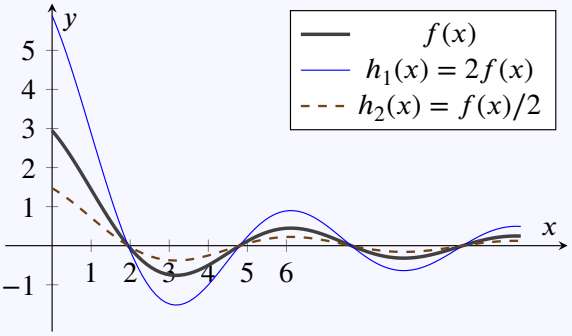


Het domein van $f \circ T_1$ is niet hetzelfde als het domein van f:

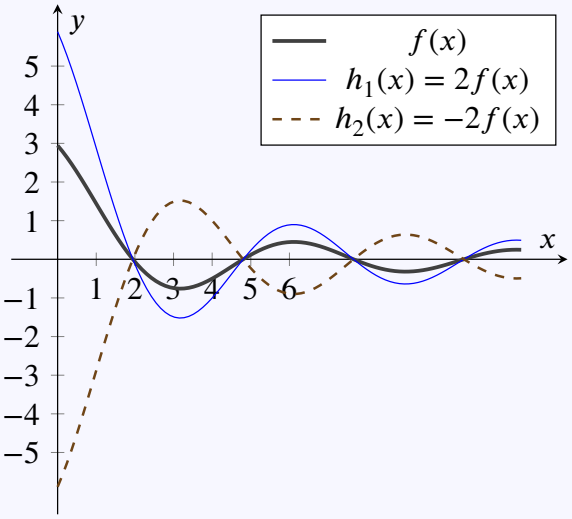
Als $f : [0, 12] \to \mathbb{R}$ dan is $h_1 = f \circ T_1 : [-2, 10] \to \mathbb{R}$, want bijvoorbeeld $h_1(11) = f(13)$ bestaat dan niet.

Voorbeeld 5 (Schalen langs y-as)**.**

Een functie f kan je langs de y-as herschalen door (langs *links*) samen te stellen met functies zoals $T_1 : x \mapsto 2x$ en $T_2 : x \mapsto x/2$. Dit resulteert in volgende functies $h_1 : x \mapsto (T_1 \circ f)(x) = 2f(x)$ en $h_2 : x \mapsto (T_2 \circ f)(x) = f(x)/2$:



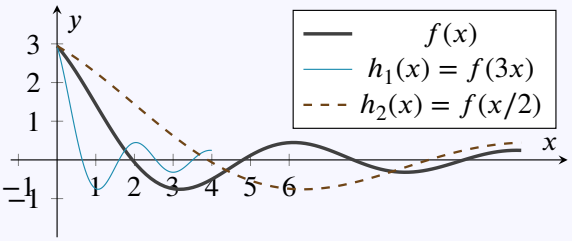
Merk op dat schalen met een negatieve factor zorgt voor een spiegeling rond de x-as:



CC BY-NC-SA 4.0

Voorbeeld 6 (Schalen langs de x-as)**.**

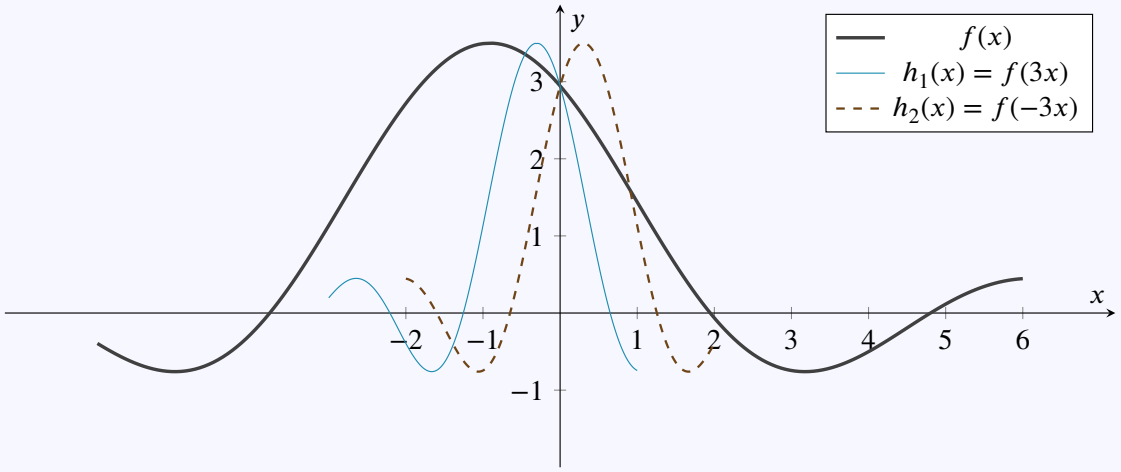
Een functie f kan je langs de x-as herschalen door (langs *rechts*) samen te stellen met de functies zoals $T_1 : x \mapsto 3x$ en $T_2 : x \mapsto x/2$. Dit resulteert in volgende functies $h_1 : x \mapsto (f \circ T_1)(x) = f(3x)$ en $h_2 : x \mapsto (f \circ T_2)(x) = f(x/2)$:



Het domein van $f \circ T_1$ is niet hetzelfde als het domein van f:

Als $f : [0, 12] \to \mathbb{R}$ dan is $h_1 = f \circ T_1 : [0, 4] \to \mathbb{R}$, want bijvoorbeeld $h_1(5) = f(15)$ bestaat dan niet.

Merk op dat schalen met een negatieve factor zorgt voor een spiegeling rond de y-as:



Oefening 1. Welke transformatie verschuift de grafiek van f met π eenheden naar beneden ?

$f \circ T$ met $T : x \mapsto x + \pi$, dus $x \mapsto f(x + \pi)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto x + \pi$, dus $x \mapsto f(x) + \pi$
$f \circ T$ met $T : x \mapsto x - \pi$, dus $x \mapsto f(x - \pi)$
$T \circ f$ met $T : x \mapsto x - \pi$, dus $x \mapsto f(x) - \pi$

Oefening 2.

Welke transformatie verschuift de grafiek van een functie f een halve eenheid naar links ?

CC BY-NC-SA 4.0

$f \circ T$ met $T : x \mapsto x - \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x - \frac{1}{2})$

$T \circ f$ met $T : x \mapsto x - \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x) - \frac{1}{2}$

$f \circ T$ met $T : x \mapsto x + \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x + \frac{1}{2})$

$T \circ f$ met $T : x \mapsto x + \frac{1}{2}$, dus $x \mapsto f(x) + \frac{1}{2}$

Oefening 3.

Hoe kan je de grafiek van een functie f met een factor 3 indrukken langs de y-as?

$f \circ T$ met $T : x \mapsto 3x$, dus $x \mapsto f(3x)$

$T \circ f$ met $T : x \mapsto 3x$, dus $x \mapsto 3f(x)$

$f \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{1}{3}x$, dus $x \mapsto f(\frac{1}{3}x)$

$T \circ f$ met $T : x \mapsto \frac{1}{3}x$, dus $x \mapsto \frac{1}{3}f(x)$

Oefening 4.

Hoe kan je de grafiek van een functie f uitrekken langs de x-as met een factor 2 ?

$f \circ T$ met $T : x \mapsto 2x$, dus $x \mapsto f(2x)$

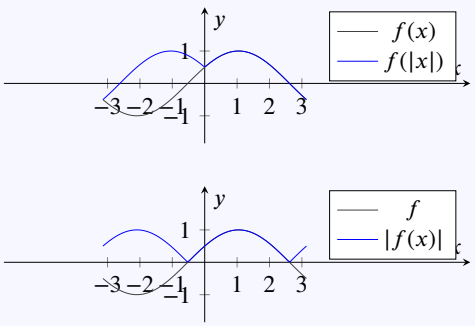
$T \circ f$ met $T : x \mapsto 2x$, dus $x \mapsto 2f(x)$

$f \circ T$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$, dus $x \mapsto f(x/2)$

$T \circ f$ met $T : x \mapsto \frac{x}{2}$, dus $x \mapsto f(x)/2$

Voorbeeld 7 (Absolute waarde)**.**

Je kan een functie f ook samenstellen met de transformatie $T : x \mapsto |x|$. Dit resulteert in de functies $x \mapsto f(|x|)$ en $|f(x)|$. Onderstaande figuur toont telkens de grafieken:



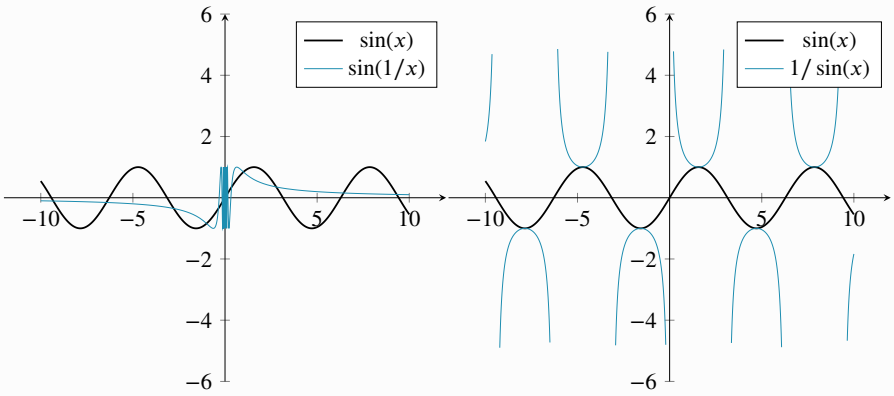
CC BY-NC-SA 4.0

- De grafiek van $x \mapsto f(|x|)$ is gelijk aan de grafiek van $f(x)$ voor positieve x, en je spiegelt het deel voor positieve x over de y-as. Het resultaat is dus symmetrisch ten opzichte van de y-as, en dat is eenvoudig te begrijpen omdat negatieve x-waarden worden omgezet naar hun absolute waarde, voordat ze ingevoerd worden in f.

  In symbolen: $f(|-x|) = f(x) = f(|x|)$ voor $x \geq 0$.
  De eventuele waarden van f voor negatieve x spelen dus geen enkele rol meer in de functie $f(|x|)$.

- De grafiek van $x \mapsto |f(x)|$ komt overeen met de grafiek van f waarbij alle negatieve y-waarden, vervangen worden door hun tegengestelde.
  Dus, je spiegelt de negatieve onderste helft naar de positieve bovenste helft .
  De grafiek van $|f|$ heeft hierdoor meestal hoekpunten op de x-as. Dat zal later nog problemen opleveren bij de studie van afgeleiden.

Uitweiding 1 (Transformaties met $1/x$)**.** We kunnen een functie f ook samenstellen met de transformatie $T : x \mapsto 1/x$. Dit resulteert in de functies $x \mapsto f(1/x)$ en $x \mapsto 1/f(x)$. Onderstaande figuur toont telkens de grafieken:



CC BY-NC-SA 4.0
KU Leuven (2026/09/28H.26)